ERPI SCIENCES



Données d'usage fréquent

Terre		
Rayon moyen		$6,37 \times 10^6$ m
Masse		$5,98 \times 10^{24}$ kg
Distance moyenne au Soleil		$1,50 \times 10^{11}$ m
Lune		
Rayon moyen		$1,74 \times 10^6$ m
Masse		$7,36 \times 10^{22}$ kg
Distance moyenne à la Terre		$3,84 \times 10^8$ m
Soleil		
Rayon moyen		$6,96 \times 10^8$ m
Masse		$1,99 \times 10^{30}$ kg
Accélération de chute libre (g), valeur recommandée		9,806 65 m/s^2
Pression atmosphérique normale		$1,013 \times 10^5$ Pa
Masse volumique de l'air (à 0 °C et à 1 atm)		1,293 kg/m^3
Masse volumique de l'eau (entre 0 °C et 20 °C)		1000 kg/m^3
Chaleur spécifique de l'eau		4186 J/(kg·K)
Vitesse du son dans l'air à la pression atmosphérique normale	(à 0 °C)	331,5 m/s
	(à 20 °C)	343,4 m/s

Préfixes des puissances de dix

Puissance	Préfixe	Abréviation	Puissance	Préfixe	Abréviation
10^{-18}	atto	a	10^1	déca	da
10^{-15}	femto	f	10^2	hecto	h
10^{-12}	pico	p	10^3	kilo	k
10^{-9}	nano	n	10^6	méga	M
10^{-6}	micro	µ	10^9	giga	G
10^{-3}	milli	m	10^{12}	téra	T
10^{-2}	centi	c	10^{15}	péta	P
10^{-1}	déci	d	10^{18}	exa	E

Symboles mathématiques

$\propto$	est proportionnel à
$>$ ($<$)	est plus grand (plus petit) que
$\geq$ ($\leq$)	est plus grand (plus petit) ou égal à
$\gg$ ($\ll$)	est beaucoup plus grand (plus petit) que
$\approx$	est approximativement égal à
$\equiv$	est défini comme égal à
Δx	la variation de x
$\sum_{i=1}^{N} x_i$	$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_N$
$\lvert x \rvert$	le module ou la valeur absolue de x
$\Delta x \to 0$	Δx tend vers zéro
$n!$	factorielle n : $n(n-1)(n-2) \ldots 2 \times 1$

Constantes physiques

Nom	Symbole	Valeur approchée	Valeur précise*
Charge élémentaire	e	$1,602 \times 10^{-19}$ C	$1,602\ 176\ 565(35) \times 10^{-19}$ C
Constante de Boltzmann	$k = R/N_A$	$1,381 \times 10^{-23}$ J/K	$1,380\ 648\ 8(13) \times 10^{-23}$ J/K
Constante de gravitation	G	$6,674 \times 10^{-11}$ N·m²/kg²	$6,673\ 84(80) \times 10^{-11}$ N·m²/kg²
Constante de la loi de Coulomb	$k\ (= 1/4\pi\varepsilon_0)$	$9,00 \times 10^{9}$ N·m²/C²	$8,987\ 551\ 8 \times 10^{9}$ N·m²/C²
Constante de Planck	h	$6,626 \times 10^{-34}$ J·s	$6,626\ 069\ 57(29) \times 10^{-34}$ J·s
Constante des gaz parfaits	R	8,314 J/(K·mol)	8,314 4621(75) J/(K·mol)
Masse de l'électron	m_e	$9,109 \times 10^{-31}$ kg	$9,109\ 382\ 91(40) \times 10^{-31}$ kg
Masse du proton	m_p	$1,673 \times 10^{-27}$ kg	$1,672\ 621\ 777(74) \times 10^{-27}$ kg
Nombre d'Avogadro	N_A	$6,022 \times 10^{23}$ mol^{-1}	$6,022\ 141\ 29(27) \times 10^{23}$ mol^{-1}
Perméabilité du vide	μ_0	–	$4\pi \times 10^{-7}$ N/A² (exacte)
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$	$8,854 \times 10^{-12}$ C²/(N·m²)	$8,854\ 187\ 817 \times 10^{-12}$ C²/(N·m²)
Unité de masse atomique	u	$1,661 \times 10^{-27}$ kg	$1,660\ 538\ 921(73) \times 10^{-27}$ kg
Vitesse de la lumière dans le vide	c	$3,00 \times 10^{8}$ m/s	$2,997\ 924\ 58 \times 10^{8}$ m/s (exacte)

* 2010 CODATA (Committee on Data for Science and Technology), juin 2011. National Institute of Standards and Technology, http://physics.nist.gov/cuu/Constants/index.html.

Abréviations des unités courantes

Ampère	A	Kelvin	K
Année	a	Kilocalorie	kcal (Cal)
Ångström	Å	Kilogramme	kg
Atmosphère	atm	Livre	lb
British thermal unit	Btu	Mètre	m
Candela	cd	Minute	min
Coulomb	C	Mole	mol
Degré Celsius	°C	Newton	N
Degré Fahrenheit	°F	Ohm	Ω
Électronvolt	eV	Pascal	Pa
Farad	F	Pied	pi
Gauss	G	Pouce	po
Gramme	g	Seconde	s
Henry	H	Tesla	T
Heure	h	Unité de masse atomique	u
Horse-power	hp	Volt	V
Hertz	Hz	Watt	W
Joule	J	Weber	Wb

PHYSIQUE 2

5e ÉDITION

ÉLECTRICITÉ ET MAGNÉTISME

ERPI SCIENCES



ÉLECTRICITÉ ET MAGNÉTISME

HARRIS BENSON
MATHIEU LACHANCE
MARC SÉGUIN
BENOÎT VILLENEUVE
BERNARD MARCHETERRE

PEARSON

Montréal Toronto Boston Columbus Indianapolis New York San Francisco Upper Saddle River
Amsterdam Le Cap Dubaï Londres Madrid Milan Munich Paris
Delhi México São Paulo Sydney Hong-Kong Séoul Singapour Taipei Tōkyō

Développement de produits
Philippe Dubé

Supervision éditoriale
Sylvain Bournival

Traduction
Dominique Amrouni

Correction des épreuves
Marie-Claude Rochon (Scribe Atout)

Recherche iconographique et demande de droits
Chantal Bordeleau

Index
Monique Dumont

Direction artistique
Hélène Cousineau

Supervision de la production
Estelle Cuillerier

Conception graphique de l'intérieur
Martin Tremblay

Conception graphique de la couverture
Martin Tremblay

Illustrations techniques
Interscript, Bertrand Lachance, John Bell et Mathieu Lachance

Édition électronique
Interscript inc.

1611, boulevard Crémazie Est, 10e étage
Montréal (Québec) H2M 2P2
Canada
Téléphone : 514 334-2690
Télécopieur : 514 334-4720
info@pearsonerpi.com
pearsonerpi.com



Dépôt légal – Bibliothèque et Archives nationales du Québec, 2015
Dépôt légal – Bibliothèque et Archives Canada, 2015

Imprimé au Canada 1234567890 SO 18 17 16 15
ISBN 978-2-7613-5500-1 20679 ABCD SM9

Avant-propos

Depuis la parution de la première édition québécoise, en 1993, le « Benson » s'est imposé. Aujourd'hui utilisé dans la majorité des cégeps, dans cinq provinces canadiennes et dans plusieurs universités européennes, cet ouvrage est devenu une référence. Il se distingue notamment par la richesse des sujets abordés : parce qu'il dépasse le cadre des cours pour lesquels il est conçu, il constitue un ouvrage tout indiqué pour les projets de fin d'études et peut servir de lecture complémentaire pour les étudiants avancés, voire de première référence à relire en commençant un cours de niveau universitaire.

En devenant une référence, cet ouvrage ne s'est pas pour autant figé dans le temps. Les innovations substantielles de cette cinquième édition le démontrent bien. Bien sûr, il y a du matériel supplémentaire, dont deux nouvelles sections de chapitre et 25 nouveaux exemples seulement dans le tome 2. Mais nous avons aussi revu l'ensemble du texte principal : les explications les plus importantes ont été améliorées grâce à de nombreuses retouches apportées au texte ; des centaines de nouvelles figures, dont 74 seulement dans le tome 2, illustrent mieux les concepts de base. Cette nouvelle édition tient compte de l'intérêt d'un grand nombre d'étudiants pour les sciences de la vie et de la santé grâce à de nouveaux sujets connexes, de nouveaux passages dans le texte et une centaine de nouveaux exercices et problèmes de fin de chapitre spécialement conçus pour eux.

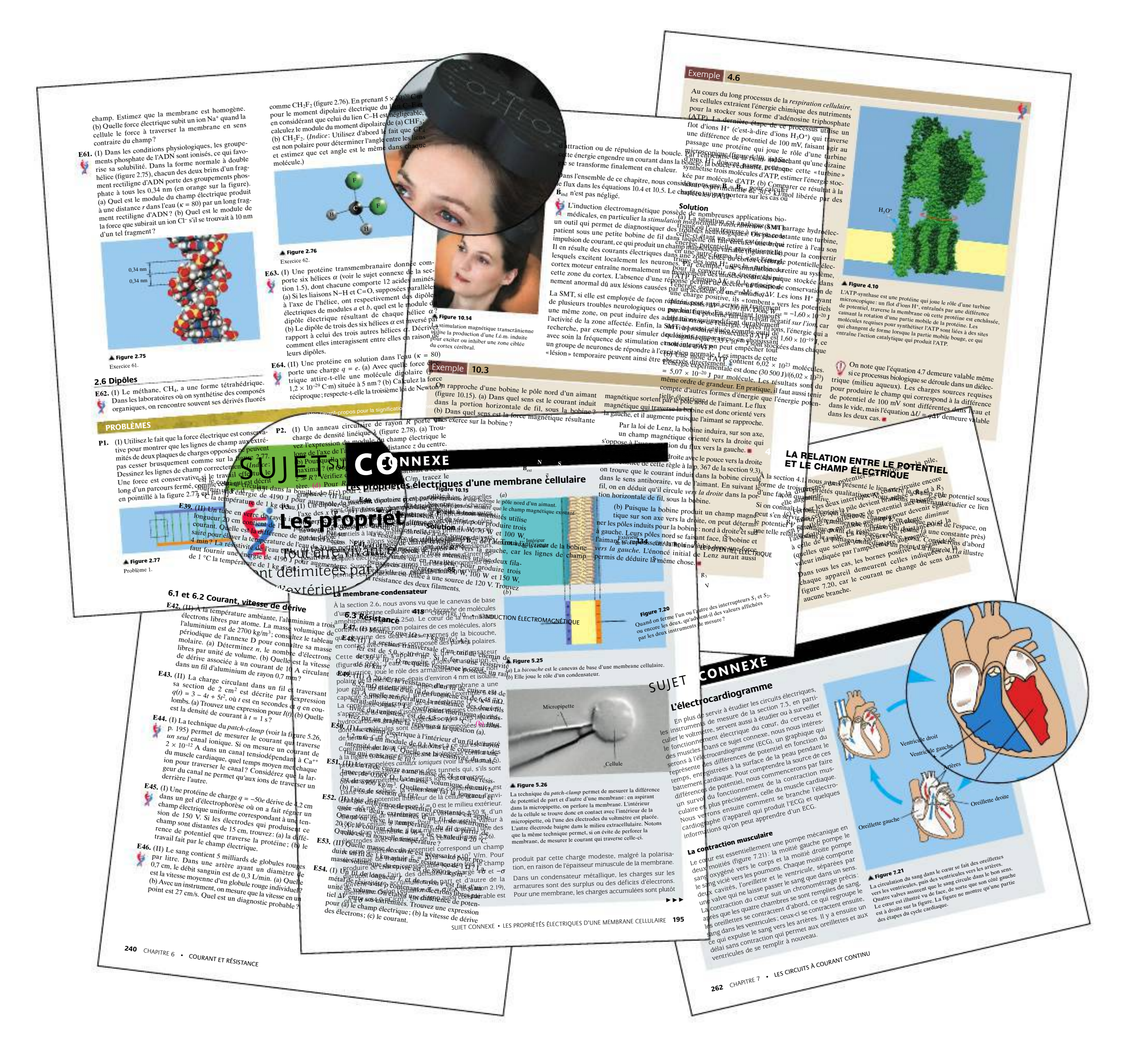
Ayant à cœur de rester au diapason des besoins des étudiants d'aujourd'hui, les auteurs-adaptateurs de la cinquième édition ont innové en plusieurs points, tant sur le plan du contenu que de la facture visuelle. Les pages suivantes présentent en détail ces nouveautés ainsi que l'ensemble des aides pédagogiques de l'ouvrage. Nous espérons que vous aurez du plaisir à les découvrir et nous formulons le vœu que ce manuel participe à l'enrichissement et au succès des étudiants.

Les auteurs-adaptateurs de la 5e édition
Mathieu Lachance, cégep de l'Outaouais
Benoît Villeneuve, cégep Édouard-Montpetit
Marc Séguin, collège de Maisonneuve
Janvier 2015

Nouveautés de la 5e édition

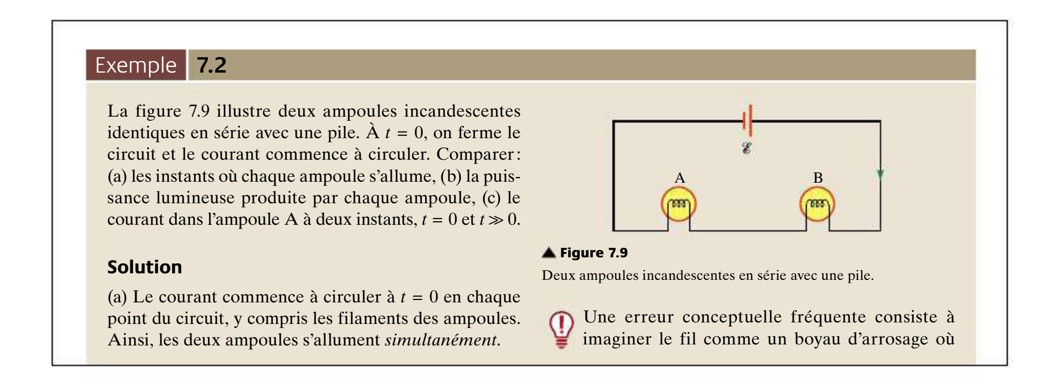
Des applications de la physique aux sciences de la vie

Désormais, plus de 250 applications, le tiers dans chaque tome, mettent en valeur la pertinence et l'importance de la physique dans divers domaines des sciences de la vie et de la santé. Facilement repérables grâce à l'icône, ces applications prennent plusieurs formes : quelques dizaines sont des passages intégrés directement au texte principal ; plus d'une centaine constituent de nouveaux exemples résolus ou de nouveaux exercices à la fin des chapitres ; quelques-unes sont de nouveaux sujets connexes. Celles du tome 2 traitent notamment des propriétés *RC* des membranes cellulaires, du fonctionnement de plusieurs protéines, de la contraction musculaire et de plusieurs thèmes en électrophysiologie.



Un texte qui cible les erreurs conceptuelles fréquentes

Comme la recherche en didactique le montre, la plupart des étudiants commencent leurs études en physique avec un esprit encombré de fausses conceptions graves, qu'il s'agisse de leur propre version des lois du mouvement, de leur représentation de l'écoulement du courant électrique dans un fil ou de la nature de la lumière, pour ne nommer que ces cas. Grâce à de nouvelles figures ou de nouveaux exemples bien choisis, les erreurs conceptuelles les plus fréquentes sont confrontées au raisonnement adéquat, ce qui permet aux étudiants de remettre en question leurs conceptions.


Exemple 7.2

La figure 7.9 illustre deux ampoules incandescentes identiques en série avec une pile. À $t = 0$, on ferme le circuit et le courant commence à circuler. Comparer: (a) les instants où chaque ampoule s'allume, (b) la puissance lumineuse produite par chaque ampoule, (c) le courant dans l'ampoule A à deux instants, $t = 0$ et $t \gg 0$.

Solution

(a) Le courant commence à circuler à $t = 0$ en chaque point du circuit, y compris les filaments des ampoules. Ainsi, les deux ampoules s'allument *simultanément*.

▲ **Figure 7.9**
Deux ampoules incandescentes en série avec une pile.

Une erreur conceptuelle fréquente consiste à imaginer le fil comme un boyau d'arrosage où

Des pages titres renouvelées

Désormais, une image grand format mettant en scène un concept physique dans un contexte quotidien donne le ton au début de chacun des chapitres. La légende, conçue pour être lue en premier, pique la curiosité du lecteur et fait le pont entre l'image et le texte du chapitre. Le sommaire présente en un coup d'œil le contenu du chapitre.


CHAPITRE 12

LES CIRCUITS ALIMENTÉS EN COURANT ALTERNATIF

◀ Cette console fournit au moins trois exemples de rôles que peuvent jouer des circuits alimentés en courant alternatif. 1) Elle est reliée à une prise murale qui l'alimente en courant alternatif. 2) Elle contient plusieurs transformateurs. 3) Enfin, elle contient plusieurs circuits filtres, dont la fréquence de résonance est ajustable, permettant par exemple d'accentuer seulement les fréquences basses de la musique. Ce sont des circuits de ce genre que nous étudierons dans ce chapitre.

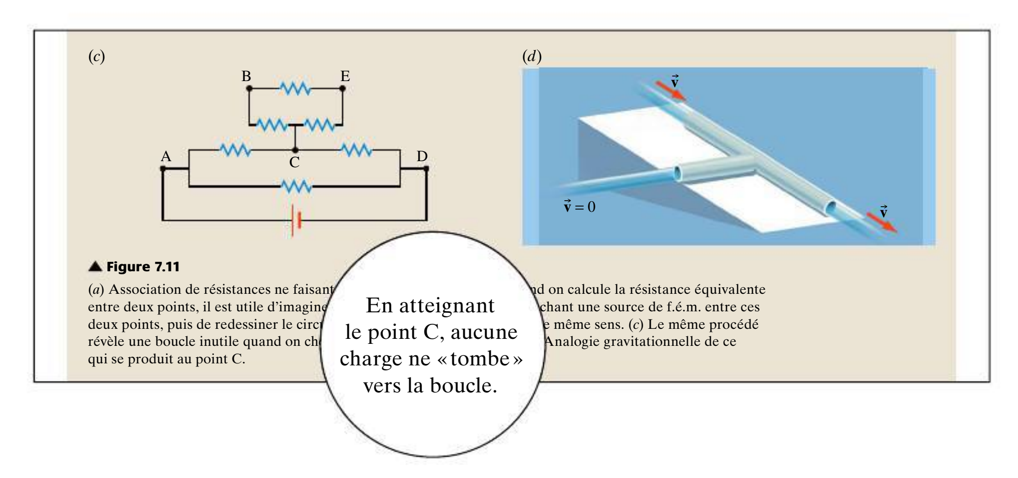
Au chapitre 7, nous n'avons parlé que des circuits alimentés en **courant continu** (c.c.), dans lesquels le courant circule toujours dans le même sens, qu'il soit constant ou variable dans le temps. Pourtant, de nombreuses sources de courant produisent du **courant alternatif** (c.a.), qui change de sens périodiquement (et est donc nécessairement variable dans le temps). Par exemple, le générateur c.a. étudié à la section 10.4 est utilisé notamment dans les centrales électriques et les alternateurs d'automobiles. Tout instrument ou appareil électrique que l'on branche dans une prise murale est alimenté en courant alternatif par une source de f.é.m. L'émission et la réception des signaux de radio et de télévision font intervenir des courants qui varient sinusoïdalement dans le temps. Un microphone enregistre le son d'abord sous la forme d'un courant c.a. qui peut ensuite être converti en signal numérique. De même, dans les systèmes audio ou vidéo numériques comme le iPod ou les lecteurs de DVD, le signal numérique est éventuellement converti en un courant c.a. pour produire le son.

Nous allons dans ce chapitre étudier la réponse des résistances, des bobines d'induction et des condensateurs à une f.é.m. alternative. Nous considérerons

SOMMAIRE

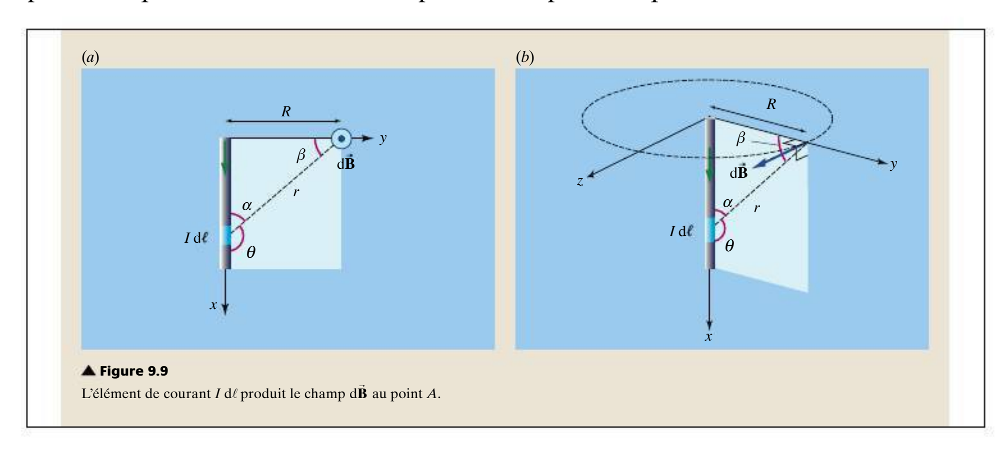
De nouvelles figures illustrant les concepts difficiles

Bien des concepts difficiles à saisir sont désormais rendus plus accessibles grâce à des figures qui permettent de mieux les appréhender. L'utilité de la notion de bras de levier ou le raisonnement géométrique qui conduit à $\delta = d \sin \theta$ dans l'expérience de Young, pour ne nommer que ces deux cas, peuvent maintenant être compris d'un simple coup d'œil. Plusieurs des nouvelles figures de la 5e édition servent cette nouvelle fin.



Des passages clés revus et bonifiés

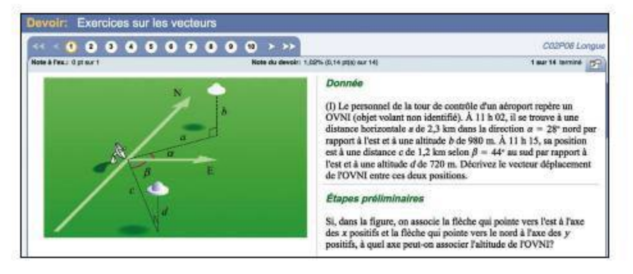
Dans chaque tome, nous avons ciblé des sections susceptibles d'être améliorées sensiblement par rapport à l'édition précédente. Ainsi, dans le tome 2, on compare maintenant dans le chapitre 2 le comportement de conducteurs dans un champ avec celui d'isolants dans un champ. Nous avons terminé la refonte complète du chapitre 4 qui avait été commencée à la dernière édition. Ce chapitre bénéficie aussi de nombreux exemples supplémentaires. La cause physique du courant, au chapitre 6, est maintenant formulée à la fois en termes de différence de potentiel et en termes de champ électrique. Au chapitre 9, nous avons ajouté une méthode de résolution et des exemples illustrant l'application de la loi de Biot-Savart. La section 10.5 présente qualitativement le concept de champ électrique induit.

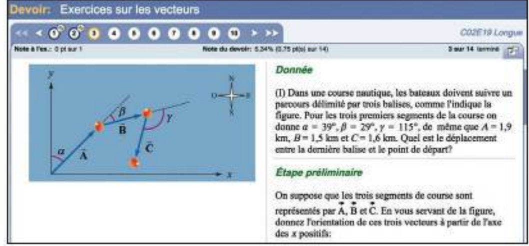


MonLab | xL

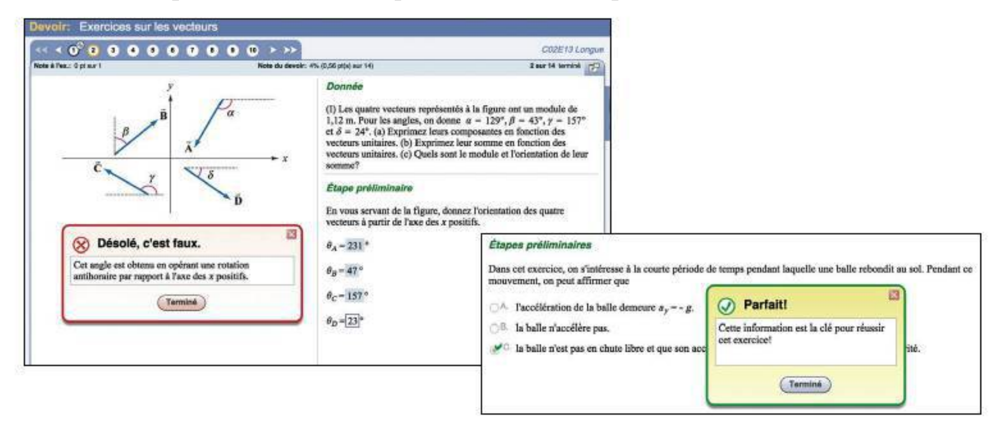
L'ouvrage entre de plain-pied dans le siècle du numérique grâce à MonLab | xL, une plate-forme d'exercices interactifs en ligne. Les étudiants peuvent y faire près d'un millier d'exercices. La version courte de ces exercices se limite à l'énoncé du manuel, alors que la version longue propose des étapes intermédiaires, qui aident à la compréhension. Les étudiants peuvent aussi y répondre à de nombreuses questions conceptuelles.

À chaque exercice, le logiciel génère aléatoirement des valeurs numériques. Lorsqu'un exercice est terminé, MonLab | xL modifie les données numériques de l'énoncé, de sorte que l'étudiant peut reprendre l'exercice et vérifier son degré de compréhension. En groupe, les valeurs que propose MonLab | xL diffèrent d'un étudiant à l'autre. Ainsi, l'enseignant peut utiliser la plate-forme pour concevoir des examens à correction automatique.

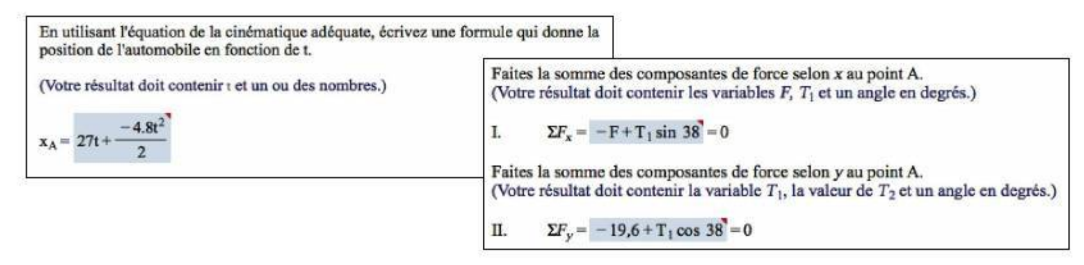




En travaillant avec MonLab | xL, les étudiants obtiennent une rétroaction instantanée, mais qui varie selon la réponse donnée, ce qui favorise leur autonomie.



Dans MonLab | xL, on trouve des questions à choix multiples ou encore des questions pour lesquelles la réponse est un nombre, du texte ou même une équation.



DES OUTILS PÉDAGOGIQUES ÉPROUVÉS

Voici d'autres moyens mis en œuvre pour faciliter la progression de l'étudiant et lui permettre d'assimiler le contenu du cours. Ces moyens ont su faire la force des éditions précédentes.

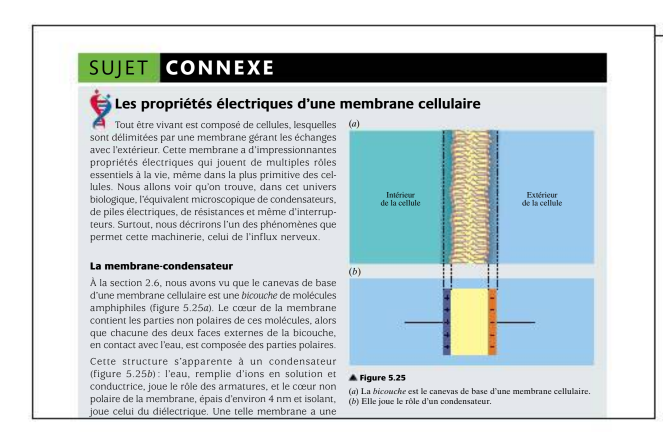
Deux pistes de lecture

Le *texte de base* est en noir, tandis que le *texte facultatif* est en bleu. Le découpage entre ces deux pistes de lecture permet d'omettre les passages facultatifs sans qu'il y ait rupture dans la continuité du texte de base. De plus, les passages facultatifs ne sont jamais un préalable à la compréhension du texte de base des chapitres suivants. Précisons que le texte en bleu n'est pas forcément plus difficile.

Cette situation ne peut s'expliquer que si on utilise à nouveau un modèle « en deux étapes » où une source produit un champ et une cible subit la force exercée par ce champ. La nouveauté, cette fois, est que la source de ce nouveau type de champ *est un autre champ* et non pas une charge ou une charge en mouvement : 1) la source, un champ magnétique variable, produit un **champ électrique induit** $\vec{\mathbf{E}}$; 2) le champ électrique induit produit une force $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}$ sur toute charge cible q (figure 10.30*b*).

Sur le plan quantitatif, l'explication que nous venons de donner équivaut à postuler que la *seule* force que peut subir une charge est celle, donnée par l'équation 8.14, exercée par les champs électrique et magnétique, soit

$$\vec{\mathbf{F}} = q(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) \qquad (10.8)$$


SUJET CONNEXE

Les propriétés électriques d'une membrane cellulaire

Tout être vivant est composé de cellules, lesquelles sont délimitées par une membrane gérant les échanges avec l'extérieur. Cette membrane a d'impressionnantes propriétés électriques qui jouent de multiples rôles essentiels à la vie, même dans la plus primitive des cellules. Nous allons voir qu'on trouve, dans cet univers biologique, l'équivalent microscopique de condensateurs, de piles électriques, de résistances et même d'interrupteurs. Surtout, nous décrirons l'un des phénomènes que permet cette machinerie, celui de l'influx nerveux.

La membrane-condensateur

À la section 2.6, nous avons vu que le canevas de base d'une membrane cellulaire est une *bicouche* de molécules amphiphiles (figure 5.25*a*). Le cœur de la membrane contient les parties non polaires de ces molécules, alors que chacune des deux faces externes de la bicouche, en contact avec l'eau, est composée des parties polaires.

Cette structure s'apparente à un condensateur (figure 5.25*b*) : l'eau, remplie d'ions en solution et conductrice, joue le rôle des armatures, et le cœur non polaire de la membrane, épais d'environ 4 nm et isolant, joue celui du diélectrique. Une telle membrane a une

▲ Figure 5.25
(*a*) La *bicouche* est le canevas de base d'une membrane cellulaire.
(*b*) Elle joue le rôle d'un condensateur.

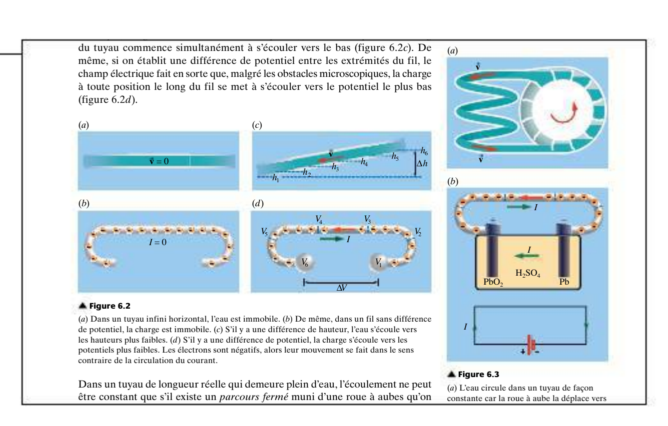
Sujets connexes

Les encadrés « Sujet connexe » portent sur des phénomènes ou des applications remarquables se rapportant au contenu de la section. Chacun ne fait que quelques pages, mais peut jouer le rôle d'une amorce : l'étudiant y apprend souvent l'existence du sujet et dispose après sa lecture de repères solides pour conduire une recherche plus poussée, par exemple sur Internet.

Une nouveauté dans cette 5e édition : plusieurs nouveaux sujets connexes font partie des nouvelles applications de la physique aux sciences de la vie. Ceux du tome 2 portent sur la conformation des protéines, l'influx nerveux et l'électrocardiogramme

Des explications qualitatives

Nous avons évité de donner à cet ouvrage l'apparence d'une « liste de formules ». Seules les équations fondamentales sont surlignées (en vert) dans le texte, et l'ouvrage fait une place importante à la description qualitative des phénomènes (texte et figures), avant chaque mise en équation. Cette approche signale à l'étudiant que la physique ne saurait se réduire aux mathématiques.


du tuyau commence simultanément à s'écouler vers le bas (figure 6.2*c*). De même, si on établit une différence de potentiel entre les extrémités du fil, le champ électrique fait en sorte que, malgré les obstacles microscopiques, la charge à toute position le long du fil se met à s'écouler vers le potentiel le plus bas (figure 6.2*d*).

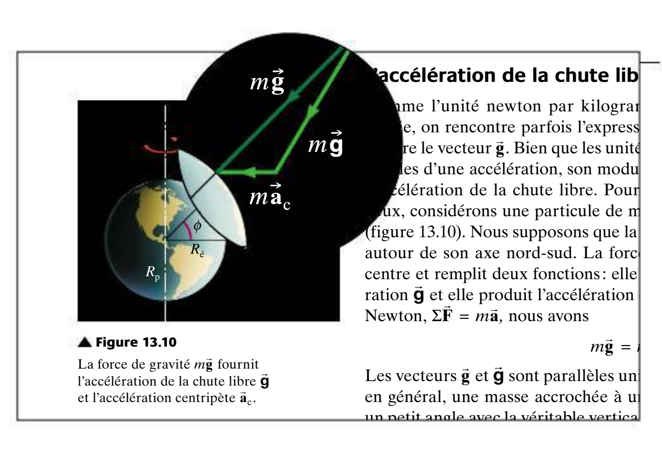
▲ Figure 6.2
(*a*) Dans un tuyau infini horizontal, l'eau est immobile. (*b*) De même, dans un fil sans différence de potentiel, la charge est immobile. (*c*) S'il y a une différence de hauteur, l'eau s'écoule vers les hauteurs plus faibles. (*d*) S'il y a une différence de potentiel, la charge s'écoule vers les potentiels plus faibles. Les électrons sont négatifs, alors leur mouvement se fait dans le sens contraire de la circulation du courant.

Dans un tuyau de longueur réelle qui demeure plein d'eau, l'écoulement ne peut être constant que s'il existe un *parcours fermé* muni d'une roue à aubes qu'on

▲ Figure 6.3
(*a*) L'eau circule dans un tuyau de façon constante car la roue à aube la déplace vers

Une physique en constante évolution

Ce manuel se distingue par le fait qu'on évite d'y présenter les résultats de la physique comme des vérités absolues. Comme toutes les sciences, la physique évolue constamment pour expliquer de nouveaux résultats expérimentaux. Les termes utilisés dans cet ouvrage ont été soigneusement choisis pour projeter l'image d'une physique construite à partir des observations, d'une physique qui évolue.

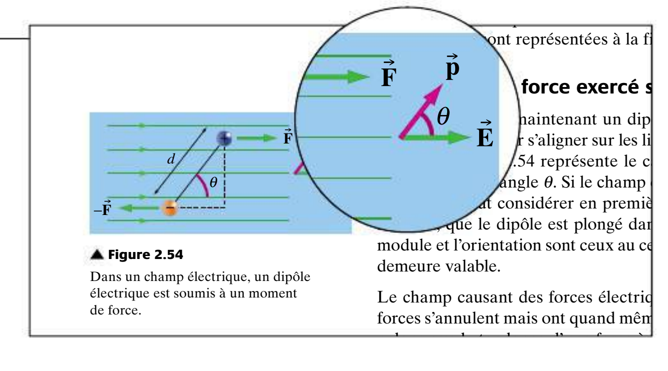


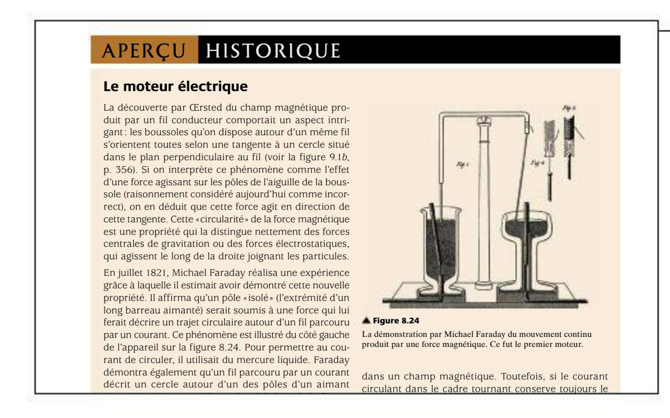
Rigueur de la présentation

Notre premier objectif a été l'exactitude et la clarté. Nous espérons que le texte ne donne prise à aucune conception erronée. Dans plusieurs sections facultatives, nous nous sommes efforcés de couvrir convenablement des sujets souvent négligés. Une attention particulière a été accordée aux conventions de signes. Une distinction nette a été tracée entre la f.é.m. et la différence de potentiel, des symboles différents ont été attribués à l'accélération gravitationnelle et au champ gravitationnel, etc.

Une présentation unique pour chaque grandeur vectorielle

Les grandeurs physiques principales sont systématiquement associées à une couleur qui leur est propre tout au long de l'ouvrage. Une couleur différente est utilisée pour chaque type de force et pour chaque grandeur en cinématique. Une flèche double est utilisée pour l'accélération afin de la distinguer des forces sur les diagrammes de forces.





APERÇU HISTORIQUE

Le moteur électrique

La découverte par Œrsted du champ magnétique produit par un fil conducteur comportait un aspect intrigant : les boussoles qu'on dispose autour d'un même fil s'orientent toutes selon une tangente à un cercle situé dans le plan perpendiculaire au fil (voir la figure 9.1*b*, p. 356). Si on interprète ce phénomène comme l'effet d'une force agissant sur les pôles de l'aiguille de la boussole (raisonnement considéré aujourd'hui comme incorrect), on en déduit que cette force agit en direction de cette tangente. Cette «circularité» de la force magnétique est une propriété qui la distingue nettement des forces centrales de gravitation ou des forces électrostatiques, qui agissent le long de la droite joignant les particules.

En juillet 1821, Michael Faraday réalisa une expérience grâce à laquelle il estimait avoir démontré cette nouvelle propriété. Il affirma qu'un pôle «isolé» (l'extrémité d'un long barreau aimanté) serait soumis à une force qui lui ferait décrire un trajet circulaire autour d'un fil parcouru par un courant. Ce phénomène est illustré du côté gauche de l'appareil sur la figure 8.24. Pour permettre au courant de circuler, il utilisait du mercure liquide. Faraday démontra également qu'un fil parcouru par un courant décrit un cercle autour d'un des pôles d'un aimant

▲ Figure 8.24

La démonstration par Michael Faraday du mouvement continu produit par une force magnétique. Ce fut le premier moteur.

dans un champ magnétique. Toutefois, si le courant circulant dans le cadre tournant conserve toujours le

Une dimension historique omniprésente

Cet ouvrage se distingue aussi par son contenu historique, qui a été, autant que possible, intégré à même le texte principal. Les encadrés « Aperçu historique » présentent à l'occasion des exposés plus approfondis sur des sujets d'importance. Présente dans chacun des chapitres, l'information historique participe à notre présentation de la physique en tant qu'ensemble de savoirs construits, en évolution. Elle suggère que les savoirs aujourd'hui acceptés comme valables seront peut-être, eux aussi, remis en question dans le futur.

L'information historique joue un rôle supplémentaire : elle complète la présentation des erreurs conceptuelles fréquentes en montrant comment elles ont jadis été faites et par quel cheminement elles ont été écartées. Elle montre aussi aux étudiants que les choses peuvent demeurer longtemps embrouillées, même pour les plus grands esprits, avant qu'un consensus ne se dégage.

Concision du style

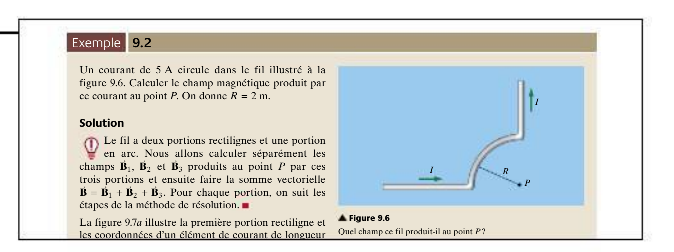
Sans sacrifier la qualité et la précision des explications, nous nous sommes efforcés de rédiger cet ouvrage dans un style simple, clair et concis, aussi bien sur le plan du texte que sur celui des calculs et de la notation mathématique. Les répétitions ont été limitées. Nous avons évité de donner de multiples versions d'une même équation ou de surligner un grand nombre d'équations. L'accent est plutôt mis sur les concepts fondamentaux.

LES AIDES PÉDAGOGIQUES

Nous présentons enfin les diverses rubriques de soutien à l'apprentissage présentes dans les chapitres.

Exemples

Ce manuel comporte de nombreux exemples résolus dont le degré de difficulté correspond autant à celui des problèmes les plus difficiles qu'à celui des exercices. À l'occasion, l'étudiant est averti des pièges ou des difficultés qu'il risque de rencontrer (mauvais départ, racines non physiques, données sans intérêt, difficultés liées à la notation, etc.). Dans les solutions des exemples, l'icône signale les passages qui contiennent des conseils importants ou qui soulignent certaines subtilités.


Exemple 9.2

Un courant de 5 A circule dans le fil illustré à la figure 9.6. Calculer le champ magnétique produit par ce courant au point P. On donne $R = 2$ m.

Solution

Le fil a deux portions rectilignes et une portion en arc. Nous allons calculer séparément les champs $\vec{\mathbf{B}}_1$, $\vec{\mathbf{B}}_2$ et $\vec{\mathbf{B}}_3$ produits au point P par ces trois portions et ensuite faire la somme vectorielle $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_1 + \vec{\mathbf{B}}_2 + \vec{\mathbf{B}}_3$. Pour chaque portion, on suit les étapes de la méthode de résolution. ■

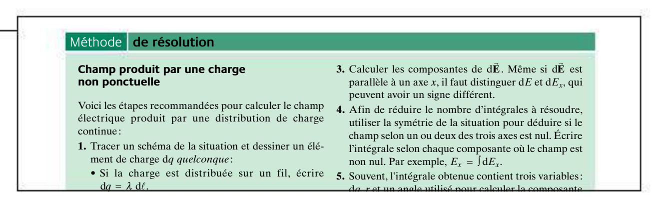
La figure 9.7*a* illustre la première portion rectiligne et les coordonnées d'un élément de courant de longueur

▲ **Figure 9.6**
Quel champ ce fil produit-il au point P ?

Une nouveauté dans cette 5e édition: quelques dizaines d'exemples ont été ajoutés à des endroits stratégiques dans les trois tomes, 25 d'entre eux dans les chapitres importants du tome 2.

Méthodes de résolution

Même si nous avons accordé beaucoup d'importance aux aspects conceptuels, l'acquisition de procédures de travail applicables à certains types de situations demeure un objectif important de tout cours de physique. Nous avons donné tout au long du manuel des méthodes de résolution de problèmes suivant une approche par étapes.


Méthode de résolution

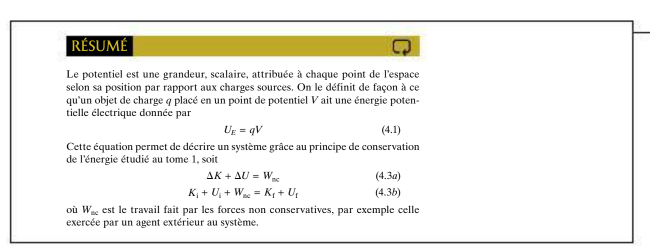
Champ produit par une charge non ponctuelle

Voici les étapes recommandées pour calculer le champ électrique produit par une distribution de charge continue:

1. Tracer un schéma de la situation et dessiner un élément de charge dq *quelconque*:
   - Si la charge est distribuée sur un fil, écrire $dq = \lambda\, d\ell$.

3. Calculer les composantes de $d\vec{\mathbf{E}}$. Même si $d\vec{\mathbf{E}}$ est parallèle à un axe x, il faut distinguer dE et dE_x, qui peuvent avoir un signe différent.
4. Afin de réduire le nombre d'intégrales à résoudre, utiliser la symétrie de la situation pour déduire si le champ selon un ou deux des trois axes est nul. Écrire l'intégrale selon chaque composante où le champ est non nul. Par exemple, $E_x = \int dE_x$.
5. Souvent, l'intégrale obtenue contient trois variables: dq, r et un angle utilisé pour calculer la composante

Une nouveauté dans cette 5e édition: plusieurs encadrés « Méthode de résolution » ont été ajoutés, en particulier quand une technique mathématique difficile était en jeu.


RÉSUMÉ

Le potentiel est une grandeur, scalaire, attribuée à chaque point de l'espace selon sa position par rapport aux charges sources. On le définit de façon à ce qu'un objet de charge q placé en un point de potentiel V ait une énergie potentielle électrique donnée par

$$U_E = qV \qquad (4.1)$$

Cette équation permet de décrire un système grâce au principe de conservation de l'énergie étudié au tome 1, soit

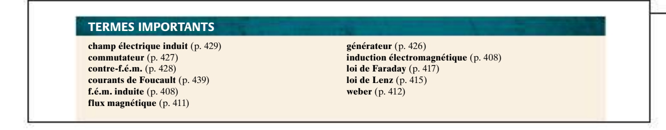
$$\Delta K + \Delta U = W_{nc} \qquad (4.3a)$$

$$K_i + U_i + W_{nc} = K_f + U_f \qquad (4.3b)$$

où W_{nc} est le travail fait par les forces non conservatives, par exemple celle exercée par un agent extérieur au système.

Résumé

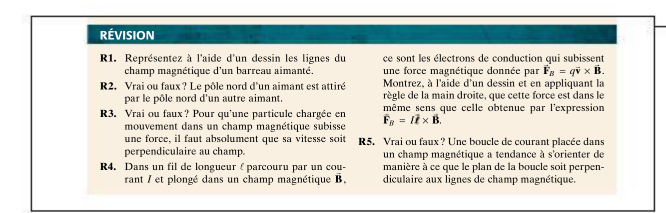
Le résumé du chapitre rappelle brièvement les notions et principes essentiels et reprend les équations les plus importantes, celles qui sont surlignées en vert dans le chapitre. Ces équations ont la même numérotation dans le résumé et dans le texte, ce qui permet de les retrouver facilement au besoin.


TERMES IMPORTANTS

champ électrique induit (p. 429)
commutateur (p. 427)
contre-f.é.m. (p. 428)
courants de Foucault (p. 439)
f.é.m. induite (p. 408)
flux magnétique (p. 411)
générateur (p. 426)
induction électromagnétique (p. 408)
loi de Faraday (p. 417)
loi de Lenz (p. 415)
weber (p. 412)

Termes importants

Les termes en gras du texte principal sont réunis et présentés alphabétiquement dans une liste placée immédiatement après le résumé du chapitre. Le professeur peut utiliser cette liste pour choisir des termes dont la définition pourrait être demandée à l'étudiant au cours d'un contrôle. Chaque terme important est accompagné d'un renvoi à la page où il est défini dans le chapitre.



RÉVISION

R1. Représentez à l'aide d'un dessin les lignes du champ magnétique d'un barreau aimanté.

R2. Vrai ou faux ? Le pôle nord d'un aimant est attiré par le pôle nord d'un autre aimant.

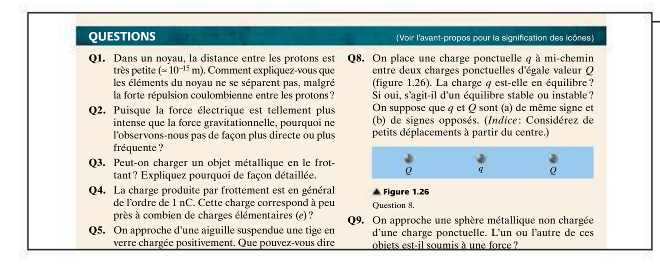
R3. Vrai ou faux ? Pour qu'une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique subisse une force, il faut absolument que sa vitesse soit perpendiculaire au champ.

R4. Dans un fil de longueur ℓ parcouru par un courant I et plongé dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$, ce sont les électrons de conduction qui subissent une force magnétique donnée par $\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$. Montrez, à l'aide d'un dessin et en appliquant la règle de la main droite, que cette force est dans le même sens que celle obtenue par l'expression $\vec{\mathbf{F}}_B = I\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\mathbf{B}}$.

R5. Vrai ou faux ? Une boucle de courant placée dans un champ magnétique a tendance à s'orienter de manière à ce que le plan de la boucle soit perpendiculaire aux lignes de champ magnétique.

Révision

Une série de points de révision précède la liste de questions. L'étudiant trouvera les réponses directement dans le chapitre, sans avoir à faire de calculs ou à chercher de l'information complémentaire dans d'autres sources. Les points de révision sont présentés dans l'ordre où ils sont traités dans le chapitre.



QUESTIONS (Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

Q1. Dans un noyau, la distance entre les protons est très petite ($\approx 10^{-15}$ m). Comment expliquez-vous que les éléments du noyau ne se séparent pas, malgré la forte répulsion coulombienne entre les protons ?

Q2. Puisque la force électrique est tellement plus intense que la force gravitationnelle, pourquoi ne l'observons-nous pas de façon plus directe ou plus fréquente ?

Q3. Peut-on charger un objet métallique en le frottant ? Expliquez pourquoi de façon détaillée.

Q4. La charge produite par frottement est en général de l'ordre de 1 nC. Cette charge correspond à peu près à combien de charges élémentaires (e) ?

Q5. On approche d'une aiguille suspendue une tige en verre chargée positivement. Que pouvez-vous dire

Q8. On place une charge ponctuelle q à mi-chemin entre deux charges ponctuelles d'égale valeur Q (figure 1.26). La charge q est-elle en équilibre ? Si oui, s'agit-il d'un équilibre stable ou instable ? On suppose que q et Q sont (a) de même signe et (b) de signes opposés. (*Indice* : Considérez de petits déplacements à partir du centre.)

▲ **Figure 1.26**
Question 8.

Q9. On approche une sphère métallique non chargée d'une charge ponctuelle. L'un ou l'autre de ces objets est-il soumis à une force ?

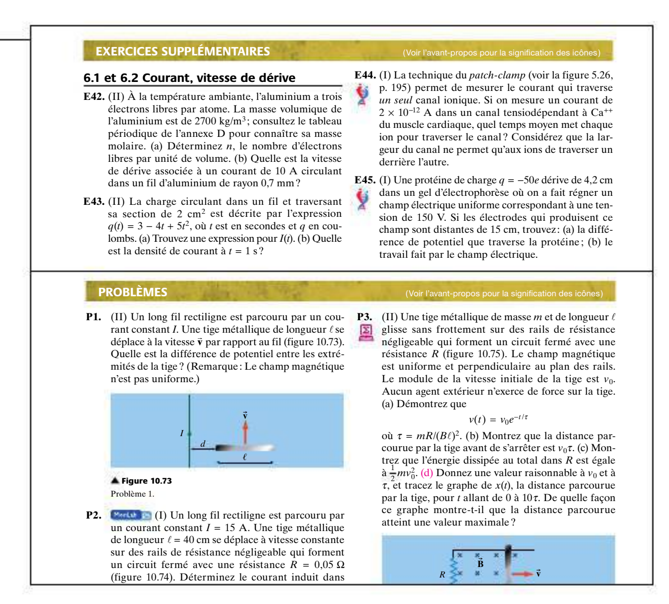
Questions

Les questions traitent des aspects conceptuels de la matière du chapitre : l'étudiant doit en général pouvoir y répondre sans faire de calculs. Nous avons tenu à présenter tout un éventail de niveaux de difficulté, ce qui montre que la physique peut poser autant de défis conceptuels que mathématiques.

Exercices et problèmes

Chaque exercice porte sur une section donnée du chapitre, alors que les problèmes ont une portée plus générale. Pour aider les étudiants et les professeurs dans le choix des exercices et des problèmes, nous leur avons attribué un degré de difficulté (I ou II). Les réponses à tous les exercices et problèmes figurent à la fin du livre.

Les exercices et les problèmes qui mettent en scène une situation pertinente dans une des sciences de la vie sont signalés par l'icône . Ceux qui peuvent être résolus (entièrement ou partiellement) à l'aide d'une calculatrice graphique ou d'un logiciel de calcul symbolique sont signalés par l'icône . Lorsque tout l'exercice (ou le problème) est visé, le numéro de l'exercice est de couleur fuchsia ; s'il s'agit seulement d'une partie de l'exercice, c'est la lettre de la question en cause qui est de cette couleur. Le solutionnaire en ligne donne les lignes de commande qui permettent d'obtenir, avec le logiciel Maple, le résultat recherché.



EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES (Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

6.1 et 6.2 Courant, vitesse de dérive

E42. (II) À la température ambiante, l'aluminium a trois électrons libres par atome. La masse volumique de l'aluminium est de 2700 kg/m^3 ; consultez le tableau périodique de l'annexe D pour connaître sa masse molaire. (a) Déterminez n, le nombre d'électrons libres par unité de volume. (b) Quelle est la vitesse de dérive associée à un courant de 10 A circulant dans un fil d'aluminium de rayon 0,7 mm ?

E43. (II) La charge circulant dans un fil et traversant sa section de 2 cm^2 est décrite par l'expression $q(t) = 3 - 4t + 5t^2$, où t est en secondes et q en coulombs. (a) Trouvez une expression pour $I(t)$. (b) Quelle est la densité de courant à $t = 1$ s ?

E44. (I) La technique du *patch-clamp* (voir la figure 5.26, p. 195) permet de mesurer le courant qui traverse *un seul* canal ionique. Si on mesure un courant de 2×10^{-12} A dans un canal tensiodépendant à Ca^{++} du muscle cardiaque, quel temps moyen met chaque ion pour traverser le canal ? Considérez que la largeur du canal ne permet qu'aux ions de traverser un derrière l'autre.

E45. (I) Une protéine de charge $q = -50e$ dérive de 4,2 cm dans un gel d'électrophorèse où on a fait régner un champ électrique uniforme correspondant à une tension de 150 V. Si les électrodes qui produisent ce champ sont distantes de 15 cm, trouvez : (a) la différence de potentiel que traverse la protéine ; (b) le travail fait par le champ électrique.

PROBLÈMES (Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

P1. (II) Un long fil rectiligne est parcouru par un courant constant I. Une tige métallique de longueur ℓ se déplace à la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ par rapport au fil (figure 10.73). Quelle est la différence de potentiel entre les extrémités de la tige ? (Remarque : Le champ magnétique n'est pas uniforme.)

▲ **Figure 10.73**
Problème 1.

P2. MonLab (I) Un long fil rectiligne est parcouru par un courant constant $I = 15$ A. Une tige métallique de longueur $\ell = 40$ cm se déplace à vitesse constante sur des rails de résistance négligeable qui forment un circuit fermé avec une résistance $R = 0{,}05\ \Omega$ (figure 10.74). Déterminez le courant induit dans

P3. (II) Une tige métallique de masse m et de longueur ℓ glisse sans frottement sur des rails de résistance négligeable qui forment un circuit fermé avec une résistance R (figure 10.75). Le champ magnétique est uniforme et perpendiculaire au plan des rails. Le module de la vitesse initiale de la tige est v_0. Aucun agent extérieur n'exerce de force sur la tige. (a) Démontrez que

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$

où $\tau = mR/(B\ell)^2$. (b) Montrez que la distance parcourue par la tige avant de s'arrêter est $v_0\tau$. (c) Montrez que l'énergie dissipée au total dans R est égale à $\frac{1}{2}mv_0^2$. (d) Donnez une valeur raisonnable à v_0 et à τ, et tracez le graphe de $x(t)$, la distance parcourue par la tige, pour t allant de 0 à 10τ. De quelle façon ce graphe montre-t-il que la distance parcourue atteint une valeur maximale ?

Une nouveauté dans cette 5e édition : une centaine d'exercices ou de problèmes ont été ajoutés dans les trois tomes.

Outils Web

Les outils Web des éditions précédentes sont maintenant présents dans la plateforme MonLab | Documents. On peut y trouver les capsules *Clip physique*, c'est-à-dire quelque 300 exercices et problèmes résolus sous forme de courtes capsules vidéo, où on entend un enseignant expliquer la démarche qu'il applique. On y trouve aussi les simulations interactives *Physique animée*.

Remerciements

Remerciements de Harris Benson dans l'édition originale

Une quarantaine de professeurs ont agi à titre de réviseurs et nous ont fait part de leurs remarques et suggestions. Leur contribution a énormément ajouté à la qualité du manuscrit. Tous ont fait preuve d'une grande compréhension des besoins des étudiants, et nous leur sommes infiniment reconnaissant de leur aide et de leurs conseils.

Nous avons eu la chance de pouvoir consulter Stephen G. Brush, historien des sciences de renom, qui nous a fait de nombreuses suggestions concernant les questions d'histoire des sciences ; seules quelques-unes ont pu être abordées. De même, Kenneth W. Ford, physicien et auteur, nous a donné des conseils précieux sur des questions de pédagogie et de physique. Nous lui sommes reconnaissant de l'intérêt qu'il a manifesté envers ce projet et de ses encouragements.

Nous voulons exprimer notre gratitude envers nos collègues pour le soutien qu'ils nous ont apporté. Nous tenons à remercier Luong Nguyen, qui nous a encouragé dès le début. Avec David Stephen et Paul Antaki, il nous a fourni une abondante documentation de référence. Nous avons aussi tiré profit de nos discussions avec Michael Cowan et Jack Burnett.

Enfin, nous devons beaucoup à notre femme, Frances, et à nos enfants, Coleman et Emily. Nous n'aurions jamais pu terminer ce livre sans la patience, l'amour et la tolérance dont ils ont fait preuve pendant des années. À l'avenir, le temps passé avec eux ne sera plus aussi mesuré.

Nous espérons que, grâce à cet ouvrage, les étudiants feront de la physique avec intérêt et plaisir.

Harris Benson, cégep Vanier

Remerciements des adaptateurs de la 5e édition

L'évolution constante de cet ouvrage ne saurait être possible sans les nombreux échanges que nous avons avec les lecteurs, notamment avec les professeurs du réseau collégial québécois. Nous vous invitons à poursuivre cette collaboration enrichissante en nous transmettant vos commentaires, suggestions et trouvailles à l'adresse assistance@pearsonerpi.com. Nous serons heureux de poursuivre ainsi ce travail d'amélioration continue qui nous tient tous à cœur.

Nous tenons à remercier toutes les personnes qui ont contribué, par leurs commentaires et leurs suggestions, à améliorer cet ouvrage. Avec les années, tellement de gens ont contribué à nos travaux qu'il devient impossible de tous les nommer. Chacun d'entre eux mérite néanmoins notre gratitude.

Nous tenons particulièrement à remercier les enseignants et les professeurs qui ont participé au sondage de 2012 ainsi que ceux qui ont pris la peine d'écrire ou de téléphoner depuis. Tous ont ainsi permis de guider les travaux de la cinquième édition. Alexandre April, Martin Charest, Josée Labrie, Ivan L'Heureux, Olivier Tardif-Paradis et Jocelyn Plourde n'en sont que quelques-uns.

Nous voudrions aussi souligner le remarquable soutien de l'équipe des Éditions du Renouveau Pédagogique, en particulier Jean-Pierre Albert et Philippe Dubé qui ont mis ce projet sur les rails, Chantal Bordeleau pour son assistance dans la recherche de photos, Martin Tremblay pour cette superbe nouvelle maquette et Sylvain Bournival, pour son suivi méthodique de l'ensemble du projet. Nous ne saurions passer sous silence la contribution de la méticuleuse Marie-Claude Rochon, qui a relu plusieurs fois le manuscrit et les épreuves.

Mathieu Lachance, qui dirige l'équipe des auteurs-adaptateurs depuis la quatrième édition, tient à remercier Benoît Villeneuve et Marc Séguin pour lui avoir permis de prendre la relève de cet imposant projet. Il remercie particulièrement les personnes sans qui ses nouvelles applications de la physique aux sciences de la vie n'auraient jamais été aussi nombreuses et diversifiées, dont ses collègues Luc Fournier, Yves Pelletier et Simon Lespérance. De nombreux spécialistes lui ont fourni du matériel et des idées, en particulier Frédéric Barrette-Pellerin, Karine Deslauriers, Dat Nguyen-Dinh, Pascal Rioux et Angela Scott. Les commentaires des réviseurs, dont les professeurs Mickael Begon, Christian Giguère, Vasek Mezl et Michel Pézolet, ont été précieux. Il remercie aussi Martin Tremblay d'avoir su créer cette géniale icône évoquant à la fois l'ADN et des êtres humains. Enfin, ses pensées les plus importantes vont à sa famille : Eliane, je t'aime et je te remercie de l'appui que tu m'as témoigné pendant ce véritable marathon ; Aubert et Augustine, papa pourra maintenant jouer plus souvent.

Les auteurs-adaptateurs de la 5e édition
Mathieu Lachance, cégep de l'Outaouais
Benoît Villeneuve, cégep Édouard-Montpetit
Marc Séguin, collège de Maisonneuve

Sommaire

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 5

CHAPITRE 6

CHAPITRE 7

CHAPITRE 8

CHAPITRE 9

CHAPITRE 10

CHAPITRE 1

LA FORCE ÉLECTRIQUE



SOMMAIRE



Les phénomènes électrostatiques sont omniprésents dans la vie quotidienne. Dans ce chapitre, nous verrons comment ils peuvent s'expliquer grâce à la *charge électrique*, une propriété qui permet notamment à la matière d'exercer la *force électrique*.

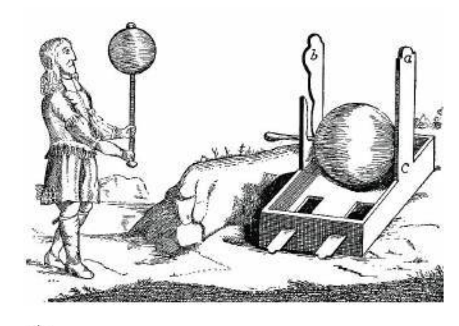
Dans ce tome 2, nous étudierons une nouvelle catégorie de phénomènes physiques. Même s'ils sont moins apparents que les phénomènes mécaniques étudiés dans le tome 1, ils sont pourtant aussi présents dans la vie quotidienne. Notamment, par temps sec, un peigne de plastique que l'on vient de se passer dans les cheveux ou la pellicule de cellophane qu'on vient de dérouler a la faculté d'attirer de petits morceaux de papier ou de dévier le filet d'eau qui coule du robinet, ce qui montre qu'une force est exercée. On peut voir apparaître des étincelles lorsqu'on sépare un drap d'une couverture ou recevoir une décharge électrique si l'on touche une poignée de porte après avoir marché sur un tapis. Si on examine une plinthe chauffante, un grille-pain ou une ampoule de lampe de poche, on constate qu'ils dégagent de la chaleur. Tous ces phénomènes sont *électriques* et seront étudiés dans les sept premiers chapitres de ce tome.

Les premières observations de phénomènes électriques datent de l'Antiquité. Vers 600 av. J.-C., Thalès de Milet (qui vécut du VIIe au VIe siècle av. J.-C. environ) avait en effet remarqué qu'un morceau d'ambre minéral (résine fossilisée) attirait la paille ou des plumes après avoir été *frotté* contre de la laine ou de la

fourrure. Aristote (vers 384-vers 322 av. J.-C.) émit des hypothèses sur la capacité de la gymnote, ou « anguille électrique », à étourdir sa proie et observa que ses décharges électriques pouvaient être ressenties par l'homme. Au IVe siècle de notre ère, les marins italiens connaissaient bien le feu Saint-Elme, un phénomène électrique qui produit une lueur visible au sommet des mâts pendant un orage.

Il ne faudra pas confondre les phénomènes électriques avec les phénomènes *magnétiques*, qui seront étudiés dans les chapitres 8 et 9. L'orientation de l'aiguille d'une boussole, la force qui permet aux aimants de coller sur un réfrigérateur ou le mécanisme qui permet le fonctionnement d'un moteur de perceuse ou de séchoir à cheveux en sont des exemples.

Les premières observations de phénomènes magnétiques remontent elles aussi à l'Antiquité. Au Ier siècle av. J.-C., le poète Lucrèce (98-55 av. J.-C.) décrivait dans ses œuvres la puissance mystérieuse des pierres d'aimant que l'on trouvait dans une région d'Asie Mineure appelée Magnésie. Ces aimants naturels avaient des propriétés différentes de celles de l'ambre, notamment pour deux raisons : aucun frottement n'étant nécessaire, leur effet semblait permanent, et contrairement à l'effet de l'ambre qui semblait plus général, les aimants n'attiraient que les objets en fer. Vers le XIe siècle, les marins chinois et arabes utilisaient des aimants flottants en guise de boussole pour s'orienter.



▲ Figure 1.1

La première machine électrique, réalisée par Otto von Guericke en 1663. Le globe de soufre se chargeait par frottement lorsqu'on posait la main dessus pendant qu'il tournait. Guericke montra qu'une plume chargée pouvait rester suspendue en l'air grâce à la répulsion exercée par le globe.

En 1600, William Gilbert (1554-1603), alors médecin de la reine Elisabeth I, fut le premier à faire une nette distinction entre les phénomènes électriques et magnétiques. Il inventa le terme « électrique », dérivé du mot grec *elektron*, qui désigne l'ambre. Gilbert observa que les effets électriques n'étaient pas particuliers à l'ambre et que bien d'autres substances pouvaient s'électrifier par frottement. La première machine électrique fonctionnant grâce au frottement fut réalisée en 1663 par Otto von Guericke (1602-1686). Avec cette première machine, on électrifiait, en la faisant tourner sur un axe, une boule de soufre sur laquelle on avait déposé la main (figure 1.1). Par la suite, d'autres machines électriques capables de produire de fortes et parfois dangereuses étincelles furent utilisées lors de spectacles donnés en public, surtout à des fins de divertissement.

Deux siècles plus tard, comme nous le verrons aux chapitres 10 à 13, Michael Faraday (1791-1867) et James Clerk Maxwell (1831-1879) montrèrent expérimentalement que les phénomènes électriques et magnétiques pouvaient être reliés. Plutôt que de distinguer deux disciplines scientifiques, on parlait donc désormais d'**électromagnétisme**. À l'exception de la force gravitationnelle, on considère aujourd'hui *toutes* les forces qui se manifestent dans la vie quotidienne comme des phénomènes électromagnétiques : ultimement, la tension dans une corde, le frottement entre des surfaces, la normale qui empêche des surfaces en contact de s'interpénétrer ou la pression d'un gaz dans un tuyau sont tous dus à des forces, électriques ou magnétiques, entre des molécules (voir le chapitre 5 du tome 1). Plusieurs propriétés des matériaux s'expliquent aussi par cette théorie. De plus, la conception des ordinateurs, le fonctionnement des émetteurs radio ou le mode d'enregistrement sur bande magnétique sont des exemples d'applications pratiques de l'électromagnétisme.

Au cours des deux siècles qui ont suivi les premiers travaux de Gilbert, l'électricité et le magnétisme furent toutefois considérés comme des disciplines distinctes. Pour le moment, nous maintiendrons cette distinction et commencerons notre étude par les phénomènes électriques. Dans ce premier chapitre, nous définirons le concept de *charge électrique* et entreprendrons l'étude de

l'**électrostatique**, c'est-à-dire l'étude des phénomènes électriques causés par des charges *au repos*. Cette étude se poursuivra dans les chapitres 2 à 5.

* La maîtrise des phénomènes électriques est fondamentale dans plusieurs domaines du génie, mais aussi dans les domaines de la santé puisque *tous* les processus moléculaires essentiels à la vie reposent sur la force électrique. C'est le cas du plus apparent des phénomènes, la contraction musculaire, jusqu'aux plus discrets, comme la conformation des protéines ou la réaction immédiate d'un ovule lors de la fécondation, en passant par l'influx nerveux. L'électrocardiogramme, l'électroencéphalogramme et la méthode *patch-clamp* sont des exemples de techniques qui permettent de mesurer de tels phénomènes électriques et que nous aurons l'occasion de démystifier dans ce tome.

1.1 LA CHARGE ÉLECTRIQUE

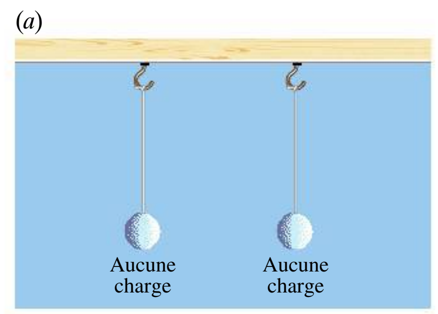
Le plus simple et le plus commun des phénomènes électriques est le suivant : quand on frotte certains matériaux, on réalise ensuite qu'ils peuvent exercer une *force* les uns sur les autres. Dans le tome 1, nous avons vu que Isaac Newton (1642-1727) a expliqué la gravité grâce au concept de masse : tous les objets possédant cette propriété peuvent causer et subir une force gravitationnelle (voir la section 5.3 et le chapitre 13 du tome 1). L'explication que nous donnerons du phénomène électrique que nous venons de décrire est très analogue : tous les objets qui possèdent une propriété appelée la **charge électrique** peuvent causer et subir une **force électrique**. Alors que la masse d'un objet est permanente, la charge de l'objet est ici acquise lors du frottement, par un procédé sur lequel nous reviendrons.

Une expérience simple (figure 1.2) permet d'étudier la force électrique et de conclure qu'on doit faire appel à *deux types de charge* pour en expliquer toutes les manifestations. On commence par suspendre des boules légères recouvertes de divers matériaux (figure 1.2*a*). Ensuite, on frotte ces boules les unes contre les autres. Peu importe le nombre de types de charge, on sait que les boules préparées de la même façon (par exemple, toutes les boules de soie frottées sur du verre) portent forcément le même type de charge. Or, quand on approche l'une de l'autre deux boules identiques préparées de la même façon, quel que soit leur matériau, on observe qu'elles se repoussent (figure 1.2*b*). On en déduit que des charges identiques se repoussent.

Quand on approche l'une de l'autre une boule de verre et une boule de soie (rien ne permet de supposer que leur charge soit de même type), on observe qu'elles s'attirent (figure 1.2*c*), alors que les charges identiques se repoussaient. Cette observation montre que la force électrique ne peut pas s'expliquer grâce à un seul type de charge, puisqu'une même boule a deux comportements possibles, selon la nature de la boule voisine. Il y a donc nécessairement *au moins deux* types de charges. Rien ne permet jusqu'à présent de conclure qu'il n'y en a pas davantage.

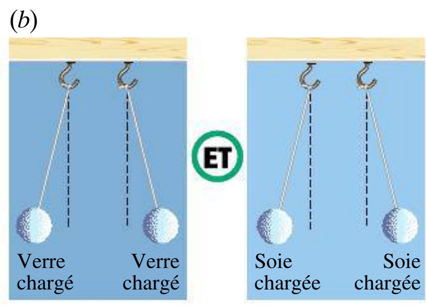
En répétant cette même expérience avec un grand nombre de matériaux différents, on peut se faire une idée générale : chaque matériau chargé se comporte soit comme le verre chargé (il attire la soie chargée et repousse le verre chargé), soit comme la soie chargée (il attire le verre chargé et repousse la soie chargée). Il y a donc *seulement* deux types de charge : celle du verre et celle de la soie.

(*a*)



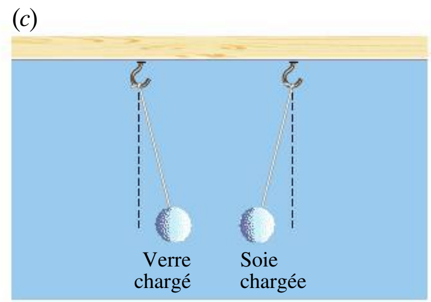
En l'absence de contact préalable avec un objet chargé, on n'observe aucune force électrique.

(*b*)



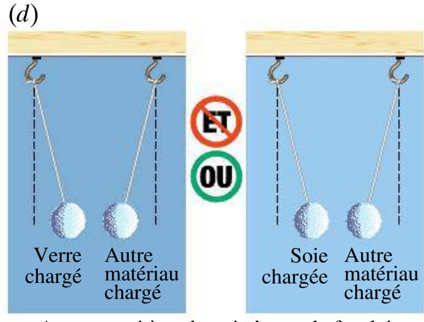
Quand les deux balles sont mises en contact avec le même matériau chargé, elles se repoussent ensuite.

(*c*)



Quand l'une des balles a touché le verre chargé et que l'autre a touché la soie chargée, elles s'attirent ensuite.

(*d*)



Aucun matériau chargé n'ayant la faculté d'attirer *à la fois* la soie chargée et le verre chargé, seulement deux types de charge sont suffisants pour expliquer tous les cas.

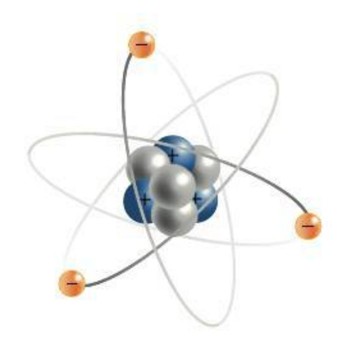
▲ **Figure 1.2**

La force électrique et ses deux sens possibles sont facilement mis en évidence à l'aide de deux boules légères recouvertes de divers matériaux chargés par frottement. Pour expliquer toutes ces observations, deux types de charge (mais seulement deux) sont nécessaires.

* Dans cette cinquième édition, nous signalons par cette icône les applications de la physique aux divers domaines des sciences de la vie.

Jamais les physiciens n'ont observé un matériau chargé* qui attire à la fois le verre chargé et la soie chargée, ce qui exclut d'avoir à imaginer un troisième type de charge (figure 1.2*d*). On peut donc expliquer tous les phénomènes observés en affirmant que *les charges de même type se repoussent*, alors que *les charges de types différents s'attirent*.

Partant d'observations similaires, Charles Du Fay (1698-1739) suggéra en 1733 que la charge (qu'il se représentait comme une sorte de tourbillon formé autour de la matière « agitée » par le frottement) devait être de deux types. Il dénomma « vitreuses » les charges créées sur le verre et « résineuses » les charges apparaissant sur la soie**. Vers 1750, Benjamin Franklin (1706-1790) émit plutôt l'hypothèse que l'apparition de la charge lors du frottement était due à un unique fluide, le « feu électrique », qui s'écoule d'un objet vers l'autre. L'objet recevant le surplus de fluide était dit *positivement* chargé, et l'autre, auquel du fluide était retiré, *négativement* chargé. Même si notre représentation des choses a changé, ce vocabulaire est encore d'usage aujourd'hui, car il permet de distinguer les deux types de charge avec un simple signe algébrique.



▲ Figure 1.3

La matière est composée d'atomes comportant un noyau chargé positivement entouré d'électrons chargés négativement. On peut charger un atome en lui ajoutant ou en lui retirant des électrons. Ainsi, on ne conçoit plus aujourd'hui la charge comme quelque chose qu'on *ajoute* à la matière, mais plutôt comme une propriété que possèdent les particules de matière elles-mêmes. Cette figure est une représentation schématisée : les électrons n'ont pas des trajectoires définies et leur distance moyenne au centre est plus de 10 000 fois le rayon moyen du noyau.

Selon les anciennes conceptions que nous venons de décrire, la charge était toutefois « quelque chose » (tourbillon, fluide, etc.) qui *s'ajoutait* à la matière. Aujourd'hui, on la conçoit plutôt comme une propriété attribuée *directement aux particules qui composent la matière*, exactement comme la masse. Plus précisément, on se représente la matière comme étant constituée d'atomes (figure 1.3), chaque atome (de rayon $\approx 10^{-10}$ m) étant formé d'un noyau (de rayon $\approx 10^{-15}$ m) contenant des **protons** chargés positivement et des **neutrons** électriquement neutres. Des **électrons** de charge négative forment la structure extérieure de l'atome. Un atome neutre possède un même nombre de protons et d'électrons, ce nombre correspondant au numéro atomique de l'élément. Cela implique qu'un objet électriquement neutre contient une quantité égale de charges*** des deux types. Un **ion** est un atome ou une molécule qui a perdu ou gagné un ou plusieurs électrons et porte donc une charge.

Le frottement fait passer des électrons ou des ions d'un corps à l'autre, ce qui fait apparaître une charge totale positive sur l'un des corps et une charge totale négative sur l'autre. Les signes des charges acquises dépendent des propriétés électriques des deux matériaux et de l'état de leur surface. En fait, on observe que le moindre contact entre les deux matériaux les charge électriquement et que le frottement ne fait qu'accentuer l'effet. Dans certains cas, le simple fait de passer d'un frottement en douceur à un frottement beaucoup plus vigoureux peut changer les signes des charges acquises par les deux corps. Ce changement de signe imprévisible est attribué à des poussières en quantités infimes qui sont très difficiles à supprimer. Pour charger fortement un corps, on peut utiliser des appareils qui permettent d'accumuler une charge plus importante que le frottement manuel (figure 1.4).

Dans ce chapitre, nous nous contenterons de *décrire* la force électrique que des charges peuvent exercer les unes sur les autres. Au chapitre 2, nous allons

* Attention : comme nous le verrons aux sections 1.3 et 1.4, un matériau chargé peut exercer une force, toujours attractive, sur un matériau non chargé, car des charges locales de signes opposés apparaissent dans ce dernier. Un matériau non chargé paraît donc attirer les deux types de charges. Pour appliquer l'expérience décrite à la figure 1.2*d*, il faut s'assurer que chaque objet testé est bel et bien chargé.

** On pouvait aussi créer ces charges en frottant une tige de résine, d'où leur nom.

*** Sur le plan du vocabulaire : si on dit que *la* charge est une propriété d'un objet, elle est forcément au singulier (à moins qu'il y ait plusieurs objets). Toutefois, cette propriété étant attribuée à des particules microscopiques, on dit souvent aussi que l'objet porte *des* charges. Quand ce mot apparaît ainsi au pluriel bien qu'il n'y ait qu'un seul objet, il désigne en fait les particules microscopiques que l'objet porte en surplus.

(*a*)



(*b*)



Figure 1.4

Des appareils permettant de charger des objets. (*a*) Cette génératrice électrostatique à manivelle, conçue au milieu du XVIIIe siècle, permettait de charger des corps par frottement. (*b*) Le générateur de Van de Graaff permet d'accumuler des charges beaucoup plus impressionnantes et a plusieurs applications technologiques. Nous reviendrons sur son fonctionnement au chapitre 4.

expliquer comment cette force peut agir apparemment à distance en faisant appel à une notion supplémentaire, le champ électrique, qui joue le rôle d'un mécanisme intermédiaire entre les charges.

L'unité SI de charge est le **coulomb** (C). Nous verrons à la section 6.1 qu'elle est définie en fonction du courant électrique, qui correspond à un débit d'écoulement des charges. On procède ainsi parce que l'intensité du courant qui circule dans un fil peut être mesurée avec précision, alors que les charges portées par un corps ont tendance à fuir vers les matériaux adjacents. Le coulomb correspond à une très grande quantité de charge : en général, la charge qui est transmise à un corps lorsqu'on le frotte manuellement est seulement de l'ordre de 10^{-8} C et même un générateur Van de Graaff très chargé ne porte pas plus de 10^{-6} C, à moins qu'il soit gigantesque. À l'inverse, une quantité de charge pourtant grande, celle que la foudre peut faire passer entre un nuage et la terre, ne représente « que » 20 C au maximum.

Lorsqu'on charge un corps par frottement, la proportion des atomes de la surface qui perdent ou gagnent un électron n'est que de 1 sur 10^5. Même pour les objets très fortement chargés, le nombre des atomes de la surface qui s'ionisent n'est que de 1 sur 500 environ. Les effets électriques proviennent donc de déséquilibres très faibles par rapport à l'état normalement neutre de la matière (voir l'exemple 1.1).

La quantification de la charge

Aux XVIIe et XVIIIe siècles, la charge électrique et la matière étaient considérées comme continues. Mais au XIXe siècle, la mise en évidence des règles simples qui gouvernent les combinaisons chimiques des éléments vint fortement appuyer l'idée selon laquelle la matière est composée d'atomes, ce qui est aujourd'hui une idée acceptée. Les observations chimiques ont également suggéré que les molécules peuvent se décomposer en ions, chaque ion étant porteur d'une charge déterminée, égale à un multiple d'une **charge élémentaire**. Des expériences ultérieures ont confirmé cette hypothèse. La charge électrique portée par un corps ne peut prendre que des valeurs discrètes ; on dit qu'elle est *quantifiée*. Le quantum de charge, mesuré pour la première fois en 1909 par Robert Andrews Millikan (1868-1953) (voir la section 2.8), vaut

Charge élémentaire

$$e = 1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{C}$$

Nous utiliserons la lettre q pour désigner la quantité de charge électrique portée par un corps. Toute charge q doit être égale à un multiple entier de cette quantité élémentaire, $q = 0, \pm e, \pm 2e, \pm 3e$, etc. Bien que la masse du proton soit environ 1840 fois plus grande que celle de l'électron, leur charge a la *même valeur à un signe près*:

$$q_e = -e \qquad q_p = +e$$

D'après les modèles actuels en physique des particules, les protons et les neutrons aussi ont une structure interne, tout comme l'atome (voir le chapitre 13 du tome 3): ils sont faits chacun de trois *quarks*. Les quarks sont aussi vus comme les éléments fondamentaux de dizaines de particules élémentaires connues à l'heure actuelle. D'après la théorie, ces quarks portent des fractions de la charge élémentaire: $\pm e/3$ ou $\pm 2e/3$. Cela ne contredit toutefois pas la mesure du quantum élémentaire de charge, puisque la théorie prévoit aussi qu'il est impossible d'éloigner les quarks les uns des autres suffisamment pour les observer isolément. Il semble donc que e demeure pour l'instant la plus petite charge *isolée* dans la nature.

La conservation de la charge

Partant de sa théorie du fluide unique, Franklin a réalisé une expérience avec deux personnes, A et B, se tenant debout sur des socles en cire (pour éviter la fuite de charge). La personne A ayant reçu la charge d'une tige de verre frottée sur une étoffe en soie et la personne B ayant reçu la charge portée par l'étoffe en soie, on observait une étincelle lorsque A ou B approchait ses poings d'une troisième personne C. Mais si A ou B se touchaient avant que C n'approche, une étincelle se produisait entre A et B, mais pas avec C par la suite. Franklin en conclut que les charges acquises par A et B étaient de même grandeur mais de signes opposés et que la quantité de fluide gagnée par la tige était égale à la quantité de fluide perdue par l'étoffe, la quantité totale de fluide restant inchangée. Cette découverte est importante: la charge n'est ni créée ni détruite, elle est *transmise* d'un corps à l'autre. Cette propriété porte le nom de **conservation de la charge**:

Conservation de la charge

La charge totale d'un système isolé reste constante.

Le terme «isolé» signifie qu'il n'existe pas de chemin ou de passage, tel un fil ou de l'air humide, par lequel la charge pourrait entrer dans le système ou en sortir.

Évidemment, la conservation de la charge se visualise facilement si on attribue ultimement la charge des objets aux protons et aux électrons qui les composent: ces particules ne pouvant qu'être transférées d'un objet à l'autre (et non créées ou détruites sur un objet), il s'ensuit que la charge totale demeure la même. La conservation de la charge découle toutefois de l'expérience: c'est le modèle atomique qui a été conçu pour y être conforme, et il n'en est donc pas la cause mais bien une conséquence.

Pour appliquer la loi de conservation de la charge, on fait la somme des charges élémentaires avant l'interaction puis après. Prenons l'exemple d'une réaction chimique simple:

$$\begin{gathered} Na^+ + Cl^- \rightarrow NaCl \\ (+e) + (-e) = (0) \end{gathered}$$

L'atome de sodium (Na) a perdu un électron pour devenir un ion positif Na^+ ; l'atome de chlore (Cl) a gagné un électron pour devenir un ion négatif Cl^-. Durant la réaction, les ions se combinent pour former la molécule neutre de chlorure de sodium (NaCl).

Plusieurs phénomènes de physique nucléaire ou de physique des particules que nous étudierons dans le tome 3 sont maintenant expliqués en termes de particules qui *peuvent* être créées, transformées ou détruites. Même dans ce contexte, il importe toutefois de souligner qu'aucune observation n'a encore contredit la loi de la conservation de la charge. Prenons l'exemple d'une désintégration radioactive :

$$\mathrm{n} \rightarrow \mathrm{p} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}$$
$$(0) = (+e) + (-e) + (0)$$

Dans ce cas, un neutron de charge nulle subit une désintégration spontanée pour donner un proton, un électron et une particule neutre appelée antineutrino. La somme des charges des produits de la désintégration est égale à la charge du neutron, c'est-à-dire à zéro.

On peut aussi prendre l'exemple de la création d'une paire particule-antiparticule :

$$\gamma \rightarrow \mathrm{e}^+ + \mathrm{e}^-$$
$$(0) = (+e) + (-e)$$

Ici, le photon γ devient un positon et un électron, le positon étant une particule d'antimatière. Bien que le photon ne soit pas chargé, deux particules chargées peuvent apparaître, car leurs charges s'annulent mutuellement.

Nous verrons au chapitre 4 que, comme les autres principes de conservation étudiés au tome 1, le principe de conservation de la charge repose sur des bases théoriques extrêmement solides, qui dépassent la simple observation.

Exemple 1.1

Soit une petite tige de verre d'une masse de 5 g. Pour simplifier, on suppose que ce verre est fait de SiO_2 pur. (a) En utilisant les données du tableau périodique (annexe D), calculer la charge totale des électrons que contient cette tige, si elle est électriquement neutre. (b) Par frottement sur de la soie, on arrache 10^{-12} % des électrons de la tige. Quelle charge porte-t-elle ensuite ? (c) Quelles sont les conséquences de la quantification de la charge sur une mesure de la charge de la tige ?

Solution

(a) D'après l'annexe D, la masse molaire de SiO_2 est $M = 28{,}09 + 2 \times 16{,}00 = 60{,}09$ g/mol et chacune des molécules contient $14 + 2 \times 8 = 30$ électrons. La tige contient donc $n = m/M = (5\ \text{g})/(60{,}09\ \text{g/mol}) = 0{,}0832$ mol. Chaque mole contenant N_A molécules, où N_A est le nombre d'Avogadro, la tige contient donc $0{,}0832 \times 6{,}02 \times 10^{23} = 5{,}01 \times 10^{22}$ molécules. Chaque électron portant la charge $-e$, la charge totale portée par les électrons est $(5{,}01 \times 10^{22}$ molécules)(30 électrons/molécule)$(-1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C}) = -2{,}41 \times 10^5$ C.

(b) Des électrons, chargés négativement, étant arrachés, la tige se trouve à en manquer. Elle acquiert donc une charge *positive*. ■

Si 10^{-12} % des électrons sont arrachés, ils emportent avec eux leur charge de $(10^{-12}\ \%)(-2{,}41 \times 10^5\ \text{C}) = -0{,}002\ 41\ \mu\text{C}$. La charge de la tige est donc $+0{,}002\ 41\ \mu\text{C}$. Cette charge est d'un ordre de grandeur réaliste pour une charge acquise par frottement manuel.

(c) Une charge de $+0{,}002\ 41\ \mu\text{C}$ correspond à 15 milliards de fois la charge élémentaire e (vérifiez). En somme, si on arrachait un électron supplémentaire à la tige, sa charge *ne changerait pas* d'une quantité mesurable.

On peut donc ignorer ici la quantification de la charge, qui n'aura un impact que pour les systèmes microscopiques. ■

1.2 CONDUCTEURS ET ISOLANTS

Au tout début de la recherche en électricité, faire des observations inédites et cruciales était à la portée de tous. Ce fut le cas en 1729 pour Stephen Gray (1670-1736), lorsqu'il s'aperçut que les bouchons de liège placés aux extrémités d'un tube en verre chargé devenaient chargés à leur tour. Cette observation était d'une grande importance, car elle montrait qu'un corps pouvait se charger sans qu'on le frotte, *par contact* avec un corps déjà chargé. Gray découvrit aussi qu'un corps pouvait se charger *par conduction* : il réussit à faire passer la charge d'une tige en verre à une boule en ivoire qu'il avait suspendue à un fil tendu à sa fenêtre. Voulant voir jusqu'où l'« essence électrique » pouvait aller, il fabriqua ensuite un fil long de quelques centaines de mètres suspendu parallèlement au sol par des boucles en soie, mais celles-ci se cassèrent rapidement. L'expérience échoua également, mais pour une raison différente, lorsque Gray remplaça les boucles en soie par des crochets métalliques. Il en conclut que le métal avait « entraîné » la charge.

Pour démontrer que la charge pouvait traverser le corps humain, Gray suspendit un jeune garçon à des fils de soie et il lui mit les pieds en contact avec une machine produisant des charges. Les doigts du garçon, devenus chargés, attiraient de petits objets et donnaient des décharges électriques aux personnes qui l'entouraient. De telles démonstrations devinrent très populaires (figure 1.5). Le corps humain est conducteur même si les membranes cellulaires sont isolantes, car les cellules baignent dans un milieu aqueux où se trouvent de nombreux ions en solution (notamment Na^+, K^+ et Cl^-) dont la concentration est régulée par les reins. Les ions étant mobiles, ils permettent la circulation de la charge au sein du corps humain. Nous reviendrons souvent sur les rôles très importants que jouent ces ions. La conductibilité électrique du corps explique divers phénomènes, depuis l'électrocution jusqu'à l'augmentation de la portée d'une antenne quand on y touche.

Conducteurs, isolants et semi-conducteurs

Gray s'aperçut que l'on pouvait classer la plupart des substances dans deux groupes. Celles, comme les métaux ou les solutions ioniques, qui laissent les charges circuler librement, sont appelées **conducteurs**. Celles qui ne laissent pas circuler les charges, comme le bois, le caoutchouc, la soie ou le verre, sont des **isolants**. Un troisième groupe de matériaux découvert au XXe siècle, que l'on appelle **semi-conducteurs**, comprend le silicium, le germanium et le carbone.

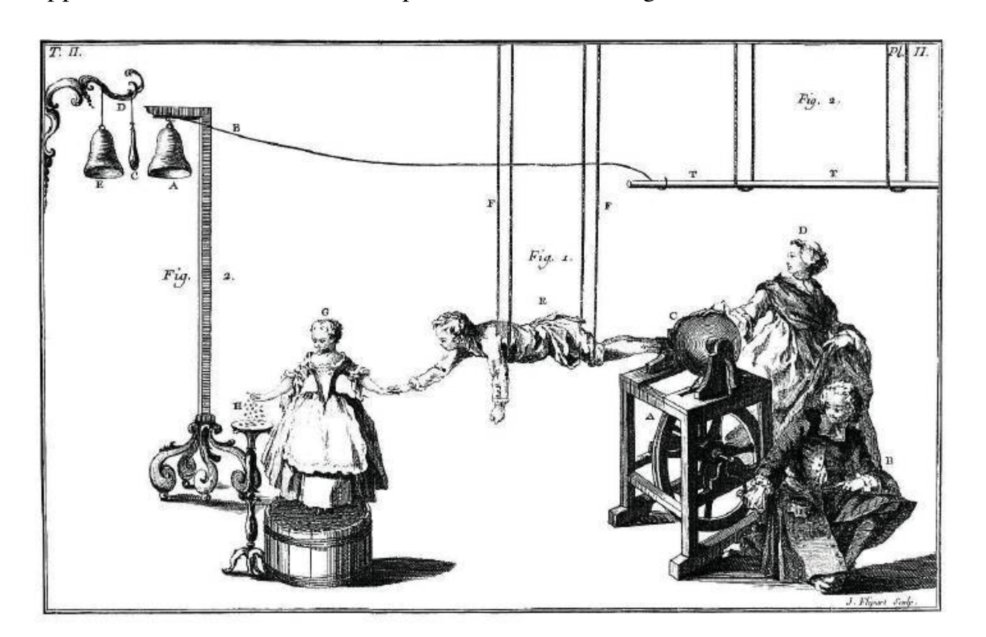


Figure 1.5

Cette expérience amusante et intéressante montre que la charge peut circuler dans le corps humain, des pieds jusqu'au bout des doigts. Le corps humain est donc un conducteur.

Lorsqu'ils sont très purs, les semi-conducteurs se comportent comme des isolants ; mais en leur ajoutant certaines impuretés, on arrive à modifier leur pouvoir conducteur. Le silicium et le germanium sont couramment utilisés dans les circuits électroniques.

La distinction entre conducteur et isolant n'est pas une frontière rigide. Pour comparer plus finement des matériaux entre eux, on peut caractériser la mobilité des charges dans chacun d'eux par un **temps de relaxation**. Lorsqu'on place une charge sur une petite région de la surface d'un objet, le temps de relaxation nous renseigne sur le rythme auquel la charge va diminuer en ce point ou, ce qui revient au même, sur le temps mis par les charges pour atteindre leur position d'équilibre. Le temps de relaxation du cuivre est de 10^{-12} s environ, celui du verre est de 2 s ; il vaut 4×10^3 s dans le cas de l'ambre et à peu près 10^{10} s dans le cas du polystyrène. On remarque donc que ces valeurs diffèrent entre elles d'un facteur de 10^{22}, ce qui est énorme ! Le temps de relaxation du cuivre montre qu'une charge quelconque acquise par un métal se répartit très rapidement sur la surface, comme on le voit à la figure 1.6*a*. Même si on vient tout juste de le charger, on peut donc considérer qu'un conducteur isolé est *immédiatement à l'équilibre*. Par contre, sur un bon isolant, on rencontre les charges en paquets localisés (figure 1.6*b*). Pour faire passer la charge d'un isolant à un autre objet, il est donc nécessaire d'établir un contact avec l'objet en plusieurs points de l'isolant.

(*a*) Métal (*b*) Isolant

▲ **Figure 1.6**
(*a*) Une charge quelconque placée sur une sphère métallique se répartit très rapidement sur toute la surface de la sphère. (*b*) Sur un isolant, la charge se trouve en paquets localisés sur de petites régions de la surface.

Une représentation microscopique

Grâce à la représentation atomique de la matière, on peut expliquer la différence entre conducteurs et isolants en comparant ce que deviennent les électrons de valence les plus éloignés du noyau, c'est-à-dire les moins liés.

Les matériaux solides dont les atomes sont liés par des liaisons ioniques ou covalentes sont typiquement d'excellents isolants. Par exemple, dans le chlorure de sodium (NaCl), l'électron de valence de l'atome de sodium (Na) est pris par l'atome de chlore (Cl). Les ions Na^+ et Cl^- forment des liaisons *ioniques* dans lesquelles tous les électrons sont liés à des sites atomiques donnés et ne peuvent donc pas se déplacer sur une grande distance au sein du matériau. Dans le cas des atomes de carbone (C) et d'hydrogène (H) qui forment le polystyrène, les liaisons sont *covalentes* : les électrons de valence sont liés à deux atomes voisins plutôt qu'à un seul comme dans la liaison ionique, mais il n'en demeure pas moins que ces électrons de valence ne sont pas libres de se déplacer sur une grande distance.

Les matériaux solides dont les atomes sont liés par des liaisons métalliques, de même que les fluides contenant des ions, sont conducteurs. Les liaisons *métalliques* se distinguent des liaisons covalentes en ce qu'un électron par atome environ est libre de se déplacer dans l'ensemble du matériau. Un métal peut donc être considéré comme constitué d'ions positifs immobiles, disposés en général selon un arrangement régulier à trois dimensions appelé *réseau*, et entourés d'une foule d'**électrons libres**, aussi appelés **électrons de conduction**. La conduction du métal est liée au mouvement des électrons libres, qui se comportent à peu près comme les particules d'un gaz dans un récipient fermé, les ions immobiles étant des obstacles contournables.

Dans une solution électrolytique, c'est-à-dire un liquide où se trouvent en solution des molécules dissociées en ions de charges opposées, ou dans un gaz ionisé, toutes les charges, positives et négatives, sont en mouvement et ces matériaux sont donc de bons conducteurs. Même dans une atmosphère sèche, les ions sont en nombre suffisant pour décharger un objet en quelques minutes.

Un dernier commentaire s'impose sur les conventions utilisées pour représenter visuellement la charge que porte un objet. Examinez la figure 1.6, construite selon ces conventions. Premièrement, on note que seule la charge totale est illustrée et non la charge de chacun des protons et des électrons. Un corps neutre serait donc représenté sans aucune charge et non avec un nombre égal de « + » et de « – ». Deuxièmement, on note que les schémas représentent des *coupes en deux dimensions* d'un objet et non une perspective. Ainsi, une charge uniformément répartie sur la surface d'une sphère est représentée comme à la figure 1.6*a*, où les « + » forment un *cercle* et non un disque. Pour représenter une charge positive répartie dans tout le volume, on aurait rempli tout le disque de signes « + ».

1.3 LE PHÉNOMÈNE DE CHARGE PAR INDUCTION

Stephen Gray avait démontré que la charge électrique peut être transmise à un objet par contact ou par conduction. En 1753, John Canton (1718-1772) s'aperçut qu'un objet métallique isolé peut se charger sans entrer en contact avec un corps chargé. Ce processus sans contact est appelé **induction**. La figure 1.7 représente deux sphères métalliques A et B posées sur des socles isolants. À la figure 1.7*a*, elles sont en contact et forment ainsi un seul conducteur. On approche de la sphère A une tige chargée positivement, mais *sans toucher* la sphère. Les électrons libres du conducteur A + B sont attirés par la tige, et certains d'entre eux se déplacent vers le côté gauche de A. Ce déplacement crée un déséquilibre de charge et fait apparaître une charge positive sur le côté droit de B : la tige a provoqué, ou *induit*, une séparation des charges. À la figure 1.7*b*, on sépare les deux sphères, la tige étant *encore* présente. Finalement, à la figure 1.7*c*, on enlève la tige : chacune des deux sphères a acquis une charge permanente, sans que la tige chargée ne soit entrée en contact avec elles. On dit que les deux sphères ont été chargées *par induction*, un terme qui signifie seulement qu'aucun contact direct n'a été nécessaire*. Puisque la charge positive de B vient du déséquilibre créé par le mouvement des électrons vers A, les charges apparaissant sur A et B sont nécessairement de même grandeur mais de signes opposés, et ce même si les sphères sont de tailles différentes : il y a bien conservation de la charge, puisque la charge initiale totale des deux sphères était nulle. On notera que, dans cette séquence de manipulations, il est essentiel d'enlever la tige *après* avoir séparé les sphères ; si les sphères demeurent en contact, les charges de A et de B se neutralisent dès qu'on enlève la tige, car le temps de relaxation d'un bon conducteur est extrêmement court.

Une sphère métallique unique peut également se charger par induction. Lorsqu'on approche la tige chargée positivement (figure 1.8*a*), elle provoque la séparation des charges. On relie ensuite la sphère à la terre, au moyen par exemple

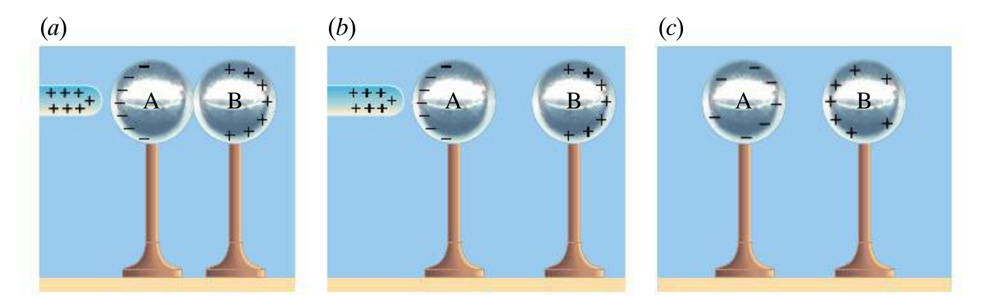


Figure 1.7

Des charges de même grandeur mais de signes opposés sont produites par induction sur deux sphères métalliques. Remarquez qu'en (*c*) les charges négatives de A sont attirées par les charges positives de B, ce qui produit l'asymétrie de la distribution des charges sur chaque sphère.

* Il ne faut pas confondre la charge par induction et l'induction électromagnétique, que nous étudierons au chapitre 10. Le terme *induction* utilisé aux deux endroits veut seulement dire que les deux phénomènes se produisent sans contact : ils n'ont rien d'autre en commun.

d'une conduite d'eau métallique. (La terre est un assez bon conducteur et est employée comme réservoir de charge de capacité quasiment infinie.) Sur les schémas, on utilise le symbole ⏚ pour représenter la mise à la terre. Comme le montre la figure 1.8*b*, des électrons venant de la terre vont neutraliser la charge positive. À la figure 1.8*c*, la connexion avec la terre a été coupée alors que la tige était *encore* présente. Après avoir éloigné la tige, on observe à la figure 1.8*d* une charge négative répartie uniformément sur la sphère.

Au fond, l'expérience que nous venons de décrire est identique sur le plan physique à celle de la figure 1.7, si on considère que la terre joue le rôle de la deuxième sphère. La charge qu'acquiert la terre, identique à celle de la sphère, est toutefois tellement diluée qu'elle n'a aucun effet mesurable.

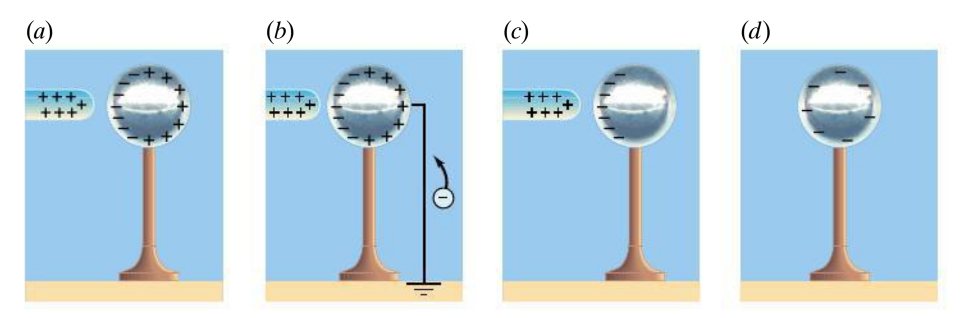


Figure 1.8 Une sphère métallique unique peut être chargée par induction si on utilise une mise à la terre.

1.4 L'ÉLECTROSCOPE À FEUILLES

Un électroscope est un appareil servant à détecter les charges électriques. Mis au point en 1786 par Abraham Bennet (1749-1799), l'**électroscope à feuilles** est constitué d'une ou de deux minces feuilles d'or ou d'aluminium, très légères, fixées à une tige métallique (figure 1.9*a*). La tige, placée dans un récipient transparent muni d'un bouchon isolant, porte à son extrémité extérieure un plateau ou une sphère métallique. À la figure 1.9*b*, on approche d'un électroscope non chargé une tige en verre chargée positivement. Les électrons du plateau métallique sont attirés par la tige et créent, en se déplaçant, un déséquilibre des charges; ce déséquilibre fait apparaître une charge positive sur les feuilles, qui se repoussent donc mutuellement. Plus la tige est chargée et plus les charges de l'électroscope sont séparées, donc plus les feuilles se soulèvent. Si on éloigne la tige, les feuilles retombent simplement à la verticale. Si on avait plutôt approché une tige négative (figure 1.9*c*), les électrons du plateau auraient plutôt été repoussés et la séparation des charges dans l'électroscope se serait produite en sens inverse. Toutefois, les feuilles de l'électroscope se seraient quand même mutuellement repoussées. Un électroscope *neutre* permet donc seulement de détecter si la tige est chargée et d'estimer la grandeur de sa charge, pas de connaître son signe.

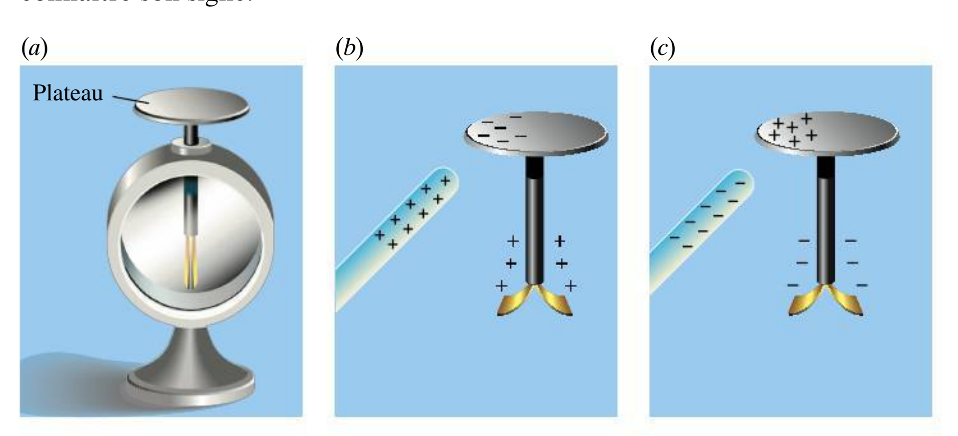


Figure 1.9 (*a*) L'électroscope à feuilles est un appareil qui permet de détecter la charge d'un objet. (*b*) Quand on approche une tige positive de son plateau, la charge contenue dans l'électroscope se sépare et les feuilles devenues positives se repoussent. Plus la tige est chargée et plus les feuilles se soulèvent. (*c*) Si la tige approchée est négative, la réaction des feuilles est la même, car l'électroscope ne portait initialement aucune charge.

Par contre, on peut déterminer *aussi le signe* de la charge approchée si l'électroscope porte *déjà* une charge : à la figure 1.10*a*, un quelconque objet chargé a préalablement touché le plateau et lui a transmis une légère charge positive. Si, à partir de la situation illustrée à la figure 1.10*a*, on approche du plateau un objet chargé positivement, les feuilles ont tendance à s'éloigner davantage l'une de l'autre (figure 1.10*b*) ; par contre, lorsqu'on approche un objet chargé négativement, la déviation des feuilles a tendance à diminuer (figure 1.10*c*).

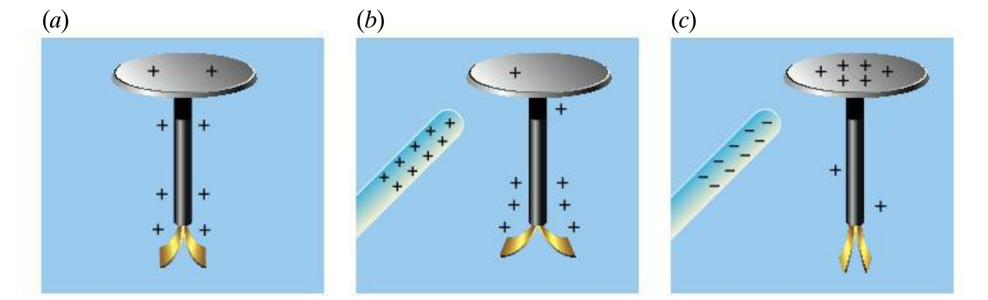


Figure 1.10
Quand l'électroscope est initialement chargé, il permet de déterminer aussi le signe de la charge portée par la tige.

Avant l'invention des instruments modernes, l'électroscope a aussi servi à détecter les rayonnements ionisants, comme les rayons X ou les particules de haute énergie. Pour l'utiliser de cette façon, on remplit le récipient d'un gaz approprié et on charge les feuilles. L'incidence d'un rayon X ou d'une particule de haute énergie arrive souvent à rompre les liaisons atomiques dans une molécule de ce gaz et à produire des ions de charges opposées. Les ions dont la charge est opposée à celle des feuilles se dirigent vers les feuilles et neutralisent une partie de la charge portée par celles-ci, faisant ainsi diminuer leur déviation. Vers 1900, Marie Curie (1867-1934) utilisa un dispositif de ce type dans ses premiers travaux sur la radioactivité.

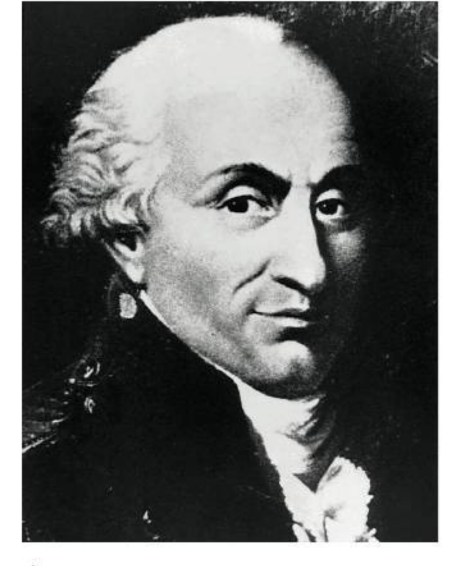
1.5 LA LOI DE COULOMB

En électricité, malgré les progrès considérables réalisés sur le plan conceptuel tout au long du XVIIIe siècle, on ne disposait alors que d'observations qualitatives. Le fait de ne pas avoir de loi quantitative décrivant l'interaction entre les charges électriques gênait les physiciens dans leurs travaux.

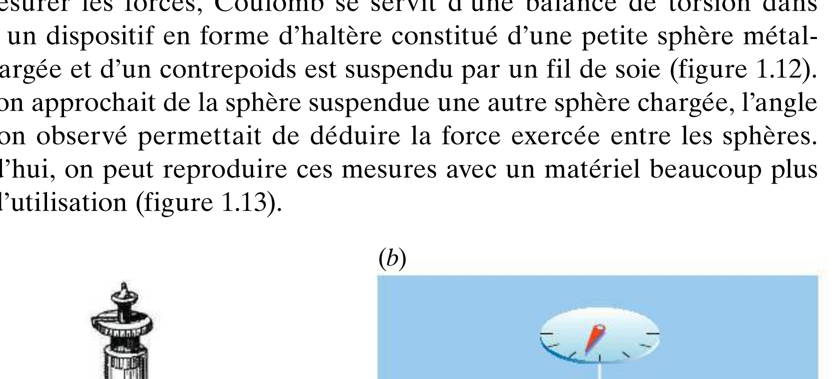
Après plusieurs tentatives infructueuses, une première étape importante dans l'établissement d'une telle loi fut franchie en 1766 par le chimiste Joseph Priestley (1733-1804), à qui l'on attribue la découverte de l'oxygène. Un peu auparavant, Franklin avait réalisé une expérience simple : sachant qu'un corps non chargé est attiré par la surface externe d'une coupe métallique chargée et se charge s'il est mis en contact avec la coupe, il suspendit une boule de liège non chargée à l'intérieur d'une coupe et constata avec surprise que la boule n'était soumise à aucune force. Mise en contact avec la surface *intérieure* de la coupe, puis retirée, la boule ne portait pas de charge. Priestley confirma ces résultats à la demande de Franklin. La seule loi connue à l'époque donnant l'expression d'une force était la loi de la gravitation. D'après cette loi, la force gravitationnelle entre deux masses est inversement proportionnelle au carré de la distance qui les sépare. Une des conséquences de cette dépendance en $1/r^2$ est que la force gravitationnelle résultante exercée sur une masse située à l'intérieur d'une coquille sphérique homogène est égale à zéro (voir le chapitre 13 du tome 1). Par analogie avec ce résultat, Priestley tira une conclusion importante : il supposa que la force électrique entre les charges devait aussi varier en $1/r^2$, où r est la distance entre deux charges ponctuelles. S'il s'agissait là d'une hypothèse acceptable, elle n'était pas totalement convaincante. Par exemple, l'expérience

montrait que le conducteur creux n'avait pas besoin d'être de symétrie sphérique, alors que la coquille devait l'être dans le cas de la gravité.

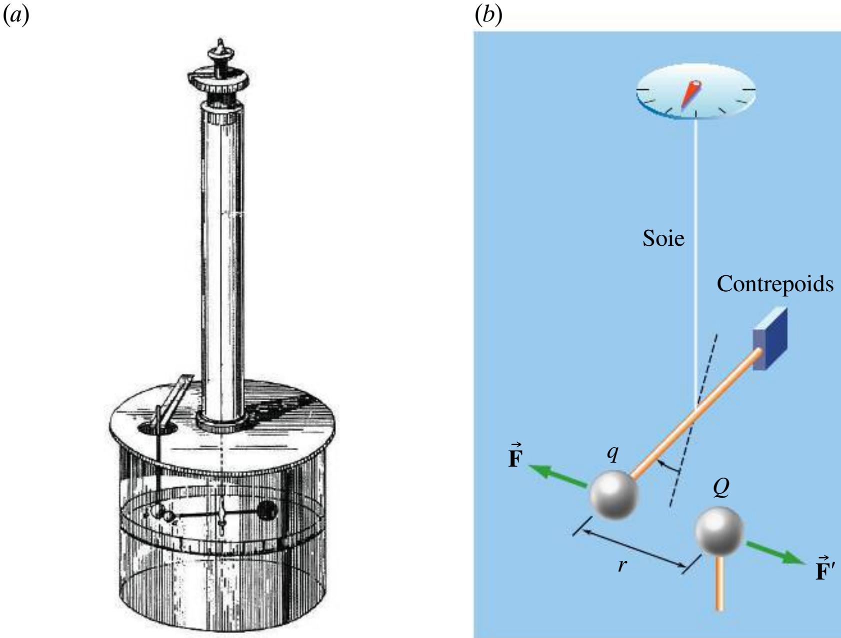
C'est en 1785, c'est-à-dire presque cent ans exactement après l'énoncé de la loi de la gravitation par Newton, que Coulomb (figure 1.11) établit expérimentalement la loi donnant la force exercée entre deux charges électriques. Bien qu'il ne disposait d'aucun moyen fiable pour mesurer les charges, ni même d'une unité de mesure pour ce faire, Coulomb imagina un stratagème simple pour établir la valeur des charges. Ayant chargé une petite boule plaquée d'or, il la mit en contact avec une boule identique mais non chargée, en supposant que, si la charge initiale était égale à Q, alors chaque sphère acquerrait par symétrie la charge $Q/2$. En répétant cette opération, il pouvait obtenir diverses fractions de Q. Il connaissait ainsi de façon *quantitative* le rapport entre les charges portées par ses boules, même s'il ignorait la valeur de Q.



▲ **Figure 1.11**
Charles Augustin de Coulomb (1736-1806).

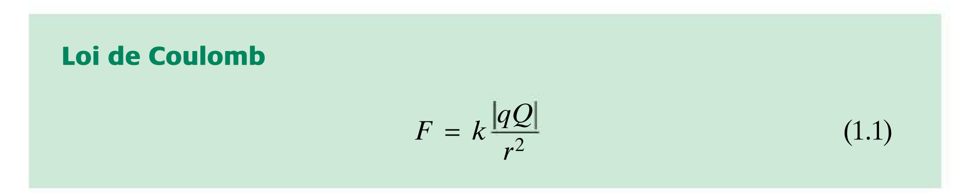


Pour mesurer les forces, Coulomb se servit d'une balance de torsion dans laquelle un dispositif en forme d'haltère constitué d'une petite sphère métallique chargée et d'un contrepoids est suspendu par un fil de soie (figure 1.12). Lorsqu'on approchait de la sphère suspendue une autre sphère chargée, l'angle de torsion observé permettait de déduire la force exercée entre les sphères. Aujourd'hui, on peut reproduire ces mesures avec un matériel beaucoup plus simple d'utilisation (figure 1.13).



◀ **Figure 1.12**
La balance de torsion utilisée par Coulomb. On déterminait la force électrique entre deux sphères en mesurant l'angle de torsion d'un fil de soie. On note que $\|\vec{F}\| = \|\vec{F}'\| = F$.

Coulomb trouva ainsi que la force qui s'exerce entre des charges immobiles q et Q est inversement proportionnelle au carré de la distance r qui les sépare, autrement dit, $F \propto 1/r^2$. Si la distance est constante, la force est proportionnelle au produit des charges, autrement dit, $F \propto qQ$. Tenant compte de ces deux résultats, la **loi de Coulomb** exprime la force électrique qu'exercent l'une sur l'autre deux charges ponctuelles :



Loi de Coulomb

$$F = k\frac{|qQ|}{r^2} \qquad (1.1)$$



▲ **Figure 1.13**
En remplaçant la balance à torsion de Coulomb par une balance numérique moderne, on peut reproduire très facilement ses mesures.

où k est une constante qui dépend du système d'unités utilisé ; F représentant le module du vecteur force électrique, on a pris la valeur absolue du produit des charges pour avoir une grandeur toujours positive. Dans le système SI, la constante k a pour valeur :

$$k = 8{,}99 \times 10^9 \text{ N·m}^2/\text{C}^2$$

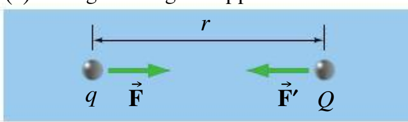
On trouve souvent cette constante k sous la forme

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

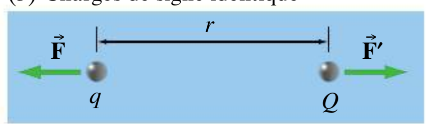
où ε_0, qui est la **permittivité du vide**, a pour valeur

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{N·m}^2$$

(*a*) Charges de signes opposés



(*b*) Charges de signe identique



▲ **Figure 1.14**

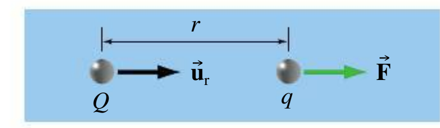
(*a*) Deux charges de signes opposés s'attirent. (*b*) Deux charges de signe identique se repoussent. D'après la loi de Coulomb, le module des deux forces est $k|qQ|/r^2$. On remarque que la force $\vec{\mathbf{F}}$ exercée sur la charge q par la charge Q est de même module mais de sens opposé à la force $\vec{\mathbf{F}}'$ exercée par la charge Q sur la charge q, en accord avec la troisième loi de Newton (action-réaction).

Le rapport $1/4\pi\varepsilon_0$ fait peut-être paraître la loi de Coulomb un peu plus compliquée, mais on verra qu'il simplifie l'aspect d'autres équations en électromagnétisme. L'utilisation de la permittivité *du vide* signifie que l'équation 1.1 est valable entre deux charges situées *dans le vide*. Nous verrons à la section 2.7 que si les charges q et Q se trouvent dans un matériau isolant, il faut remplacer ε_0 par $\kappa\varepsilon_0$ (ce qui implique de diviser k par κ), où κ est la *constante diélectrique* du matériau et où le produit $\varepsilon = \kappa\varepsilon_0$ est la *permittivité* du matériau. Dans l'air, la différence est en pratique négligeable ($\kappa = 1{,}000\,59$), mais pas dans l'eau ($\kappa \approx 80$). Sauf mention du contraire, on considère que les charges sont situées dans le vide.

L'équation 1.1 donne le *module* du vecteur force électrique. Pour déterminer son orientation (soit sa direction et son sens), il suffit de se rappeler que des charges de signe identique se repoussent et des charges de signes contraires s'attirent (figure 1.14). La force électrique est une force *radiale* (elle est dirigée selon la droite joignant les deux particules) et de *symétrie sphérique* (elle ne dépend que de r).

Sous sa forme vectorielle, la loi de Coulomb s'écrit ainsi (notez l'absence de valeur absolue) :

$$\vec{\mathbf{F}} = k\frac{qQ}{r^2}\vec{\mathbf{u}}_r \qquad (1.2)$$



▲ **Figure 1.15**

La loi de Coulomb s'applique à des charges *ponctuelles*. Le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_r$ a son origine à la « source de la force ».

Le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_r$ a pour origine la « source de la force ». Par exemple, pour trouver la force agissant sur q, on place l'origine du vecteur $\vec{\mathbf{u}}_r$ en Q, comme le montre la figure 1.15. Les signes des charges doivent figurer explicitement dans l'équation 1.2. Si la force a pour module F (grandeur scalaire positive), alors $\vec{\mathbf{F}} = +F\vec{\mathbf{u}}_r$ correspond à une *répulsion*, alors que $\vec{\mathbf{F}} = -F\vec{\mathbf{u}}_r$ correspond à une *attraction*.

Notez que la loi de Coulomb a exactement la même forme que la loi de la gravitation universelle (équation 5.4 du tome 1), c'est-à-dire

$$F_g = G\frac{mM}{r^2}$$

Les deux forces ont donc une similitude physique certaine : la cause de la force électrique est attribuée à des charges auxquelles elle est proportionnelle, la cause de la force gravitationnelle est attribuée à des masses auxquelles elle est proportionnelle, puis les deux forces varient en $1/r^2$, une caractéristique qui jouera un rôle important au chapitre 3. Malgré cette similitude de leur comportement, la force électrique est typiquement beaucoup plus intense que la force gravitationnelle, puisque les constantes G et k sont très différentes. Seules des masses considérables, comme celles de planètes ou d'étoiles, peuvent donc

exercer une force gravitationnelle sensible, alors que de très petits objets chargés peuvent exercer une force électrique comparable.

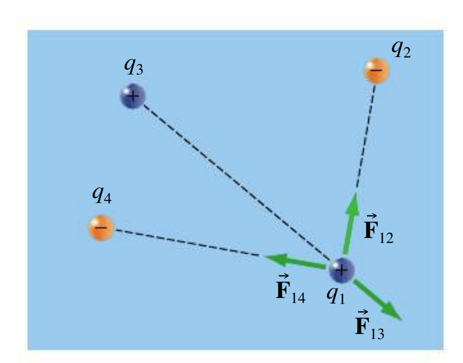
Tout comme la loi de la gravitation universelle ne s'applique directement qu'à des masses *ponctuelles* ou à des particules, la loi de Coulomb ne s'applique directement qu'à des charges *ponctuelles* ou à des particules. En effet, dans le cas de corps chargés de forme quelconque, comme ceux de la figure 1.16, la distance r qui les sépare n'a pas de valeur bien définie. Comme pour la force de gravité, il y a toutefois une exception : si la charge est répartie *uniformément sur une surface sphérique*, on peut utiliser la loi de Coulomb pour calculer la force exercée sur une charge ponctuelle extérieure à la surface, en supposant la charge de la sphère concentrée en son centre. De même, si les dimensions des deux corps chargés sont petites par rapport à la distance qui sépare les deux corps, la loi de Coulomb nous donne une valeur approchée de la force qui s'exerce entre eux. Dans tous les autres cas, il faut diviser l'objet en petits segments de taille quasi ponctuelle (infinitésimale) et appliquer la loi de Coulomb à *chacun* de ces segments. On additionne ensuite les forces que ces segments produisent individuellement. Ce procédé d'apparence complexe est facilité mathématiquement par une intégration (voir la section 2.5).

▲ Figure 1.16
Dans le cas de corps chargés de forme quelconque, la distance r n'a pas de valeur bien définie.

La force électrique donnée par la loi de Coulomb est essentielle à la vie, car elle assure la cohésion des liaisons ioniques, covalentes et métalliques dont nous avons parlé à la section 1.2. Le sujet connexe portant sur la conformation des protéines (voir à la fin de cette section) montre comment la force électrique explique la forme tridimensionnelle qu'adoptent les macromolécules dont le corps humain est fait. La force électrique est aussi à l'origine d'interactions locales entre les molécules biologiques en solution dans l'eau ; par exemple, elle explique que les molécules de médicaments se lient à leur cible. La conception d'un nouveau médicament requiert souvent que la forme de cette cible soit connue, ainsi que les charges qu'elle porte.

Le principe de superposition

La figure 1.17 représente l'interaction d'une charge q_1 avec d'autres charges. Comme les forces gravitationnelles, les forces électriques obéissent au **principe de superposition** (voir le chapitre 13 du tome 1). Ainsi, pour trouver la force électrique résultante agissant sur q_1, nous calculons d'abord l'une après l'autre les forces exercées par chacune des autres charges. Si l'on désigne par $\vec{\mathbf{F}}_{AB}$ la force exercée *sur* A *par* B, la force résultante $\vec{\mathbf{F}}_1$ exercée sur q_1 est simplement égale à la somme vectorielle :



▲ Figure 1.17
La force entre deux charges ne dépend pas des autres charges en présence. La force résultante sur q_1 est la somme vectorielle des forces exercées par les autres charges, calculées l'une après l'autre.

Principe de superposition

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = \vec{\mathbf{F}}_{12} + \vec{\mathbf{F}}_{13} + \ldots + \vec{\mathbf{F}}_{1N} \qquad (1.3)$$

On remarque que la force $\vec{\mathbf{F}}_{12}(= -\vec{\mathbf{F}}_{21})$ entre q_1 et q_2 ne dépend pas des autres charges en présence, q_3 et q_4. La loi de coulomb et le principe de superposition sont des équations déduites directement par l'expérience : elles permettent de *calculer* la force que subit une charge, mais pas d'*expliquer* par quel mécanisme cette force peut agir à distance. Au chapitre 2, nous expliquerons que deux charges ne peuvent agir l'une sur l'autre que par l'intermédiaire du champ électrique, la valeur de celui-ci déterminant la force qu'il cause.

Méthode de résolution

Loi de Coulomb

Voici les étapes à suivre pour calculer la force *électrique* résultante agissant sur une charge ponctuelle q_i. Cette méthode permet aussi de calculer la force *électrique* résultante sur un objet non ponctuel si sa charge q_i est répartie sur une surface sphérique, et ce, même si l'objet subit aussi des forces autres que la force électrique.

1. Tracer le *diagramme de forces* sur la charge q_i. Pour ce faire, déterminer si la force exercée par chacune des autres charges connues est attractive ou répulsive. Pour chacune de ces autres charges, tracer le vecteur force à partir de q_i en l'orientant soit vers l'autre charge, soit dans le sens opposé.

2. Pour chacune des autres charges, calculer le module de la force à partir de l'équation 1.1 :

$$F = k\frac{|q_i Q|}{r^2}$$

où r est la distance entre q_i et l'une des autres charges Q.

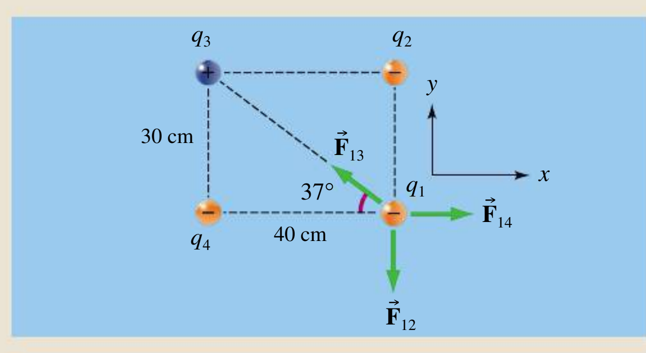
3. Choisir un système d'axes et trouver les composantes de la force *électrique* résultante sur q_i, soit F_x et F_y. Les valeurs et les signes de ces composantes vont dépendre du choix des axes. Pour calculer ces composantes, il faut déterminer et additionner les composantes de chaque force obtenue à l'étape précédente.

3. Sauf indication contraire, tous les vecteurs doivent être exprimés en fontion des vecteurs unitaires $(\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$.

Cette séquence d'opérations est illustrée dans le premier des exemples qui suivent.

Exemple 1.2

Trouver la force électrique résultante exercée sur la charge q_1 par les autres charges de la figure 1.18. On donne $q_1 = -5\ \mu C$, $q_2 = -8\ \mu C$, $q_3 = 15\ \mu C$ et $q_4 = -16\ \mu C$.



▲ **Figure 1.18**

Pour trouver la force résultante sur q_1, on doit d'abord calculer séparément les différentes forces, puis prendre leurs composantes dans un système de coordonnées.

Solution

La figure représente les orientations des forces exercées sur q_1 et le système de coordonnées. Le module de la force exercée sur q_1 par q_2 est

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{k|q_1 q_2|}{r^2} \\ &= \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \text{N·m}^2/\text{C}^2)(5 \times 10^{-6}\ \text{C})(8 \times 10^{-6}\ \text{C})}{(3 \times 10^{-1}\ \text{m})^2} \\ &= 4{,}00\ \text{N} \end{aligned}$$

De même, on trouve $F_{13} = 2{,}70$ N et $F_{14} = 4{,}50$ N. (Vérifier ces résultats.) Les composantes de la force résultante sont

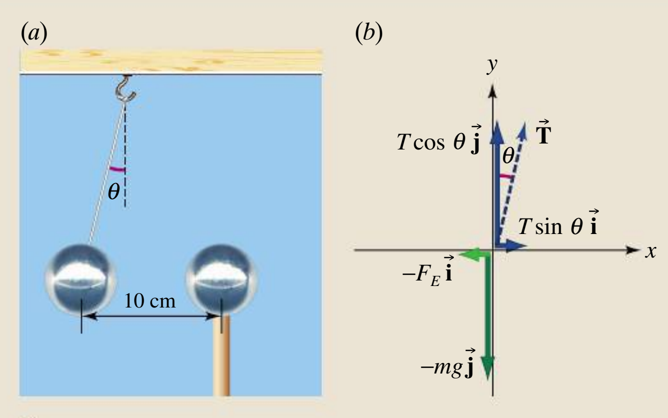
$$\begin{aligned} F_{1x} &= 0 - F_{13}\cos 37° + F_{14} = 2{,}34\ \text{N} \\ F_{1y} &= -F_{12} + F_{13}\sin 37° + 0 = -2{,}38\ \text{N} \end{aligned}$$

La force résultante exercée sur q_1 est donc

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = (2{,}34\vec{\mathbf{i}} - 2{,}38\vec{\mathbf{j}})\ \text{N}$$

Exemple 1.3

Deux balles de ping-pong d'une masse de 2 g sont enduites de peinture métallique de façon à rendre conductrice leur surface sphérique. On suspend l'une des balles par une ficelle et on la charge négativement. La deuxième balle est placée sur un socle isolant. On la charge en la mettant en contact avec la première balle. Quand les centres des deux balles sont à la même hauteur et sont distants de 10 cm, la ficelle qui tient la première balle forme avec la verticale un angle $\theta = 3°$ (figure 1.19*a*). Quelle est la charge portée par chaque boule ?



▲ **Figure 1.19**

Une balle suspendue est repoussée par une balle chargée identique. La ficelle forme donc un angle avec la verticale.

Solution

La figure 1.19*b* illustre le diagramme des forces qui s'appliquent sur la balle suspendue. Les deux balles étant situées à la même hauteur, la force électrique est horizontale. L'inclinaison de la corde indique que la force électrique sur la balle suspendue est vers la gauche (répulsive). Cela peut également être déduit du fait que les deux balles ont été mises en contact et portent donc une charge de même signe (négatif).

La balle suspendue étant à l'équilibre, la somme vectorielle des forces qui s'exercent sur elle est nulle. La deuxième loi de Newton devient donc

$$\sum F_x = T\sin\theta - F_E = 0$$
$$\sum F_y = T\cos\theta - mg = 0$$

En divisant ces deux équations terme par terme et en isolant ensuite F_E, on obtient

$$F_E = mg\tan\theta = (0{,}002\text{ kg})(9{,}8\text{ m/s}^2)\tan 3° = 1{,}03\times10^{-3}\text{ N}$$

(On remarque qu'il est inutile de calculer le module de la tension T dans la corde.) En substituant dans l'équation 1.1, on a

$$1{,}03\times10^{-3}\text{ N} = (8{,}99\times10^{9}\text{ N·m}^2/\text{C}^2)|q_1q_2|/(0{,}10\text{ m})^2$$

Les deux sphères ayant été mises en contact entre elles, on sait qu'elles portent une charge identique : $q_1 = q_2 = Q$ et la valeur absolue ci-dessus a donc pu être retirée, ce qui serait possible même si le signe de Q était inconnu. Comme $|q_1q_2| = Q^2$, on obtient donc $Q = -3{,}38\times10^{-8}$ C. ■

Exemple 1.4

Une charge ponctuelle $q_1 = -9$ μC se trouve en $x = 0$ et $q_2 = 4$ μC se trouve en $x = 1$ m, toutes deux étant sur l'axe des x. En quel point du plan xy, autre que l'infini, la force électrique résultante exercée sur une charge q_3 est-elle nulle ?

Solution

Avant de calculer quoi que ce soit, il faut d'abord déterminer *qualitativement* la position de la charge q_3. Tout d'abord, on réalise qu'elle doit se trouver quelque part sur l'axe des x : sinon la résultante des forces exercées par les deux autres charges ne peut pas être nulle (car les forces ne sont pas antiparallèles). En tout point de l'axe entre q_1 et q_2, les forces exercées sur q_3 sont de même sens, donc cette région est à éliminer. Sur la partie de l'axe où x est négatif, $\vec{\mathbf{F}}_{31}$ et $\vec{\mathbf{F}}_{32}$ étant de sens opposés, il y a peut-être une possibilité qu'elles s'annulent.

Mais comme $F \propto 1/r^2$, pour que la force due à la plus petite des charges (q_2) arrive à compenser la force due à la plus grande charge (q_1), il faudrait que la charge q_3 soit *plus proche de la plus petite charge* q_2. Il reste donc la région $x > 1$ m sur l'axe des x. ■

À la figure 1.20, on a représenté les vecteurs forces dans le cas où q_3 est positif ; si q_3 est négatif, les vecteurs forces sont inversés, mais leurs *modules* demeurent les mêmes. Dans les deux cas, la condition pour que la force résultante exercée sur q_3 soit nulle est donc la même. Cette condition s'écrit

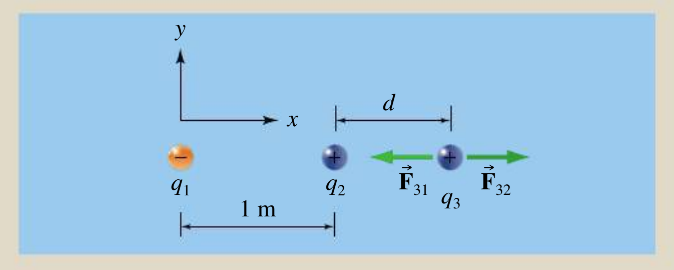
$$\vec{\mathbf{F}}_3 = \vec{\mathbf{F}}_{31} + \vec{\mathbf{F}}_{32} = 0$$

ou encore

$$\vec{\mathbf{F}}_{31} = -\vec{\mathbf{F}}_{32}$$

ce qui implique, en fonction du module des forces,

$$F_{31} = F_{32}$$



▲ **Figure 1.20**

On peut trouver le point où la force résultante sur q_3 est nulle. Ce point est plus proche de la charge ayant la plus petite valeur.

D'après la loi de Coulomb, en utilisant la distance d définie sur la figure, on obtient

$$\frac{k|q_3q_1|}{(1+d)^2} = \frac{k|q_3q_2|}{d^2}$$

Comme $k|q_3q_i| = k|q_3||q_i|$, on peut simplifier le facteur commun $k|q_3|$. Après cela, on remplace q_1 et q_2 par leurs valeurs. Il faut ensuite éviter de développer le carré, ce qui rendrait l'algèbre difficile à résoudre : il est plus simple de prendre la racine carrée de chaque membre, ce qui donne $3/(1 + d) = \pm 2/d$. Les solutions de cette équation sont $d = 2$ m et $d = -0{,}4$ m. De ces deux solutions, c'est donc $d = 2$ m qui est la réponse correcte à la question posée. On constate que le signe de q_3 n'a pas d'importance.

Exemple 1.5

Nous avons signalé l'analogie entre la forme de la loi de Coulomb et celle de la loi de la gravitation universelle. Dans un atome d'hydrogène, l'électron et le proton sont distants de $0{,}53 \times 10^{-10}$ m l'un de l'autre. Comparer les forces gravitationnelle et électrique agissant entre eux.

Solution

La force électrique a pour module

$$\begin{aligned} F_E &= \frac{ke^2}{r^2} \\ &= \frac{(8{,}99 \times 10^9\ \text{N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})^2}{(5{,}3 \times 10^{-11}\ \text{m})^2} \\ &= 8{,}19 \times 10^{-8}\ \text{N} \end{aligned}$$

La force gravitationnelle a pour module

$$\begin{aligned} F_g &= \frac{Gm_em_p}{r^2} \\ &= \frac{(6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2/\text{kg}^2)(9{,}11 \times 10^{-31}\,\text{kg})(1{,}67 \times 10^{-27}\,\text{kg})}{(5{,}3 \times 10^{-11}\ \text{m})^2} \\ &= 3{,}61 \times 10^{-47}\ \text{N} \end{aligned}$$

Le rapport des forces

$$\frac{F_g}{F_E} = \frac{Gm_em_p}{ke^2} = 4{,}4 \times 10^{-40}$$

est extrêmement petit et ne dépend pas de la distance r.

On voit donc que la force gravitationnelle est négligeable par rapport à l'interaction électrique entre des particules élémentaires. Cela permet également d'expliquer pourquoi un peigne chargé parvient à soulever une feuille de papier, c'est-à-dire à surmonter la force gravitationnelle exercée par la Terre tout entière ! ■

On a pu montrer que la loi de Coulomb prédit toujours des résultats valables à des distances de l'ordre de 10^{-15} m. On a pu vérifier que l'exposant n figurant au dénominateur de $1/r^n$ est égal à 2 avec une incertitude de $\pm 10^{-16}$. L'interaction de Coulomb étant l'interaction fondamentale entre des charges électriques, elle est à la base de l'électromagnétisme.

SUJET CONNEXE

La conformation des protéines

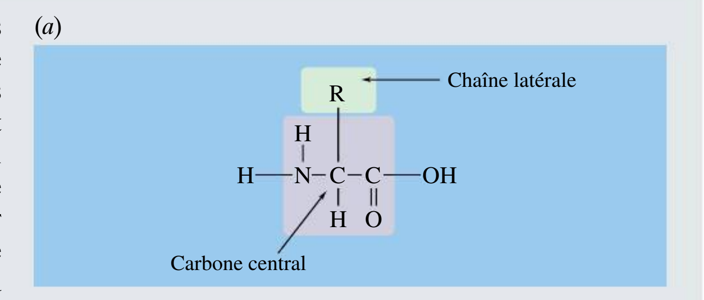
Si on en retirait l'eau, environ la moitié de la masse « sèche » du corps humain serait composée de *protéines*, une catégorie de composés qui sont des polymères d'acides aminés. Un *polymère* est simplement une très grande molécule constituée de molécules plus petites liées bout à bout, à la façon de perles formant un collier. Dans le cas des protéines, il y a 20 sortes de « perles », appelées *acides aminés*, dont nous verrons la structure plus loin. Il n'y a pas de limite à la longueur d'une telle chaîne, de sorte que les protéines peuvent être énormes (contenir des milliers, voire des dizaines de milliers d'atomes). Les protéines jouent des rôles divers, depuis les enzymes qui catalysent des réactions biochimiques précises jusqu'aux pompes qui assurent le transport d'ions spécifiques de part et d'autre des membranes cellulaires, en passant par les protéines qui ont un rôle structural.

Pour remplir de tels rôles, la longue chaîne d'acides aminés doit se replier sur elle-même et adopter une forme tridimensionnelle spécifique. Par exemple, les protéines appelées canaux transmembranaires doivent avoir la forme d'un cylindre creux formant un tunnel permettant à certains ions de traverser une membrane cellulaire ; les protéines appelées enzymes doivent avoir un *site actif* dont la forme tridimensionnelle épouse approximativement celle d'une molécule qui viendra s'y lier afin de subir la catalyse, etc. Bien que la synthèse de la chaîne d'acides aminés fasse appel à la machinerie génétique de la cellule, la façon dont cette chaîne, une fois synthétisée, adopte une forme tridimensionnelle spécifique est *un phénomène purement physique*. En effet, si on synthétise en laboratoire une chaîne d'acides aminés simple et qu'on la place dans une solution aqueuse reproduisant les mêmes conditions (température, présence d'ions, pH, etc.) que dans une cellule, cette chaîne adopte spontanément la forme appropriée. Ce sujet connexe montre comment la force électrique est au cœur de ce phénomène.

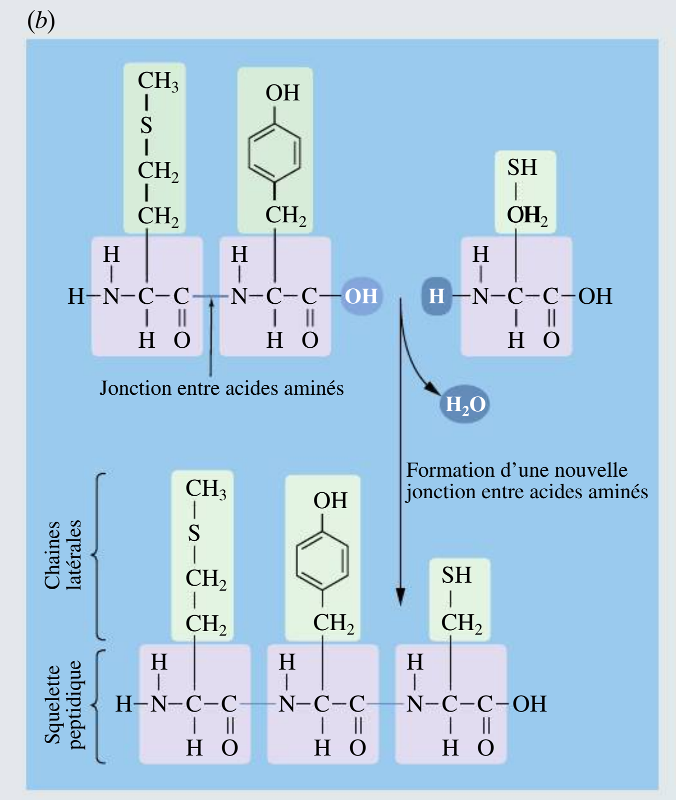
Commençons par décrire le polymère d'acides aminés, ce qui nous permettra ensuite d'envisager comment il se replie spontanément sur lui-même. D'abord, les protéines sont synthétisées à partir de 20 acides aminés différents. Quand on en place deux bout à bout, il existe donc $20^2 = 400$ possibilités de combinaisons. Si on en place trois, le nombre de possibilités grimpe à $20^3 = 8000$. Puisque les protéines humaines comportent jusqu'à 34 000 acides aminés et que, en plus, la cellule peut modifier chimiquement certains acides aminés après la synthèse de la chaîne, on comprend que les possibilités de protéines différentes sont pratiquement illimitées. La séquence spécifique d'acides aminés est la *structure primaire* d'une protéine.

Les 20 acides aminés sont tous composés d'un atome de carbone central auquel sont attachés un groupement —COOH (acide) et un groupement $—NH_2$ (amine) (figure 1.21*a*). Ils ne diffèrent que par leur *chaîne latérale*, c'est-à-dire le groupe de 1 à 18 atomes lié au carbone central (représenté par la lettre R sur fond vert dans la figure). La cellule forme le polymère grâce aux groupements acide et amine, communs à tous les acides aminés, en éliminant une molécule d'eau chaque fois qu'une jonction supplémentaire est faite (figure 1.21*b*). Le polymère obtenu comporte donc un *squelette peptidique* où la séquence NH—CHR—CO se répète à tous les trois atomes (en mauve dans la figure 1.21*b*). Sur un schéma, les chaînes latérales des acides aminés se trouvent donc accrochées latéralement à ce squelette (d'où leur nom). Trois chaînes latérales différentes sont représentées dans les encadrés verts à la figure 1.21*b*.

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 1.21**

(*a*) La structure d'un acide aminé. La chaîne latérale R peut correspondre à 20 groupements possibles, le plus petit étant un simple atome d'hydrogène (dans la glycine), et le plus volumineux comportant 18 atomes formant un double cycle (dans le tryptophane). (*b*) La machinerie cellulaire réunit les acides aminés bout à bout en joignant le groupement —COOH d'un acide aminé au groupement $—NH_2$ de l'acide aminé suivant ; une molécule d'eau est éliminée lors de ce processus, de sorte que le lien obtenu a la forme —CO—NH—. La séquence NH—CHR—CO se répète périodiquement dans le polymère obtenu.

La structure secondaire

Le groupement CO du squelette peptidique comporte un atome d'oxygène (O) et un atome de carbone (C) qui mettent en commun quatre électrons pour former une double liaison covalente. Or, l'oxygène est beaucoup plus *électronégatif* que le carbone, ce qui signifie que la force électrique résultante qu'il exerce à mi-chemin de la liaison (sur les électrons) est plus élevée que celle exercée par le carbone. Il en résulte que la position la

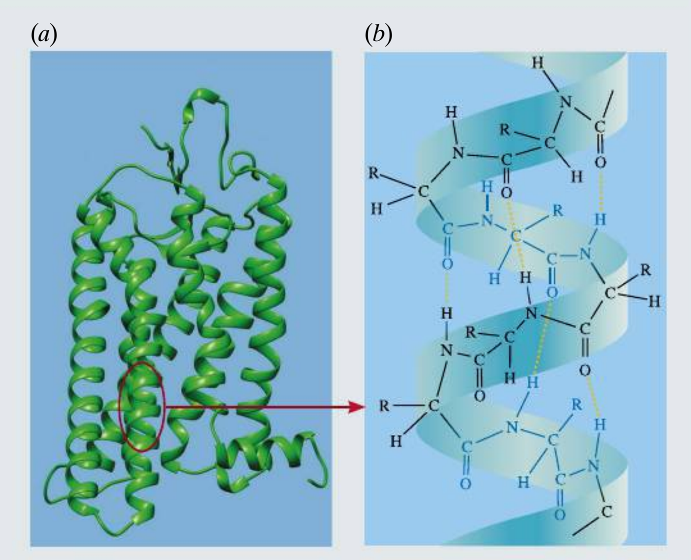


plus probable des électrons n'est pas à mi-chemin entre les deux atomes mais plus proche de l'oxygène. En d'autres termes, l'oxygène est légèrement négatif et le carbone est légèrement positif, sans pour autant que les atomes soient complètement ionisés. La situation est la même dans le cas du groupement NH, où l'azote (N) est plus électronégatif que l'hydrogène (H) et acquiert donc une charge partielle négative.

Puisque le squelette peptidique est formé aux deux tiers de groupements CO et NH, il comporte un très grand nombre de charges partielles. Or, c'est la force électrique entre des atomes d'hydrogène (légèrement positifs) et des atomes d'oxygène situés ailleurs sur le squelette peptidique (légèrement négatifs) qui est à l'origine du repliement du polymère, au terme duquel celui-ci adoptera la forme tridimensionnelle qui lui permettra de remplir sa fonction. Cette attraction entre l'hydrogène et l'oxygène des groupements NH et CO est particulièrement forte. En effet, l'hydrogène met en commun son *unique* électron dans le lien covalent avec l'azote, de sorte que le noyau de l'atome d'hydrogène est très « dégarni » et peut s'approcher très près de l'atome d'oxygène. Puisque le facteur $1/r^2$ de la loi de Coulomb est très sensible à une faible variation de distance, une faible diminution de la distance entre l'hydrogène et l'oxygène entraîne une augmentation substantielle de la force d'attraction entre ces atomes. Une fois que ceux-ci sont à proximité l'un de l'autre, ils sont difficiles à séparer, car ils ont une énergie potentielle électrique minimale (voir le chapitre 4). On dit qu'ils forment un *pont hydrogène*. Les ponts hydrogène, sans être aussi forts qu'une liaison ionique ou covalente*, peuvent avoir un effet très important s'ils sont nombreux, ce qui est justement le cas dans toute protéine. Les ponts hydrogène sont représentés par des pointillés jaunes dans les figures de ce manuel.

Immédiatement après la synthèse du polymère d'acides aminés, le hasard des collisions avec les molécules d'eau le fait changer de forme jusqu'à ce que des ponts hydrogène commencent à s'établir. La façon dont les groupements appartenant au squelette peptidique forment des ponts hydrogène *entre eux* détermine la *structure secondaire* de la protéine.

Étant donné l'encombrement des chaînes latérales, dont certaines sont imposantes, le squelette peptidique ne dispose que de deux façons de se placer pour maximiser le nombre de ponts hydrogène formés et minimiser son énergie**. Dans un segment du polymère constitué en majorité d'acides aminés ayant des chaînes latérales étroites, allongées et non chargés, la structure secondaire la plus probable est celle de l'*hélice* α (figure 1.22), où chaque groupement NH du squelette peptidique forme un pont hydrogène avec le groupement CO situé quatre acides aminés plus loin le long du polymère. Dans un segment du polymère composé de plusieurs



▲ **Figure 1.22**

Quand plusieurs acides aminés successifs ont une chaîne latérale allongée et non chargée, le squelette peptidique forme souvent une *hélice* α. (*a*) On peut visualiser cette structure secondaire en illustrant seulement le squelette peptidique sous forme d'un ruban, les chaînes latérales étant omises. (*b*) Dans une hélice α, il y a autant de ponts hydrogène que d'acides aminés, puisque chaque groupement NH forme un pont hydrogène avec le groupement CO situé quatre acides aminés plus loin. Chaque tour de l'hélice comprend presque quatre acides aminés.

acides aminés successifs possédant des chaînes latérales très encombrantes ou débutant par un embranchement, la structure secondaire la plus probable est celle du *feuillet* β (figure 1.23), où des tronçons antiparallèles (ou, parfois, parallèles) du squelette peptidique se placent côte à côte dans un même plan pour former des ponts hydrogène entre eux.

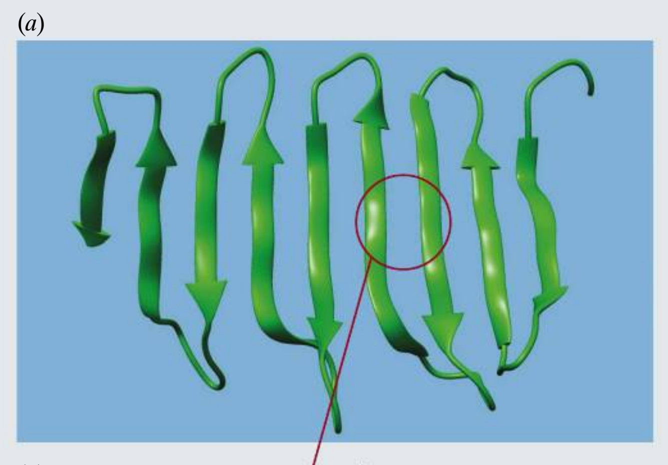
La structure tertiaire

Une fois que le squelette peptidique a formé sa structure secondaire (ce qui prend une fraction de seconde à 37 °C), la protéine n'a pas encore acquis la conformation tridimensionnelle requise pour pouvoir remplir sa fonction. Toutefois, les hélices α et les feuillets β interagissent entre eux et avec le milieu ambiant pour

* L'énergie requise pour rompre un pont hydrogène s'explique à 90 % par l'interaction électrostatique. Le reste de l'énergie correspond à un caractère covalent très partiel.

** La structure la plus stable est celle dont les atomes forment le plus de ponts hydrogène entre eux, mais cela ne représente *pas* un minimum d'énergie potentielle électrique. En effet, si on rompait tous les ponts hydrogène entre un groupement NH et un groupement CO, chacun de ces groupements formerait un pont hydrogène avec une molécule d'eau, ce qui doublerait le nombre de ponts hydrogène et diminuerait *encore plus* l'énergie potentielle électrique. Mais le système tend vers l'inverse, c'est-à-dire former le maximum de ponts hydrogène « internes ». En effet, l'état le plus stable minimise l'*énergie libre* (voir le chapitre 19 du tome 1) et non la seule énergie potentielle électrique. L'énergie libre tient compte de l'entropie des molécules d'eau, qui croît sensiblement quand celles-ci cessent d'intervenir dans la formation de ponts hydrogène avec la protéine.

(*a*)



(*b*)

▲ **Figure 1.23**

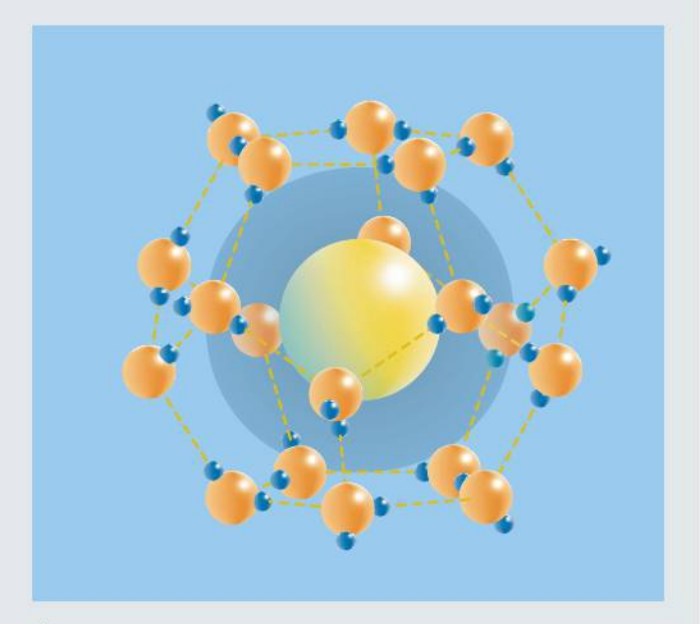
Quand plusieurs acides aminés ont une chaîne latérale encombrante, le squelette peptidique forme un zigzag où les chaînes latérales sont disposées alternativement de part et d'autre, ce qui favorise la formation de *feuillets β*, où des segments du squelette peptidique se placent côte à côte. (*a*) On peut visualiser cette structure secondaire en illustrant le squelette peptidique sous la forme de rubans plats terminés par une flèche, les chaînes latérales étant omises. Cette flèche indique le sens NH—CHR—CO (par opposition à CO—CHR—NH). (*b*) Dans un feuillet *β*, chaque groupement NH forme un pont hydrogène avec un groupement CO du segment adjacent. Les segments peuvent être antiparallèles (cas illustré) ou parallèles.

adopter une position relative qui minimise leur énergie. Cette position relative finale de tous les atomes constitue la *structure tertiaire* de la protéine.

Le plus souvent, les interactions dont dépend l'établissement de la structure tertiaire se produisent grâce aux chaînes latérales. D'abord, certaines chaînes latérales portent des charges opposées (ou des dipôles électriques ; voir la section 2.6) et peuvent donc exercer l'une sur l'autre une force donnée par la loi de Coulomb (où on utilise $\kappa \approx 80$, car le phénomène se produit dans l'eau). Certaines peuvent aussi former des ponts hydrogène entre elles (alors que les ponts hydrogène de la structure secondaire n'impliquaient pas les chaînes latérales). Mais l'effet le plus important est dû à la façon dont les molécules d'eau du milieu ambiant interagissent avec les chaînes latérales.

En effet, dans l'eau pure, les molécules d'eau voisines sont en mesure de former entre elles des ponts hydrogène (qui se brisent et se reforment à chaque instant) afin de minimiser leur énergie potentielle électrique. L'ajout d'un ion ou d'une chaîne latérale portant un ion perturbe peu ce réseau de ponts hydrogène, puisque les molécules d'eau peuvent former des ponts hydrogène avec l'ion. De façon semblable, une molécule ou une chaîne latérale polaire (voir la section 2.6) peut interagir avec l'eau. En revanche, l'eau ne peut former aucun pont hydrogène avec un objet non polaire, car celui-ci ne peut subir aucune force électrique. Les molécules d'eau qui entourent l'objet non polaire sont donc contraintes de se placer d'une façon très précise, où elles sont en mesure de maximiser les ponts hydrogène *entre elles* : aucune molécule d'eau ne peut pointer l'un ou l'autre de ses atomes d'hydrogène en direction de la molécule non polaire, sinon elle risque de « perdre » un pont hydrogène (figure 1.24). Les collisions thermiques ont tendance à détruire cette structure. En d'autres termes, celle-ci n'est pas entropiquement favorisée (le concept d'entropie a été vu au chapitre 19 du tome 1).

Considérons deux microgouttes d'huile, chacune étant entourée d'une couche de molécules d'eau qui sont contraintes de ne pointer aucun atome d'oxygène vers la goutte, comme à la figure 1.24. Si au hasard des collisions thermiques les deux gouttes parviennent à se regrouper, le nombre de molécules d'eau requises pour entourer la goutte fusionnée est moindre. Ainsi, le regroupement des objets non polaires les uns contre les autres permet de « libérer » des molécules d'eau qui



▲ **Figure 1.24**

Un objet non polaire immergé (en jaune) force l'eau à former une « cage » autour de lui, aucune des molécules d'eau ne pouvant pointer un de ses atomes d'hydrogène vers l'intérieur.



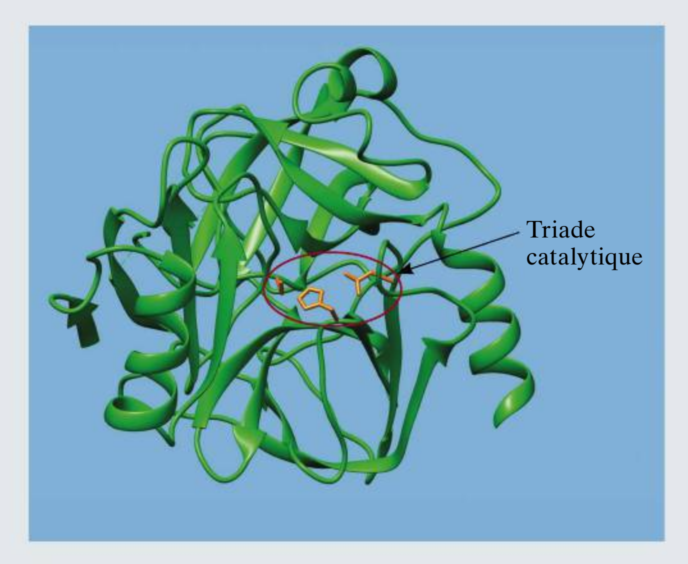
peuvent alors adopter toute position sans contrainte énergétique. Il en résulte l'*apparence* d'une force attractive entre les objets non polaires, qu'on appelle l'*interaction hydrophobe*. Physiquement, cette « force » est causée par les chocs avec les molécules d'eau de l'environnement, qui, une fois les objets non polaires rassemblés les uns contre les autres, tendent à maintenir ceux-ci dans cette position. C'est ce phénomène qui explique, par exemple, que les gouttelettes d'huile dans une vinaigrette tendent spontanément à se rassembler (et à flotter sur le dessus). L'interaction hydrophobe n'est certes pas donnée par la loi de Coulomb (il faut avoir recours au concept d'entropie pour la calculer), mais en l'absence de la force électrique poussant les molécules d'eau à former des ponts hydrogène entre elles, l'interaction hydrophobe n'aurait pas lieu, car les molécules d'eau pourraient se placer de n'importe quelle façon en contact avec des objets polaires ou non polaires.

Dans une protéine, une fois que la structure secondaire est établie, l'interaction hydrophobe a tendance à rassembler les unes contre les autres la majorité des chaînes latérales non polaires, lesquelles se retrouvent compactées à l'intérieur de la protéine, alors que les chaînes latérales polaires ou chargées demeurent à l'extérieur, en contact avec l'eau du milieu ambiant. Il y a des exceptions où on rencontre plutôt l'inverse, les chaînes latérales non polaires se trouvant à l'extérieur : c'est ce qui se produit avec des protéines insérées dans un milieu ambiant qui est lui-même non polaire, comme une membrane cellulaire. Mais dans les deux cas, l'interaction hydrophobe demeure souvent le moteur principal qui « guide » ou « dicte » le processus de repliement de la structure tertiaire de la protéine.

Une fois sa structure tertiaire établie, le polymère d'acides aminés est souvent devenu une protéine fonctionnelle. Dans d'autres cas, quelques polymères ayant constitué leur structure tertiaire doivent se coller les uns aux autres pour former la protéine fonctionnelle. Le cas échéant, la façon dont se réunissent des structures tertiaires constitue la *structure quaternaire* de la protéine finale.

Puisque le repliement d'une protéine comporte plusieurs étapes et se fait sans interventions extérieures, il arrive parfois qu'il se produise de façon incorrecte. La conformation adéquate de la protéine est typiquement celle où l'énergie est minimale, mais il peut arriver que la protéine se trouve captive d'un minimum local d'énergie qui n'est pas le minimum absolu. De telles protéines ne sont pas fonctionnelles. Il peut même arriver qu'elles interagissent avec des protéines conformées correctement et les forcent à prendre la même conformation incorrecte que la leur. On appelle *prions* les protéines dysfonctionnelles ayant ce comportement ; celles-ci sont en cause dans plusieurs maladies, dont la fibrose kystique, la maladie d'Alzheimer et la « maladie de la vache folle ».

La figure 1.25 montre un exemple d'une protéine dans sa conformation fonctionnelle. Il s'agit d'une enzyme digestive, la chymotrypsine. On y voit trois hélices α (dont l'une est très courte) et plusieurs brins de feuillets β. Les chaînes latérales sont omises, à l'exception de trois d'entre elles, représentées en orange, qui assurent à elles seules l'action catalytique de l'enzyme (quelques autres aident aussi à stabiliser le substrat en place pendant qu'il subit la catalyse). Fait intéressant : on note qu'il ne s'agit pas du tout de trois acides aminés consécutifs dans la structure primaire de la protéine. En conséquence, toute la protéine doit avoir adopté sa conformation tridimensionnelle adéquate pour que les trois acides aminés de la *triade catalytique* se retrouvent côte à côte, ce qui est indispensable au bon fonctionnement de la protéine. En somme, plus de 200 acides aminés ne servent à peu près qu'à maintenir trois d'entre eux en place !



▲ **Figure 1.25**

La *chymotrypsine*, une enzyme digestive, ne doit son action catalytique qu'à trois chaînes latérales : la 57e, la 102e et la 195e de la structure primaire. Toute la structure sert surtout à maintenir ces trois acides aminés en place, côte à côte. On reconnaît dans cette structure trois hélices α et plusieurs brins de feuillets β. Sans la force électrique, cette longue chaîne ne prendrait jamais cette forme tridimensionnelle.

RÉSUMÉ



La charge électrique est une propriété attribuée à la matière capable de produire et de subir des forces électriques. Selon le principe de conservation de la charge, la charge totale dans un système isolé est constante. La charge est quantifiée, ce qui signifie que la charge portée par un corps ne peut prendre que des valeurs discrètes. En d'autres termes, toute charge q est donnée par $q = \pm ne$, où n est un entier et $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C, la charge élémentaire.

Un conducteur est un matériau dans lequel la charge peut circuler. Selon la représentation microscopique (atomique) des matériaux, les charges en mouvement dans un métal sont les électrons libres, aussi appelés électrons de conduction. Dans les gaz ionisés et les solutions électrolytiques, ce sont les ions positifs ou négatifs qui peuvent se déplacer. Dans un isolant, les charges sont liées à des sites déterminés et ne peuvent se déplacer. Un semi-conducteur se comporte comme un isolant lorsqu'il est très pur. On peut modifier son pouvoir conducteur en lui ajoutant certaines impuretés.

Le module de la force électrique qu'exercent l'une sur l'autre deux charges *ponctuelles* q et Q séparées par une distance r est donnée par la loi de Coulomb :

$$F = \frac{k|qQ|}{r^2} \qquad (1.1)$$

Il s'agit d'une force *radiale* (elle a pour direction la droite joignant les deux charges) et de *symétrie sphérique* (elle est fonction de r uniquement). Sauf dans le cas d'une distribution de charge de symétrie sphérique, la loi de Coulomb ne s'applique *pas* directement aux corps de forme quelconque.

Tout comme la force gravitationnelle, la force électrique obéit au principe de la superposition :

$$\vec{\mathbf{F}}_1 = \vec{\mathbf{F}}_{12} + \vec{\mathbf{F}}_{13} + \ldots + \vec{\mathbf{F}}_{1N} \qquad (1.3)$$

Ce principe veut que la force entre deux particules ne dépend pas des autres charges en présence. On utilise ce principe pour déterminer la force résultante exercée sur une particule par d'autres particules chargées.

TERMES IMPORTANTS

charge électrique (p. 5)
charge élémentaire (p. 7)
conducteur (p. 10)
conservation de la charge (p. 8)
coulomb (p. 7)
électromagnétisme (p. 4)
électron (p. 6)
électron de conduction (p. 11)
électron libre (p. 11)
électroscope à feuilles (p. 13)
électrostatique (p. 5)
force électrique (p. 5)
induction (p. 12)
ion (p. 6)
isolant (p. 10)
loi de Coulomb (p. 15)
neutron (p. 6)
permittivité du vide (p. 16)
principe de superposition (p. 17)
proton (p. 6)
semi-conducteur (p. 10)
temps de relaxation (p. 11)

RÉVISION

R1. Nommez quelques phénomènes physiques facilement observables qui sont de nature électromagnétique.

R2. Énoncez les propriétés fondamentales de la charge électrique.

R3. Quel physicien a le premier utilisé les qualificatifs « positive » et « négative » pour distinguer les deux types de charge ?

R4. Expliquez ce qui se passe au niveau atomique lorsqu'on fait apparaître par frottement sur un objet (a) une charge positive ; (b) une charge négative.

R5. Donnez des exemples de réactions qui mettent en évidence la conservation de la charge électrique.

R6. Utilisez la notion de temps de relaxation pour expliquer la différence entre un conducteur et un isolant.

R7. Expliquez à l'aide d'un schéma comment on peut charger par induction (a) une sphère conductrice et (b) deux sphères conductrices initialement en contact. On dispose d'une tige chargée positivement et d'une mise à la terre.

R8. Expliquez à l'aide d'un schéma comment on peut se servir d'un électroscope à feuilles pour déterminer le signe de la charge portée par un corps donné.

R9. Expliquez comment on peut utiliser un électroscope pour détecter des rayons ionisants.

R10. Décrivez le dispositif qu'a utilisé Coulomb pour découvrir la loi qui porte son nom. Comment pourrait-on mesurer la même chose en utilisant un équipement moderne ?

R11. Expliquez comment Coulomb a déterminé les valeurs des charges électriques portées par les sphères qu'il utilisait sur sa balance à torsion.

R12. Expliquez pourquoi on ne peut pas utiliser la loi de Coulomb telle qu'énoncée à l'équation 1.1 pour évaluer la force entre deux corps chargés de forme quelconque.

R13. Vrai ou faux ? La force exercée par une particule chargée A sur une particule chargée B est affectée par la présence d'une troisième particule chargée C.

QUESTIONS

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

Q1. Dans un noyau, la distance entre les protons est très petite ($\approx 10^{-15}$ m). Comment expliquez-vous que les éléments du noyau ne se séparent pas, malgré la forte répulsion coulombienne entre les protons ?

Q2. Puisque la force électrique est tellement plus intense que la force gravitationnelle, pourquoi ne l'observons-nous pas de façon plus directe ou plus fréquente ?

Q3. Peut-on charger un objet métallique en le frottant ? Expliquez pourquoi de façon détaillée.

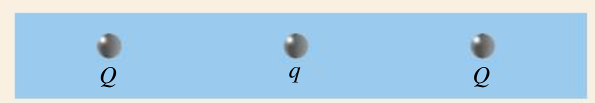
Q4. La charge produite par frottement est en général de l'ordre de 1 nC. Cette charge correspond à peu près à combien de charges élémentaires (e) ?

Q5. On approche d'une aiguille suspendue une tige en verre chargée positivement. Que pouvez-vous dire de la charge apparaissant sur l'aiguille sachant qu'il y a (a) attraction ; (b) répulsion ?

Q6. Comment feriez-vous pour déterminer le signe de la charge présente sur un corps ?

Q7. Une fine bandelette d'aluminium est attirée par un peigne que l'on a chargé en se le passant dans les cheveux. Qu'arrive-t-il une fois que la feuille d'aluminium a touché le peigne ? Faites l'expérience, puis expliquez ce que vous observez.

Q8. On place une charge ponctuelle q à mi-chemin entre deux charges ponctuelles d'égale valeur Q (figure 1.26). La charge q est-elle en équilibre ? Si oui, s'agit-il d'un équilibre stable ou instable ? On suppose que q et Q sont (a) de même signe et (b) de signes opposés. (*Indice* : Considérez de petits déplacements à partir du centre.)



▲ **Figure 1.26**
Question 8.

Q9. On approche une sphère métallique non chargée d'une charge ponctuelle. L'un ou l'autre de ces objets est-il soumis à une force ?

Q10. On charge deux sphères métalliques identiques et on les place côte à côte sans qu'elles se touchent. Peut-on calculer la force qui s'exerce entre les sphères à l'aide de la loi de Coulomb, si r est la distance entre les centres des deux sphères ? Justifiez votre réponse.

Q11. Un journal rapporte que l'on vient de découvrir une nouvelle particule élémentaire de charge $9{,}00 \times 10^{-19}$ C. Quelle est votre réaction ?

Q12. En quoi la conduction thermique est-elle différente de la conduction électrique ?

Q13. Lorsqu'on approche un objet chargé d'une des extrémités d'une tige métallique non chargée, des électrons se déplacent d'une extrémité à l'autre de la tige. Considérant qu'il y a un afflux considérable d'électrons, pourquoi la circulation d'électrons cesse-t-elle ?

Q14. Pourquoi les expériences d'électrostatique ont-elles tendance à moins bien réussir lorsque l'air est humide ? Trouvez le lien entre votre réponse et le fait que l'effet revigorant d'une douche est dû en partie aux charges portées par les gouttes d'eau.

Q15. À l'époque, pourquoi n'était-il pas conseillé d'essuyer un disque de phonographe avec un linge en laine ?

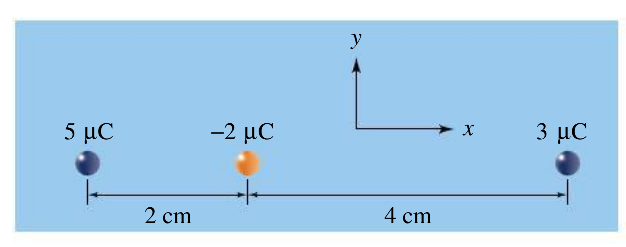
Q16. Vous avez sans doute déjà vu des camions ou des automobiles auxquels était accrochée une chaîne traînant sur la chaussée. Quelle est l'utilité de cette chaîne ?

EXERCICES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

Sauf avis contraire, dans les exercices qui suivent, on suppose que les charges sont dans le vide.

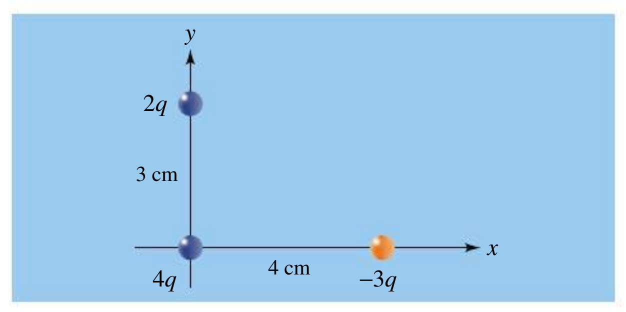
E1. (I) Trois charges ponctuelles sont situées sur une droite de la manière indiquée sur la figure 1.27. Trouvez la force électrique résultante, issue des deux autres charges, exercée sur (a) la charge de –2 μC; (b) la charge de 5 μC.



▲ **Figure 1.27**

Exercice 1.

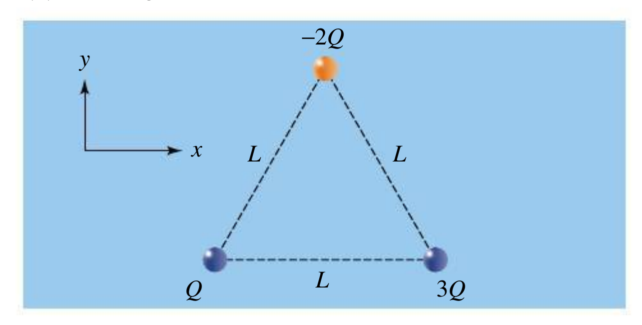
E2. (I) Soit trois charges ponctuelles dont les positions sont représentées à la figure 1.28. On donne $q = 1$ nC. Trouvez la force électrique résultante, issue des deux autres charges, exercée sur (a) la charge $4q$; (b) la charge $-3q$.



▲ **Figure 1.28**

Exercice 2.

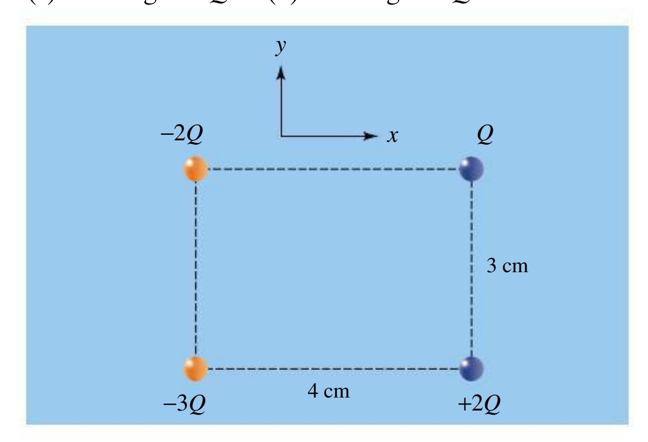
E3. MonLab (I) Soit trois charges ponctuelles situées aux sommets d'un triangle équilatéral, comme le montre la figure 1.29. On donne $Q = 2$ μC et $L = 3$ cm. Quelle est la force électrique résultante, issue des deux autres charges, exercée sur (a) la charge $3Q$ et (b) la charge $-2Q$?



▲ **Figure 1.29**

Exercice 3.

E4. (I) Soit quatre charges ponctuelles situées aux sommets d'un rectangle comme le montre la figure 1.30. On donne $Q = 4$ nC. Quelle est la force électrique résultante, issue des trois autres charges, exercée sur (a) la charge $-2Q$ et (b) la charge $-3Q$?



▲ **Figure 1.30**

Exercice 4.

E5. (I) Soit une charge ponctuelle $q_1 = 27$ µC située en $x = 0$ et une charge $q_2 = 3$ µC en $x = 1$ m, toutes deux sur l'axe des x. (a) En quel point du plan xy (ailleurs qu'à l'infini) la force électrique résultante exercée sur une troisième charge ponctuelle serait-elle nulle ? (b) Reprenez la question (a) avec $q_2 = -3$ µC. (c) Expliquez pourquoi il est impossible que q_3 soit à l'équilibre si elle est située ailleurs que sur l'axe des x.

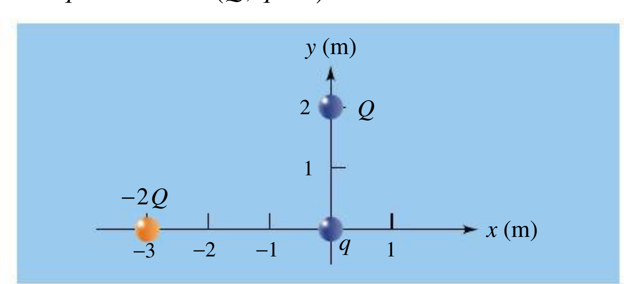
E6. MonLab (II) Supposons que l'on puisse donner une charge totale Q à la Terre et la même charge Q à la Lune. Pour quelle valeur de Q la répulsion électrique entre la Terre et la Lune serait égale à l'attraction gravitationnelle qu'elles exercent l'une sur l'autre ? (Les données relatives à la Terre et à la Lune figurent au début du livre.)

E7. (I) À quelle distance doit-on éloigner un électron d'un proton pour que le module de la force électrique qu'ils exercent l'un sur l'autre soit égal à 1 N ?

E8. (I) Un noyau d'uranium radioactif a une charge de $92e$. Il peut se désintégrer spontanément en un noyau de thorium de charge $90e$ et un noyau d'hélium (particule α) de charge $2e$. Juste après la transformation, l'hélium et le thorium sont distants de 3×10^{-15} m l'un de l'autre. (a) Quel est le module de la force électrique qu'ils exercent l'un sur l'autre à ce moment précis ? (b) Quel est le module de l'accélération de la particule α, de masse $6{,}7 \times 10^{-27}$ kg ?

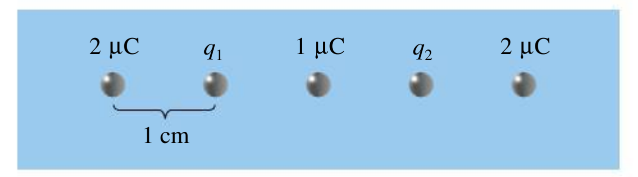
E9. (I) (a) Dans la molécule de H_2, les deux protons sont séparés par une distance de $0{,}74 \times 10^{-10}$ m. Quel est le module de la force électrique qu'ils exercent l'un sur l'autre ? (b) Dans un cristal de NaCl, les ions Na^+ et Cl^- sont distants de $2{,}82 \times 10^{-10}$ m. Quel est le module de la force électrique qu'ils exercent l'un sur l'autre ?

E10. MonLab (II) Trois charges ponctuelles, q, Q et $-2Q$, se trouvent aux positions indiquées à la figure 1.31. (a) Quelle est la force électrique résultante exercée sur la charge q ? (b) Où doit-on placer une charge ponctuelle de $+2{,}5Q$ pour que la force résultante sur q soit nulle ? (Q, $q > 0$)



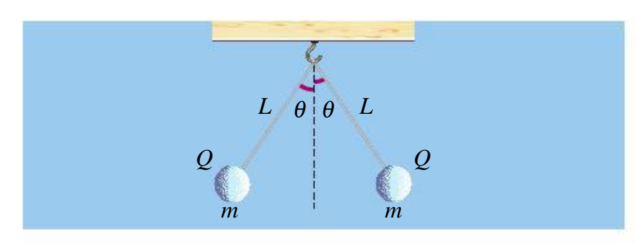
▲ **Figure 1.31**
Exercice 10.

E11. (II) La figure 1.32 représente cinq charges ponctuelles placées sur une droite, à intervalles de 1 cm. Pour quelles valeurs de q_1 et de q_2 la force électrique résultante exercée sur chacune des trois autres charges est-elle nulle ?



▲ **Figure 1.32**
Exercice 11.

E12. MonLab (II) Soit deux boules identiques en mousse de polystyrène, de charge identique Q et de masse $m = 2$ g. On les suspend par des fils de longueur $L = 1$ m (figure 1.33). À cause de la répulsion électrique mutuelle des deux boules, les fils font un angle de 5° par rapport à la verticale. Trouvez la valeur de Q.



▲ **Figure 1.33**
Exercice 12.

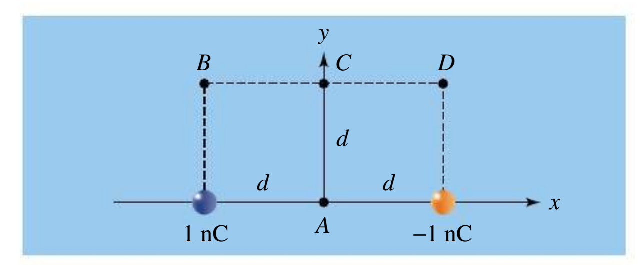
E13. (II) Supposons que l'on puisse séparer les électrons et les protons contenus dans 1 g d'hydrogène et qu'on les mette respectivement sur la Terre et sur la Lune. Comparez l'attraction électrique avec la force gravitationnelle entre la Terre et la Lune. (Le nombre d'atomes dans 1 g d'hydrogène est égal au nombre d'Avogadro, N_A. Chaque atome d'hydrogène possède un électron et un proton.)

E14. MonLab (II) (a) Soit une charge ponctuelle Q en $x = 0$ et une seconde charge $9Q$ en $x = 4$ m. Où doit-on placer une troisième charge q pour que la force électrique résultante sur chacune des trois charges soit nulle ? Quelle est la valeur de q ? (b) Reprenez la question (a) en remplaçant $9Q$ par $-9Q$.

E15. (I) Deux boules de mousse de polystyrène se trouvent à 4 cm l'une de l'autre et se repoussent avec une force électrique de module 0,2 N. Trouvez les valeurs des deux charges sachant que l'une des boules a une charge qui correspond au double de l'autre.

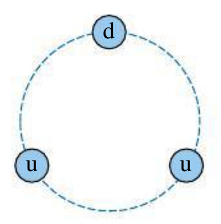
E16. (II) Deux charges de même grandeur et de signes opposés (±1 nC) sont séparées par une distance $2d$, où $d = 1$ cm (figure 1.34). Déterminez la force

électrique résultante qui s'exerce sur une charge 2 nC lorsqu'elle se trouve au point (a) A ; (b) B ; (c) C ; et (d) D.



▲ **Figure 1.34**
Exercice 16.

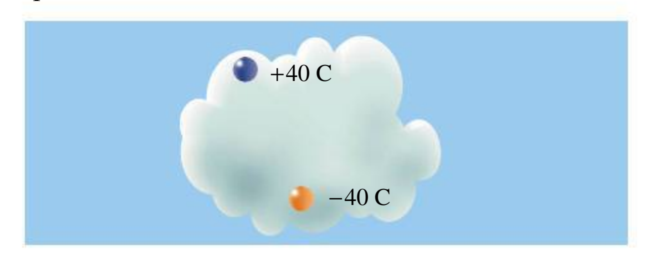
E17. (I) Dans le modèle des particules élémentaires qui fait intervenir les quarks, un proton est constitué de deux quarks « up » (u) portant chacun la charge $2e/3$ et d'un quark « down » (d), de charge $-e/3$. (a) En supposant que ces particules sont situées à égales distances sur un cercle de rayon $1{,}2 \times 10^{-15}$ m, comme sur la figure 1.35, trouvez le module de la force électrique agissant sur chaque quark. (b) Le proton étant stable, peut-on conclure que les seules forces s'exerçant entre des quarks sont les forces électrique et gravitationnelle ?



▲ **Figure 1.35**
Exercice 17.

E18. MonLab (I) Soit deux charges ponctuelles $q_1 = 2\ \mu C$ situées en (2 m, 1 m) et $q_2 = -5\ \mu C$ en (–2 m, 4 m). Trouvez la force électrique exercée par q_1 sur q_2.

E19. (I) Dans un nuage d'orage se trouvent deux charges de même grandeur et de signes opposés (±40 C) distantes de 5 km (figure 1.36). En supposant qu'elles peuvent être considérées comme des charges ponctuelles, quel est le module de la force électrique qu'elles exercent l'une sur l'autre ?

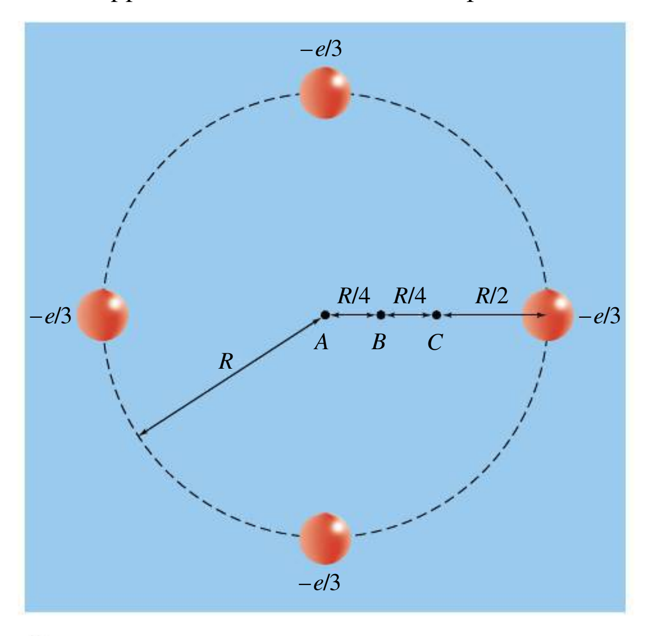


▲ **Figure 1.36**
Exercice 19.

E20. (I) En utilisant les données du tableau périodique (annexe D), calculez le nombre d'électrons que contient 1 kg des matériaux suivants : (a) du cuivre (Cu) ; (b) de l'hydrogène (H) ; (c) de l'acide sulfurique (H_2SO_4).

E21. MonLab (I) La sphère creuse d'un générateur de Van de Graaff, faite d'aluminium, a une masse de 0,1 kg. Une fois chargée, elle porte une charge de –3 μC. Comparez le nombre d'électrons excédentaires que porte la sphère chargée et le nombre d'atomes qui la compose. Utilisez les données du tableau périodique (annexe D).

E22. (II) Une protéine (voir le sujet connexe de la section 1.5) en forme d'étroit canal permet aux ions K^+ de traverser une membrane cellulaire. Une section transversale de ce canal a la forme d'un cercle de rayon $R = 0{,}25$ nm délimité par quatre des atomes d'oxygène de la protéine (figure 1.37), qui portent tous une charge $-e/3$. (La figure 4.28, p. 150, montre une vue latérale.) En considérant que les charges sont dans le vide, calculez le module de la force latérale que subit un ion de charge $+e$ s'il passe au point (a) A ; (b) B ; (c) C. (d) Tracez le graphique de ce module en fonction de r, la distance au centre, quand l'ion s'approche directement d'un des quatre atomes.



▲ **Figure 1.37**
Exercice 22.

P1. (I) On donne trois charges ponctuelles q_1, q_2 et q_3, situées aux sommets d'un triangle équilatéral de côté 10 cm. Les modules des forces électriques qui s'exercent entre elles sont F_{12} = 5,4 N (attractive), F_{13} = 15 N (répulsive) et F_{23} = 9 N (attractive). Sachant que q_1 est négative, quelles sont les valeurs de q_2 et de q_3 ?

P2. (II) Deux charges ponctuelles égales à Q sont situées sur l'axe des y en $y = a$ et $y = -a$. (a) Quelle est la force électrique exercée sur une charge q située en $(x, 0)$? (b) En vous servant du calcul différentiel, calculez pour quelle valeur de x le module de la force est maximal. (c) Après avoir fixé une valeur pour a, q et Q, tracez le graphe donnant le module de la force en fonction de x et vérifiez le résultat obtenu en (b). (d) Lorsque $x \gg a$, quelle est la forme de $F(x)$? $(Q, q > 0)$ (*Indice*: Utilisez l'approximation du binôme $(1 + z)^n \approx 1 + nz$ pour les petites valeurs de z.)

P3. MonLab (II) Soit deux charges ponctuelles, $-Q$ située en $(0, -a)$ et $+Q$ en $(0, a)$. (a) Déterminez la force électrique exercée sur une charge q située en $(x, 0)$. (b) En quel point la force est-elle maximale ? $(Q, q > 0)$

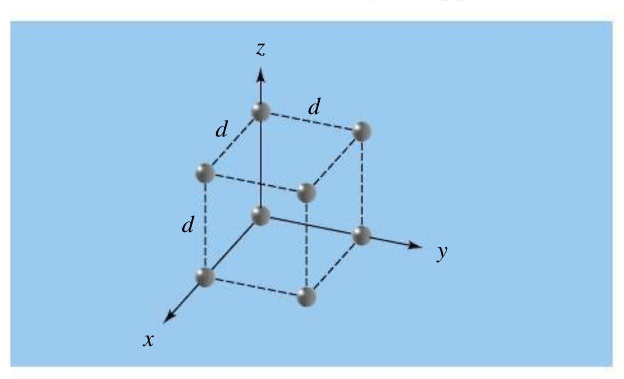
P4. (I) Soit deux charges ponctuelles, $-Q$ située en $(0, -a)$ et $+Q$ en $(0, a)$. (a) Déterminez la force électrique exercée sur une charge q située en $(0, y)$, avec $y > a$. (b) Quelle est la forme de $F(y)$, le module de la force en fonction de y, pour $y \gg a$? $(Q, q > 0)$ (*Indice*: Utilisez l'approximation du binôme $(1 + z)^n \approx 1 + nz$ pour les petites valeurs de z.)

P5. (I) On cherche à diviser une charge Q en deux parties, q et $(Q - q)$, de telle sorte que, pour une distance donnée, la force électrique qu'elles exercent l'une sur l'autre soit maximale. Quelle est la valeur de q ? (*Indice*: En calcul différentiel et intégral, quelle est la condition pour qu'une fonction soit maximale ?)

P6. (II) Deux petites sphères métalliques identiques et distantes de 3 cm s'attirent l'une l'autre avec une force électrique de module 150 N. On les relie provisoirement par un fil conducteur, qu'on retire ensuite. (a) Déterminez les charges électriques initiales si elles se repoussent maintenant avec une force de module 10 N. (On suppose que la charge de chaque sphère est répartie uniformément.) (b) À partir d'une analyse graphique, montrez que si la force électrique initiale est répulsive, la situation est irréaliste.

P7. (I) Soit deux sphères en cuivre de 10 g séparées par une distance de 10 cm. (a) Combien d'électrons doit perdre chaque sphère pour que les sphères se repoussent avec une force électrique de 10 N ? (On suppose que chaque sphère perd le même nombre d'électrons.) (b) À quelle fraction du nombre total d'électrons de chaque sphère correspond le résultat trouvé en (a) ? (*Indice*: Le nombre d'atomes dans 63,5 g de cuivre est le nombre d'Avogadro. Il y a 29 électrons dans un atome de cuivre.)

P8. (II) Huit charges identiques Q sont situées aux sommets d'un cube de côté d (figure 1.38). Un des sommets du cube est à l'origine et trois de ces faces sont parallèles aux plans formés par le système d'axes. Déterminez la force électrique résultante agissant sur la charge située en $\vec{\mathbf{r}} = d\vec{\mathbf{i}} + d\vec{\mathbf{j}} + d\vec{\mathbf{k}}$, sachant que : (a) toutes les charges sont de même signe ; (b) la charge à l'origine est négative et les charges de deux sommets consécutifs sont de signes opposés.



▲ **Figure 1.38**
Problème 8.

P9. (II) Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, un électron gravite autour d'un proton stationnaire sur une orbite circulaire de rayon r. (a) Écrivez la deuxième loi de Newton du mouvement circulaire et trouvez l'expression du module de la vitesse tangentielle v de l'électron sur cette orbite. (b) Bohr imposa la condition que le module du moment cinétique L de l'électron ne pouvait prendre que des valeurs discrètes données par $L = nh/2\pi$, n étant un entier et h une constante (la constante de Planck). Montrez que le rayon de la $n^{\text{ième}}$ orbite permise est donné par

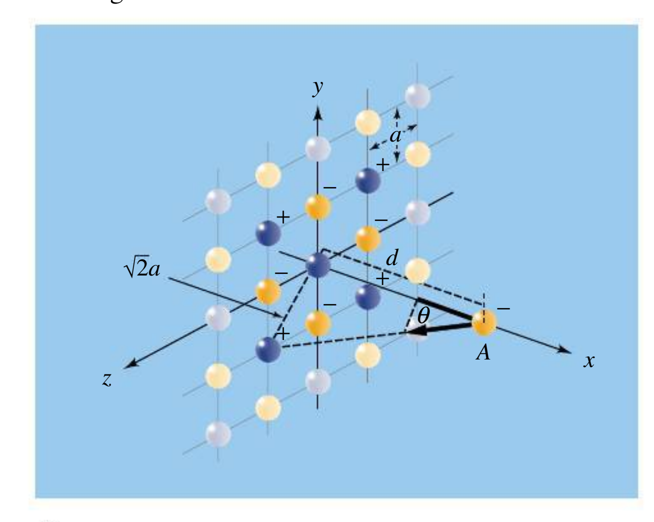
$$r_n = \frac{n^2h^2}{4\pi^2kme^2}$$

(c) Calculez r_n pour $n = 1, 2, 3$.

P10. (II) La somme de deux charges ponctuelles est égale à +8 μC. Lorsqu'elles sont à 3 cm l'une de l'autre, chacune d'elles est soumise à une force électrique de module 150 N. Déterminez les valeurs des charges, sachant que la force est (a) répulsive ; (b) attractive.

P11. (II) Les cristaux sont le résultat de l'assemblage progressif d'atomes qui, un à un, viennent se greffer à une structure existante pour lui donner une forme macroscopique particulière. Les cristaux de sel commun (NaCl) sont de petits cubes facilement

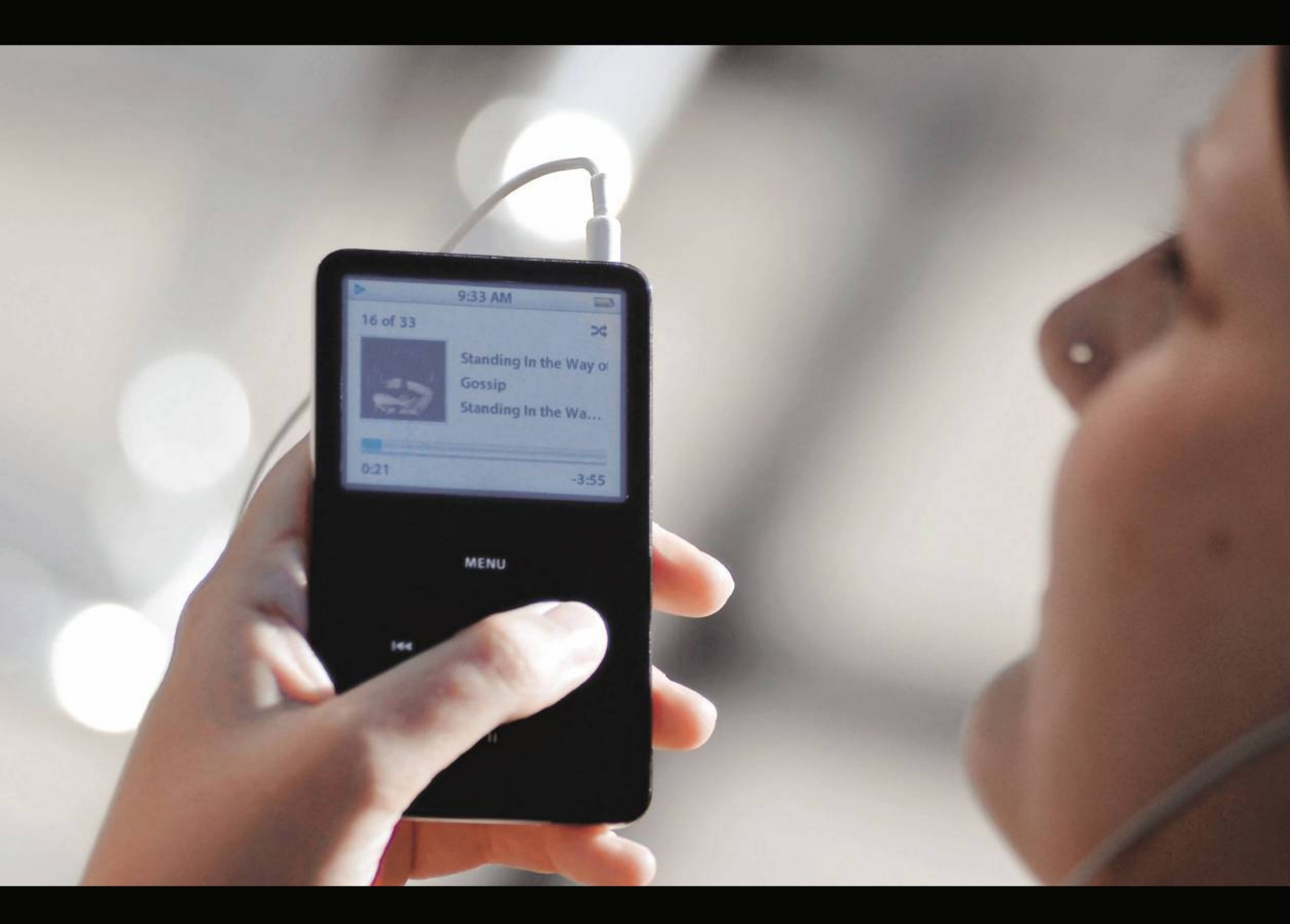
discernables sous une loupe. À l'échelle atomique, les ions Cl^- et Na^+ forment un réseau régulier dans lequel la distance a entre chaque ion est de $2{,}82 \times 10^{-10}$ m. La figure 1.39 montre l'un des plans de ce cristal, que l'on fait coïncider avec le plan yz. Il est facile d'expliquer pourquoi les cristaux croissent par leurs arêtes et développent de grandes faces planes en faisant observer que plus le nombre d'ions d'une face est élevé, moins la force résultante d'attraction que ces ions engendrent sur un ion extérieur au cristal est grande. Par exemple, considérons l'ion de chlore qui se trouve au point A et qui est extérieur au cristal. Il se trouve à une distance d, que nous fixons à $2a$. (a) Calculez le module de la force d'attraction entre cet ion et l'ion de sodium placé à l'origine du système d'axes. (b) Quelle valeur prendra le module de la force résultante d'attraction qui s'exerce sur l'ion en A si on ajoute l'effet des 8 ions qui entourent immédiatement l'ion central ? Utilisez la symétrie et la régularité de l'espacement pour calculer cette force. (c) Reprenez le calcul, mais en ajoutant les 16 ions de la rangée suivante. (d) Combien d'ions sont sur la rangée suivante (non représentée sur la figure) ? Quelle valeur le module de la force prend-il avec cette nouvelle rangée ? (e) Peut-on estimer le nombre de rangées nécessaires pour que la force résultante soit inférieure d'un facteur 100 au résultat obtenu en (a) ? (f) Le paramètre d a-t-il de l'importance dans le cas d'un nombre très élevé de rangées ?



▲ Figure 1.39
Problème 11.

CHAPITRE 2

LE CHAMP ÉLECTRIQUE



SOMMAIRE



Cette simple image laisse deviner trois rôles que peut jouer le champ électrique, dont nous traiterons dans ce chapitre : 1) la couleur de chaque pixel de l'écran est modifiée au besoin par un champ électrique changeant l'orientation des molécules du liquide contenu dans le pixel ; 2) le déplacement des charges dans les fils conducteurs des écouteurs et de l'appareil est assuré par le champ électrique interne des fils ; 3) la contraction des muscles de la main débute par un champ électrique qui fait rapidement entrer des ions dans les cellules musculaires.

Au chapitre précédent, nous avons signalé l'analogie entre la loi de Coulomb et la loi de la gravitation universelle formulée par Newton. Ces deux équations supposent implicitement qu'il se produit une *action à distance* : deux objets, même si la distance r qui les sépare est très grande, exerceraient l'un sur l'autre une force sans avoir à se toucher. Dès la section 2.1, nous verrons pourquoi cette idée pose problème. Newton lui-même était très insatisfait de cet aspect de sa théorie : comme presque tous les penseurs depuis Aristote, il ne croyait pas que l'action à distance était possible, même si son équation permettait de prédire correctement les observations. Il trouvait même cette notion « absurde ».

Bien avant les travaux de Coulomb, le simple rejet de l'idée d'une action instantanée à distance rendait nécessaire de concevoir un mécanisme intermédiaire qui permettait à la force d'être « transmise ». En 1600, William Gilbert avait déjà essayé d'expliquer comment un corps chargé peut « agir à distance » sur un autre corps : il supposait que, lorsqu'on frottait un corps, celui-ci libérait des

vapeurs, ou « effluves », et s'entourait ainsi d'une « atmosphère ». En revenant vers le corps d'origine, les effluves soulevaient des objets légers. Selon Gilbert, on pouvait ressentir ces effluves sous forme de picotements au visage lorsqu'on s'approchait d'un corps électrifié.

Un mécanisme différent fut proposé vers 1650 par René Descartes (1596-1650), qui imagina que l'espace tout entier était rempli d'un milieu matériel invisible nommé « éther ». Selon Descartes, un corps chargé produisait dans l'éther des tourbillons qui se dirigeaient ensuite vers d'autres corps sur lesquels ils exerçaient des forces. À la section 1.1, nous avons dit que Du Fay voyait la charge *elle-même* comme de tels tourbillons dans l'éther : à l'époque, une certaine confusion régnait donc encore entre les notions de charge et de mécanisme lui permettant d'agir.

Même James Clerk Maxwell (1831-1879), considéré comme l'auteur de la théorie électromagnétique moderne, a construit l'ensemble de cette théorie en imaginant que des charges interagissaient par l'intermédiaire d'un éther matériel et invisible, qu'il voyait au départ comme un fluide. Plus tard, à mesure que sa théorie permettait de décrire des phénomènes supplémentaires, il devint clair que l'éther aurait dû être un solide élastique très rigide, ce qui n'était évidemment pas compatible avec le fait que la matière ordinaire devait pouvoir s'y déplacer ! À la toute fin, Maxwell formula sa théorie sous forme d'équations qui supposaient qu'un intermédiaire existait, mais *n'en précisaient pas la nature*.

D'ailleurs, au début du XX[e] siècle, la notion d'éther fut complètement abandonnée, car elle ne permettait toujours pas d'expliquer certaines observations, et ce, même si on consentait à attribuer à l'éther des propriétés inhabituelles (voir le chapitre 8 du tome 3). Toutes les notions dont nous venons de parler n'existent plus aujourd'hui : une particule chargée ne s'entoure pas d'une « atmosphère de vapeurs » et n'a pas besoin d'un milieu matériel comme l'éther pour interagir avec d'autres charges.

Selon toutes les théories modernes, l'intermédiaire entre deux charges est le *champ électrique*, que nous allons définir à la section 2.1. Le reste du chapitre sera surtout consacré à déterminer la valeur du champ produit par des charges *sources* (sections 2.2 et 2.5), puis à examiner l'effet d'un champ donné sur des charges *cibles* (sections 2.3 et 2.4).

2.1 LE CHAMP ÉLECTRIQUE

Considérons deux charges ponctuelles séparées par une certaine distance r. Selon la loi de Coulomb, si on modifie brusquement r, le module de la force devrait se modifier de façon *instantanée*. Mais cela suppose que l'information de ce déplacement serait transmise à une vitesse infinie. Or, comme nous le verrons au chapitre 8 du tome 3, rien ne peut se propager à une vitesse supérieure à celle de la lumière. Quand on fait l'expérience, on mesure* d'ailleurs un *délai* avant que la force électrique ne change : pour deux charges séparées de quelques mètres, ce délai est d'environ 10^{-8} s. L'existence de ce délai implique obligatoirement qu'il y ait un intermédiaire permettant aux charges d'agir l'une sur l'autre. Entre deux charges immobiles, cet intermédiaire est le **champ électrique**.

Ainsi, si on considère deux charges ponctuelles, on dit que l'une d'elles (la *source*) produit un champ électrique dans l'espace qui l'entoure. La deuxième particule

* Si ce délai était nul, comme le sous-entend la loi de Coulomb, les ondes électromagnétiques que nous étudierons au chapitre 13 ne pourraient pas se produire.

chargée (la *cible*) ne va pas interagir directement avec la première, mais plutôt réagir au champ dans lequel elle se trouve. Chacune des deux particules peut jouer à la fois le rôle de la source et de la cible ; en d'autres termes, chacune produit un champ qui affecte l'autre particule. Ainsi, ces champs jouent effectivement le rôle d'intermédiaires entre les particules chargées.

Il en va de même dans une situation où il y a plusieurs charges. On s'intéresse souvent à la force sur une charge en particulier, donc on considère toutes les *autres* charges comme les **charges sources** : elles produisent le champ qui affecte la charge qui nous intéresse, qu'on peut appeler* la **charge cible**. Jusqu'au chapitre 5, on étudie l'électrostatique, c'est-à-dire les situations où les charges sources sont immobiles. Le champ électrique qu'elles produisent et qui affecte la charge cible est donc *constant* dans le temps.

Quel que soit le nombre de charges sources, le champ électrique est l'intermédiaire qui exerce une force sur la charge cible. En somme, ce champ est « quelque chose » qui a notamment pour effet d'exercer une force sur toute charge qui s'y trouve immergée. Dans la théorie initiale de Maxwell, le champ était vu comme une sorte de déformation de l'éther, qui prenait une valeur donnée en chaque point de l'espace**. Le concept d'éther ayant été abandonné, le champ ne doit pas être imaginé comme une perturbation d'un matériau. Pour le moment, il serait difficile de décrire ce qu'*est* le champ électrique et plusieurs théories en donnent des descriptions différentes. Par exemple, selon la théorie quantique des champs que nous survolerons au chapitre 13 du tome 3, le champ électrique est constitué de « photons virtuels », produits par les charges.

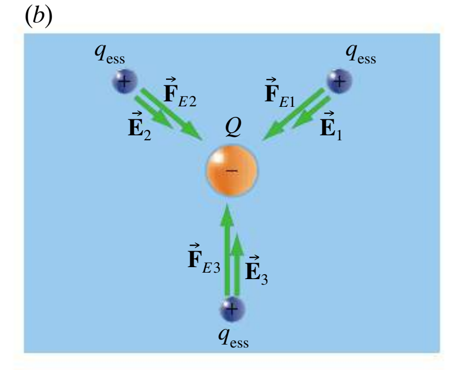
Dans tout le tome 2, la nature du champ ne pourra pas être précisée davantage. Nous utiliserons la même approche que Maxwell utilisa dans sa théorie finale : nous dirons que le champ en un point de l'espace a une certaine valeur $\vec{\mathbf{E}}$, sans préciser ce que cette valeur représente. La valeur $\vec{\mathbf{E}}$ n'est pas définie à partir de ce qu'*est* le champ, mais à partir des *effets* qu'on lui attribue, c'est-à-dire la force que le champ exerce sur une charge cible. Cette « *définition opérationnelle* » suffira pour expliquer tous les phénomènes que nous étudierons, car elle permet de calculer la force produite par le champ sans avoir à préciser sa nature. (C'est aussi de cette façon opérationnelle que nous avons défini le champ gravitationnel à la section 13.3 du tome 1.)

Considérons un champ, par exemple celui produit par une charge source ponctuelle Q qui est maintenue immobile. On peut mesurer la force électrique $\vec{\mathbf{F}}_E$ qu'exerce ce champ sur une charge d'essai q_{ess} qu'on place en divers endroits situés autour de Q (figure 2.1). En chaque endroit, on mesure donc un vecteur force unique, mais ce vecteur dépend de q_{ess}. Par contre, le rapport $\vec{\mathbf{F}}_E/q_{\text{ess}}$, lui, ne dépend que de la charge source Q. On peut donc choisir de définir le vecteur champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ en un point donné comme

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{\vec{\mathbf{F}}_E}{q_{\text{ess}}} \qquad (2.1)$$

(*a*)

(*b*)



▲ **Figure 2.1**

On peut déterminer la configuration du champ électrique produit par une charge Q en mesurant la force $\vec{\mathbf{F}}_E$ exercée sur une charge d'essai positive q_{ess} placée en divers points. Le vecteur champ électrique en un point quelconque est $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{F}}_E/q_{\text{ess}}$. En (*a*), Q est positive et le champ en divers points est orienté de manière diamétralement opposée à Q. En (*b*), Q est négative et le champ en divers points est orienté vers Q.

* Contrairement au terme « charge source », qui est universellement répandu, il n'y a pas de façon clairement établie de désigner la « charge d'intérêt » qui est plongée dans le champ. Des auteurs l'appellent « charge d'essai » ou « charge test », l'un des termes les plus répandus étant « charge cible ».

** Dans la vie courante, le mot *champ* désigne en effet une étendue. En mathématiques, le mot a une utilisation analogue : une fonction champ est une fonction $f(x, y, z)$ qui mesure quelque chose en chaque point (x, y, z) de l'espace. Pour Maxwell, le champ était effectivement une fonction mathématique qui mesurait l'état de l'éther en chaque point. (Par exemple, dans le cas de l'équation 2.2 que nous démontrerons sous peu, la position du point est mesurée avec r.)

Selon l'équation 2.1, l'unité SI de champ électrique est le newton par coulomb* (N/C). Cette équation étant vectorielle, elle définit aussi l'orientation du champ : *le vecteur* $\vec{\mathbf{E}}$ *est orienté dans le même sens que la force* $\vec{\mathbf{F}}_E$ *agissant sur une charge d'essai positive*. Deux mises en garde s'imposent en ce qui concerne l'interprétation de cette équation. Premièrement, le champ $\vec{\mathbf{E}}$ est la cause de la force $\vec{\mathbf{F}}_E$ et non le contraire. Deuxièmement, le champ existe en *chaque* point de l'espace autour de Q, même si la charge d'essai q_{ess} est retirée. Cette charge ne sert qu'à déceler (mesurer) le champ grâce à la force qu'il produit sur elle.

Dans le cas particulier où la charge source est une unique charge ponctuelle Q, le module de la force électrique est donné par la loi de Coulomb :

$$F_E = \frac{k|q_{ess}Q|}{r^2}$$

D'après l'équation 2.1, le module du champ électrique produit dans le vide par cette charge source ponctuelle Q équivaut donc à

Module du champ électrique produit par une charge ponctuelle

$$E = \frac{k|Q|}{r^2} \qquad (2.2)$$

Le champ produit par une charge ponctuelle est radial et son module est proportionnel à l'inverse du carré de la distance. Puisque le champ est orienté dans le même sens que la force qui agit sur une charge d'essai positive, on en déduit l'énoncé suivant :

Orientation du champ électrique produit par une charge ponctuelle

Le champ électrique en un point donné est orienté vers la charge Q si Q est négative, et dans le sens opposé à Q si Q est positive.



Un champ électrique considérable, de l'ordre de 3×10^6 N/C, est nécessaire pour ioniser l'air et le rendre conducteur.

La définition que nous venons de donner du champ (équation 2.1) a pour conséquence que la force qu'il exerce est facile à calculer : lorsqu'on connaît le champ $\vec{\mathbf{E}}$ en un point P, on peut déterminer la force électrique sur une quelconque charge cible q placée au point P par la relation

Force exercée par le champ électrique

$$\vec{\mathbf{F}}_E = q\vec{\mathbf{E}} \qquad (2.3a)$$

Dans cette équation, q est la charge cible alors que $\vec{\mathbf{E}}$ est le champ produit par les charges sources, c'est-à-dire toutes les charges présentes, *à l'exception de* la

* Au chapitre 4, nous verrons qu'un newton par coulomb (N/C) est équivalent à un volt par mètre (V/m), cette dernière unité étant plus fréquemment utilisée pour mesurer le champ électrique. Nous utiliserons toutefois le newton par coulomb jusqu'au moment où le volt sera défini.

charge q elle-même. En effet, une charge ne peut produire un champ exerçant une force sur elle-même. Cela ne doit pas être vu comme une exception : en effet, aucune particule n'est capable d'exercer une force sur elle-même, puisque cela violerait la troisième loi de Newton. D'ailleurs, si ce n'était pas le cas, l'équation 2.2 donnerait un résultat embarrassant, car on aurait $r = 0$ et $E \to \infty$!

En fonction des modules de la force et du champ, l'équation 2.3*a* devient

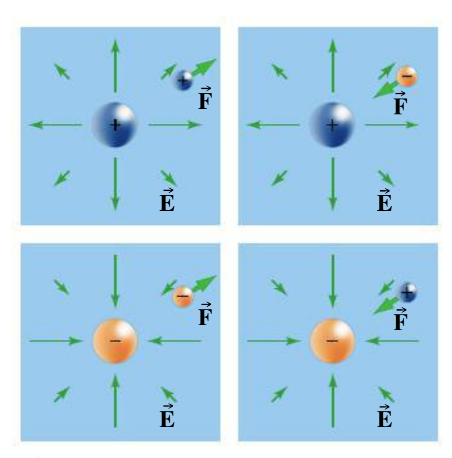
$$F_E = |q|E \qquad (2.3b)$$

On prend q en valeur absolue, car le module d'un vecteur est toujours positif. Le signe de q affecte l'orientation de $\vec{\mathbf{F}}_E$ par rapport à $\vec{\mathbf{E}}$:

Orientation de la force par rapport à celle du champ électrique

Si la charge q est positive, la force électrique agissant sur elle est orientée dans le même sens que le vecteur champ ; si la charge q est négative, la force agissant sur elle est orientée dans le sens opposé au vecteur champ.

Selon la loi de Coulomb, une charge source peut agir sur une charge cible de deux façons possibles (force attractive ou répulsive). La figure 2.2 montre que, si l'on tient compte du champ, ces deux possibilités se déclinent en quatre scénarios.



▲ **Figure 2.2**

Quand on tient compte du champ, il existe deux scénarios pour le cas où des charges de même signe se repoussent, de même que deux scénarios pour les cas où des charges de signes opposés s'attirent. Le champ illustré est celui produit par la charge (source) située au centre. La force subie par une charge positive est toujours dans le même sens que le champ ambiant au point où elle est située ; la force subie par une charge négative est toujours en sens opposé.

On remarquera que l'équation 2.3*a* a la même forme que la relation $\vec{\mathbf{F}}_g = m\vec{\mathbf{g}}$ dans laquelle $\vec{\mathbf{g}}$ est le champ gravitationnel. En mécanique (voir le tome 1), on a exprimé le plus souvent le champ gravitationnel en mètres par seconde carrée (m/s^2). Toutefois, on vérifie aisément que 1 m/s^2 = 1 N/kg : cela permet de mieux voir l'analogie entre le champ gravitationnel et le champ électrique, qui s'exprime en newtons par coulomb (N/C).

Le champ électrique est omniprésent dans notre quotidien ; il est à l'origine de phénomènes naturels comme les éclairs, de même que de nombreuses applications technologiques. En particulier, un champ électrique assure la circulation de tout courant électrique. Le sujet connexe de la section 2.4 montrera aussi le rôle du champ électrique dans le fonctionnement de téléviseurs à écrans plats.

Le champ électrique est aussi un phénomène biologique, notamment puisque toutes les membranes cellulaires sont le siège d'un champ imposant. Ce champ permet d'insérer dans le bon sens de nouvelles protéines dans la membrane. En son absence, ces protéines auraient aussi une conformation tridimensionnelle différente (voir le sujet connexe de la section 1.5). Dans les membranes des cellules nerveuses, le champ électrique peut varier temporairement dans le temps, ce qui contrôle la forme des protéines membranaires et permet l'ouverture ou la fermeture des canaux faisant circuler un courant électrique de part et d'autre de la membrane. La même chose se produit dans les membranes des fibres musculaires et déclenche le processus de contraction. Nous reviendrons plusieurs fois sur la notion de champ électrique dans les membranes cellulaires, notamment dans le sujet connexe du chapitre 5. ●

Le tableau 2.1 présente le module du champ électrique dans diverses situations. Notez que le champ est typiquement beaucoup plus intense dans les situations électrostatiques, c'est-à-dire celles où toutes les charges sources sont immobiles. Toutefois, même dans les situations où le champ est relativement faible, la force qu'il produit est considérablement plus grande que la force gravitationnelle, comme l'illustrera le premier des exemples suivants.

▼ Tableau 2.1

Ordre de grandeur du champ électrique, selon la situation

Situation	*E* (N/C)
Champ électrostatique près d'une boule de polystyrène chargée	10^4 à 10^6
Champ électrostatique causant une décharge dans l'air	3×10^6
Champ électrostatique dans une membrane cellulaire	10^7
Champ entraînant le courant électrique dans un appareil électroménager	0,01 à 0,10
Champ utilisé par une anguille électrique pour s'orienter	≈ 1
Champ utilisé par une anguille électrique pour chasser	≈ 100
Amplitude du champ électrique de l'onde électromagnétique à quelques mètres d'une antenne radio émettrice commerciale	5 à 40

Exemple 2.1

Par temps clair, on observe à la surface de la Terre un champ électrique de 100 N/C environ, vertical et orienté vers le bas. Comparer les modules et les orientations des forces électrique et gravitationnelle agissant sur un électron situé à cet endroit.

Solution

La charge de l'électron vaut $q = -e = -1{,}60 \times 10^{-19}$ C. Par l'équation 2.3*b*, le module de la force électrique qui agit sur lui est

$$F_E = |-e|E = (1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})(100\ \text{N/C}) = 1{,}60 \times 10^{-17}\ \text{N}$$

Puisque l'électron est chargé négativement, l'équation 2.3*a* montre que la force électrique est orientée dans le sens contraire du champ : elle est verticale et orientée vers le haut (figure 2.3).

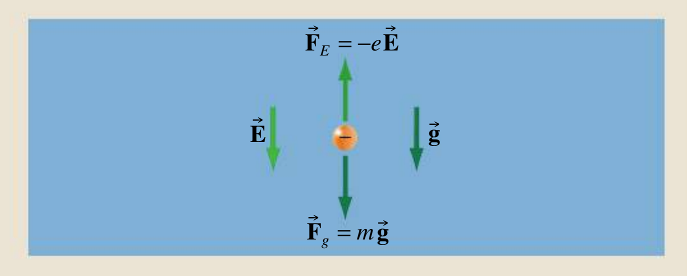
La force gravitationnelle a pour module

$$F_g = mg = (9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(9{,}8\ \text{N/kg}) = 8{,}93 \times 10^{-30}\ \text{N}$$

et elle est orientée vers le bas. Le rapport des modules des forces est

$$\frac{F_g}{F_E} = 5{,}6 \times 10^{-13}$$

Dans toute situation impliquant un champ électrique, même d'un ordre de grandeur sensiblement plus faible que celui que nous venons de considérer, on peut donc négliger la force gravitationnelle agissant sur des particules élémentaires comme l'électron et le proton. ■



▲ Figure 2.3

Une charge négative affectée par les forces électrique et gravitationnelle.

Exemple 2.2

On place une charge ponctuelle $q = 2\ \mu$C en un point P et on observe qu'elle subit une force électrique de module $F_E = 10$ mN orientée vers la droite. (a) Quel est le champ électrique (module et orientation) au point P ? (b) Quel est le champ électrique au point P si on remplace la charge q par une charge de 1 µC ? Quelle force subit cette nouvelle charge ? (c) Si on remplace plutôt la charge q par une charge de $-2\ \mu$C, quelle est la force électrique qui s'exerce sur elle (module et orientation) ? Quel est alors le champ électrique au point P ?

Solution

(a) Comme la force produite par le champ est connue et que son module est donné par l'équation 2.3*b*, le module du champ est $E = F_E/|q| = (10 \times 10^{-3}\ \text{N})/(2 \times 10^{-6}\ \text{C}) = 5 \times 10^3\ \text{N/C} = 5$ kN/C. Puisque la charge q est positive, le champ est orienté dans le même sens que la force, soit vers la droite.

(b) Le champ au point P ne dépend que des charges sources (non spécifiées) et non de q. Ainsi, le champ est inchangé : 5 kN/C vers la droite. Par contre, la charge q étant remplacée par une charge deux fois plus petite, ce même champ exercera sur elle une force deux fois plus petite : 5 mN.

(c) Par l'équation 2.3b, le module de la force est $F_E = |q|E = 10$ mN. Puisque la charge q est négative, la force est orientée dans le sens contraire du champ, donc vers la gauche. Bien sûr, le champ au point P est encore de 5 kN/C vers la droite.

Le champ produit par plusieurs charges ponctuelles

Le champ ayant été défini de façon à ce que la force qu'il produit y soit proportionnelle, le principe de superposition qui s'applique à la loi de Coulomb s'applique également au champ électrique. Pour calculer le champ créé en un point par un système de charges sources, on détermine d'abord séparément les champs $\vec{\mathbf{E}}_1$ dû à Q_1, $\vec{\mathbf{E}}_2$ dû à Q_2 et ainsi de suite. Pour N charges sources ponctuelles, le champ résultant est égal à la somme vectorielle des champs $\vec{\mathbf{E}}_i$ individuels :

Principe de superposition

$$\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \ldots + \vec{\mathbf{E}}_N = \sum \vec{\mathbf{E}}_i \qquad (2.4)$$

Sous cette forme, cette équation n'est valable que pour les champs produits par des charges discrètes comme des charges ponctuelles. Le cas des distributions continues de charge (objets chargés non ponctuels) sera traité à la section 2.5 : on lui applique le principe de superposition, mais sous une forme différente (intégrale).

Il peut être difficile de distinguer les charges que l'on considère comme des sources de celles que l'on considère comme des cibles. Par exemple, si on s'intéresse au champ produit par N charges à un point P, chacune des N charges est une source et le membre de droite de l'équation 2.4 contiendra N termes. Toutefois, si on s'intéresse à la force que subit l'une des N charges en raison du champ produit par les $N - 1$ autres charges du système, alors seules ces $N - 1$ autres charges sont considérées comme les sources.

En fonction du vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{r}}$ défini à la section 1.5, l'équation 2.2 pour la charge Q_i peut s'écrire

$$\vec{\mathbf{E}}_i = \frac{kQ_i}{r_i^2}\vec{\mathbf{u}}_{\mathrm{r}_i} \qquad (2.5)$$

La substitution de chaque terme de l'équation 2.4 par cette équation risque de rendre son utilisation très difficile : en effet, chaque vecteur unitaire a comme origine une charge différente. Il est en général plus facile de suivre l'approche présentée dans la méthode de résolution ci-dessous.

Méthode de résolution

Le champ électrique

Voici les étapes à suivre pour calculer en un point P le champ électrique résultant créé par plusieurs charges sources *ponctuelles* :

1. Identifier les charges sources. Pour chacune d'elles, tracer le vecteur champ qu'elle crée au point P (on peut trouver l'orientation de ce vecteur en imaginant la force que subirait une charge d'essai positive si elle était située en ce point).

2. Déterminer le module du champ dû à chacune des charges sources à l'aide de l'équation 2.2:

$$E = \frac{k|Q|}{r^2}$$

3. Placer l'origine au point P où on cherche $\vec{\mathbf{E}}$. Calculer et additionner les composantes selon chaque axe pour obtenir les composantes du champ résultant $\vec{\mathbf{E}}$. Les valeurs et les signes de ces composantes dépendront du choix des axes.

Exemple 2.3

Soit deux charges ponctuelles, $Q_1 = 20\ \mu\mathrm{C}$ en $(-d, 0)$ et $Q_2 = -10\ \mu\mathrm{C}$ en $(+d, 0)$. Déterminer le champ électrique résultant au point P de coordonnées (x, y). On donne $d = 1{,}0$ m et $x = y = 2$ m.

Solution

Les charges, les vecteurs champ électrique et le système de coordonnées sont représentés à la figure 2.4.

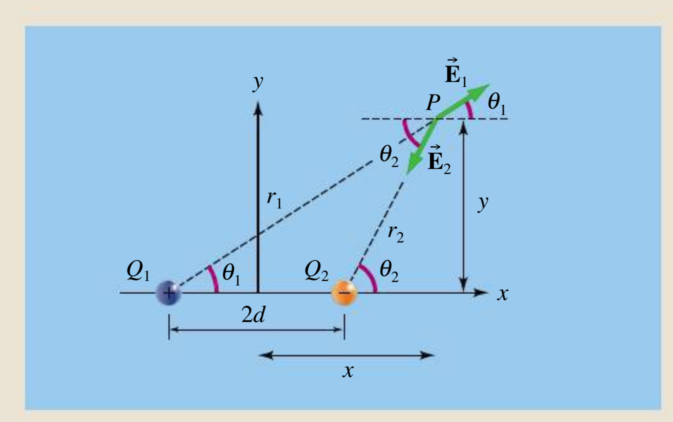


Figure 2.4

Détermination du champ résultant produit par les charges Q_1 et Q_2 au point P.

Les distances sont $r_1 = \sqrt{(x+d)^2 + y^2} = \sqrt{13} = 3{,}6$ m et $r_2 = \sqrt{(x-d)^2 + y^2} = \sqrt{5} = 2{,}2$ m. Les modules des champs sont

$$E_1 = \frac{k|Q_1|}{r_1^2} = \frac{(9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N{\cdot}m^2/C^2})(2 \times 10^{-5}\ \mathrm{C})}{13\ \mathrm{m}^2} = 1{,}4 \times 10^4\ \mathrm{N/C}$$

$$E_2 = \frac{k|Q_2|}{r_2^2} = \frac{(9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N{\cdot}m^2/C^2})(10^{-5}\ \mathrm{C})}{5\ \mathrm{m}^2} = 1{,}8 \times 10^4\ \mathrm{N/C}$$

Les composantes du champ résultant $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2$ sont

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = E_1 \cos\theta_1 - E_2 \cos\theta_2$$
$$E_y = E_{1y} + E_{2y} = E_1 \sin\theta_1 - E_2\ \mathrm{s}\quad \theta_2$$

D'après la figure 2.4, on voit que $\sin\theta_1 = y/r_1$, $\sin\theta_2 = y/r_2$, $\cos\theta_1 = (x+d)/r_1$, $\cos\theta_2 = (x-d)/r_2$. On obtient donc

$$E_x = (1{,}4 \times 10^4\ \mathrm{N/C})\frac{3}{3{,}6} - (1{,}8 \times 10^4\ \mathrm{N/C})\frac{1{,}0}{2{,}2} = 3{,}5 \times 10^3\ \mathrm{N/C}$$

$$E_y = (1{,}4 \times 10^4\ \mathrm{N/C})\frac{2}{3{,}6} - (1{,}8 \times 10^4\ \mathrm{N/C})\frac{2}{2{,}2} = -8{,}6 \times 10^3\ \mathrm{N/C}$$

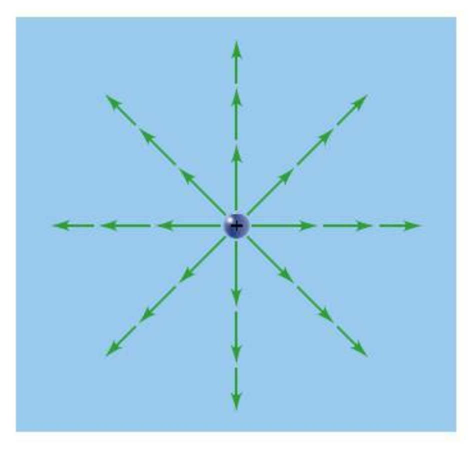
Le résultat final s'écrit donc

$$\vec{\mathbf{E}} = (3{,}5 \times 10^3\,\vec{\mathbf{i}} - 8{,}6 \times 10^3\,\vec{\mathbf{j}})\ \mathrm{N/C}$$

2.2 LES LIGNES DE CHAMP

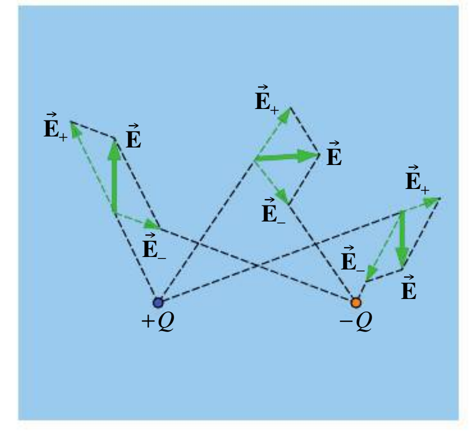
Nous allons maintenant voir une méthode permettant d'illustrer rapidement la configuration générale du champ électrique produit par plusieurs charges sources. Considérons d'abord le champ électrique produit par une charge ponctuelle positive Q. Comme nous l'avons fait jusqu'à présent, le vecteur champ $\vec{\mathbf{E}}$ en un point quelconque peut être représenté par une flèche dessinée à l'échelle et la configuration du champ ressemble alors au schéma de la figure 2.5. Considérons maintenant le champ électrique produit par deux charges ponctuelles. Comme le montre la figure 2.6, il est déjà plus difficile d'en illustrer la configuration à l'aide de la même méthode, car le schéma est rapidement surchargé: les flèches en pointillés représentent le champ dû individuellement à chaque

charge, alors que les flèches pleines représentent le champ résultant. Bien que cette méthode demeure pertinente si on s'intéresse uniquement au vecteur champ en un point précis, elle convient beaucoup moins pour illustrer la configuration générale du champ. Pour une telle illustration, on utilisera plutôt des **lignes de champ électrique** continues qui sont, en chaque point, tangentes au vecteur champ résultant $\vec{\mathbf{E}}$. En conséquence, ces lignes « partent » d'une charge positive et « se dirigent » vers une charge négative (figure 2.7). En comparant la figure 2.6 et la figure 2.9 (p. 42) où les charges sources sont les mêmes, on voit tout de suite que la représentation utilisant des lignes de champ est plus avantageuse.



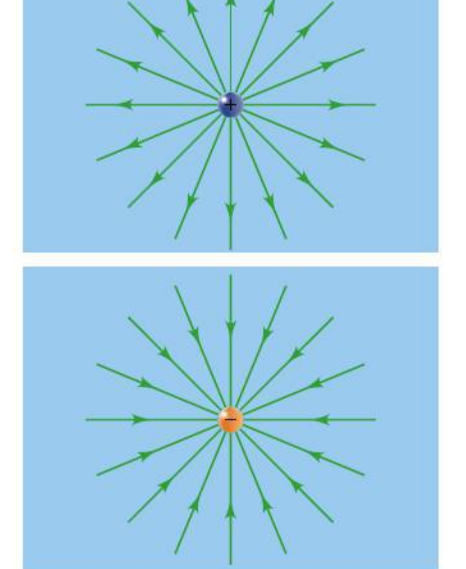
▲ **Figure 2.5**

On peut représenter le champ électrique d'une charge ponctuelle par des flèches dessinées à l'échelle. Chaque flèche représente le module et l'orientation du champ en un seul point, celui où elle *débute*.



▲ **Figure 2.6**

Les flèches représentent le champ électrique créé en quelques points par deux charges de même grandeur et de signes opposés.



▲ **Figure 2.7**

Le champ électrique d'une charge peut être représenté par des *lignes de champ* continues. Ces lignes « partent » d'une charge positive et « se dirigent » vers une charge négative.

En présence d'un objet très chargé, on peut détecter approximativement la direction d'une ligne de champ en utilisant un tube à néon puisqu'il se met à émettre beaucoup de lumière quand il est parallèle à une ligne de champ (figure 2.8). En déplaçant le tube (ou en utilisant plusieurs tubes) tenu au bout d'un bâton, on peut détecter la direction du champ en plusieurs endroits. Les lignes de champ doivent cependant être suffisamment rectilignes pour que leur orientation ne change pas trop sur une distance comparable à la longueur du tube. Quand le système de charges qui produit le champ a une dimension plus petite, la courbure des lignes de champ est plus prononcée, et il faut alors détecter la configuration du champ avec des objets plus petits. Une possibilité est d'utiliser de petites semences de gazon qui flottent sur un liquide (de l'huile, par exemple), mais cela ne permettra que de visualiser une coupe plane du champ à trois dimensions. Lorsqu'on immerge dans le liquide des électrodes fortement chargées, chaque semence devient un dipôle électrique. Or, comme nous le verrons à la section 2.6, un dipôle immergé dans un champ tourne de façon à s'aligner sur la direction locale du champ. La configuration des semences et des lignes de champ correspondantes est illustrée aux figures 2.9*a* et 2.9*b* pour deux charges ponctuelles de même grandeur et de signes opposés et aux figures 2.10*a* et 2.10*b* pour deux charges identiques. Ne confondez pas les semences de gazon de ces figures avec de la limaille de fer : celle-ci ne réagit pas au champ électrique mais au champ *magnétique* (voir la figure 8.1, p. 308).

Pour s'orienter dans l'espace, l'anguille électrique produit un champ électrique similaire à celui de la figure 2.9*b*. Tout objet situé dans les environs perturbe ce champ, ce que perçoit l'animal, qui peut même distinguer s'il s'agit

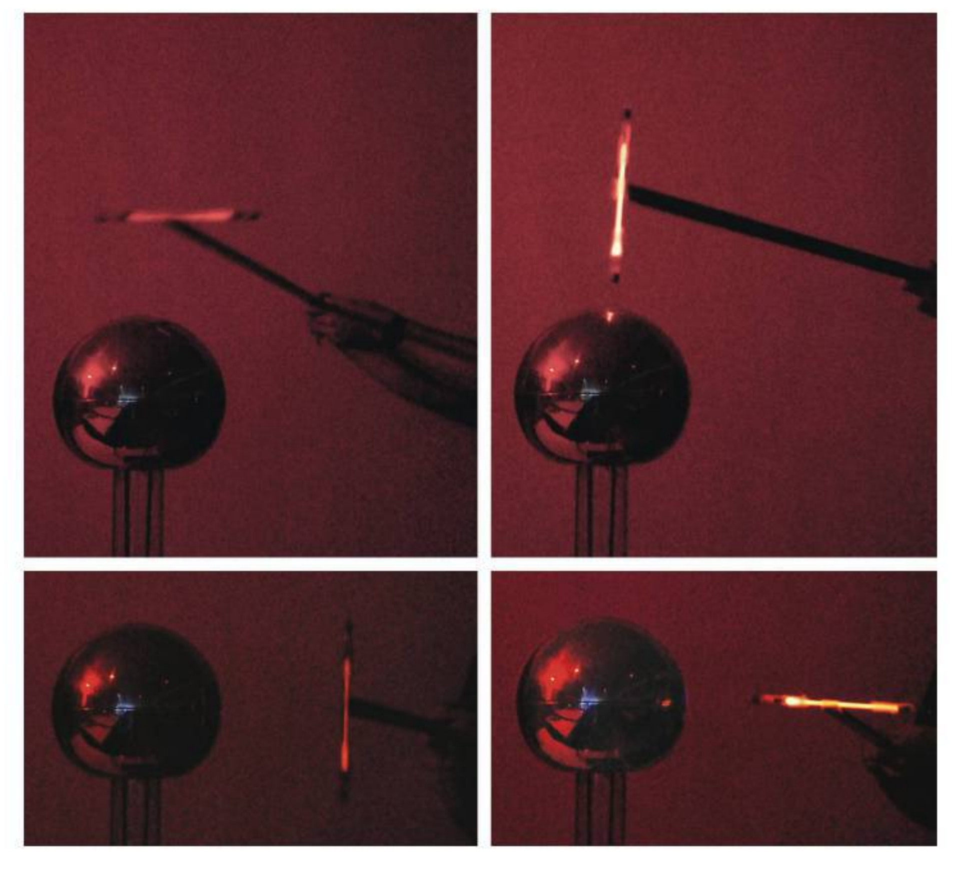
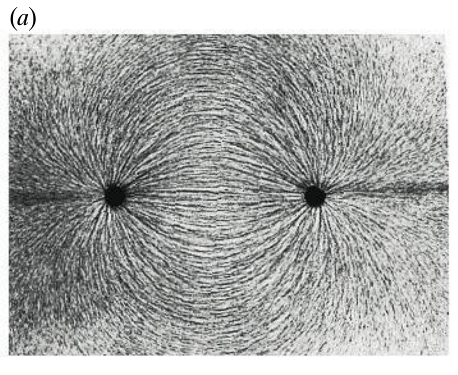


Figure 2.8

Comme le montrent ces photos prises dans l'obscurité, le champ électrique produit par un objet très chargé est suffisant pour qu'un tube à néon émette de la lumière *même s'il n'est pas alimenté*. Pour que l'effet soit maximal, le tube doit être placé parallèlement à une ligne de champ rectiligne. (On voit que le néon émet quand même une légère lueur sur les photos de gauche, car sa dimension parallèle au champ n'est jamais parfaitement nulle.)

(*a*)



(*b*)

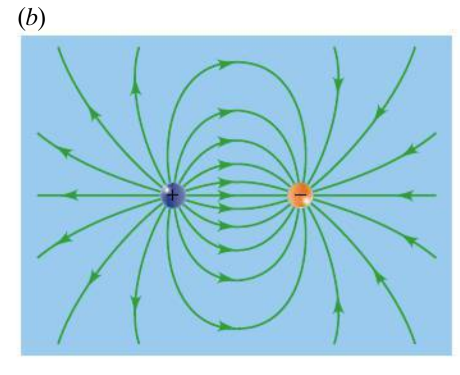
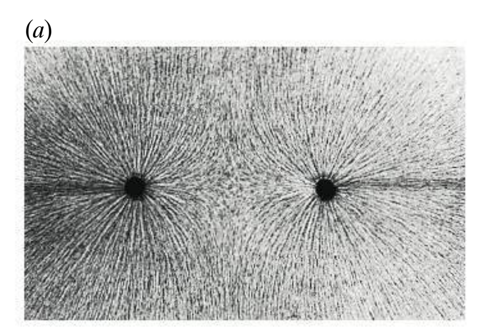


Figure 2.9

Le champ électrique produit par deux charges de même grandeur et de signes opposés. (*a*) La configuration des semences saupoudrées à la surface d'un liquide. (Ce sont des semences *et non de la limaille de fer*.) (*b*) Les lignes de champ électrique correspondantes.

(*a*)



(*b*)

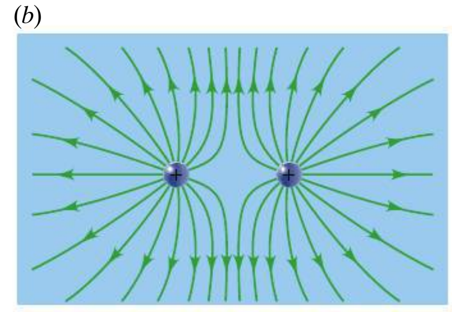


Figure 2.10

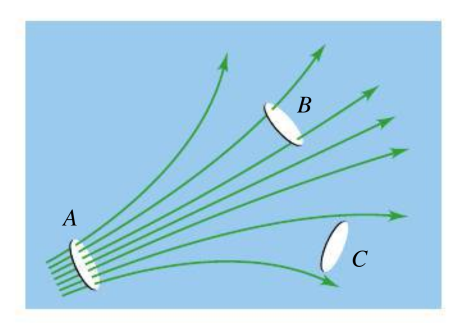
Le champ électrique produit par deux charges identiques. (*a*) La configuration des semences. (*b*) Les lignes de champ électrique correspondantes.

d'un être vivant ou d'un objet inanimé, notamment en raison de la différence de constante diélectrique (voir la section 2.7). La structure de l'organe qui produit le champ électrique chez l'anguille a inspiré Volta lors de l'invention de la première pile électrique (voir l'aperçu historique de la section 6.1). Quant à son système de perception, il est abondamment étudié en neurosciences, car il présente des similitudes importantes avec la rétine et le cortex visuel humains.

Les lignes de champ ont été présentées vers 1840 par Michael Faraday (1791-1867), qui les considérait comme des lignes matérielles et allait même jusqu'à leur attribuer des propriétés élastiques : selon lui, on pouvait « sentir » les lignes attirer les charges l'une vers l'autre ou les repousser. Selon la théorie moderne, ces lignes *ne sont pas* des entités physiques, matérielles ou non : leur seul rôle est d'aider à visualiser la configuration du champ électrique qui, lui, est conçu comme une entité physique réelle.

Plus que l'orientation du champ, les lignes de champ contiennent les mêmes renseignements qu'un schéma de flèches comme celui de la figure 2.5 ou 2.6 (p. 41). Notamment, elles peuvent nous renseigner sur le module du champ. On remarque en effet qu'elles sont plus rapprochées là où le champ a un module élevé et qu'elles sont plus espacées là où le champ est faible. Le module du champ est donc proportionnel à la *densité* des lignes, c'est-à-dire au nombre de lignes traversant une surface unitaire normale à la direction du champ. En effet, supposons que N lignes partent d'une charge ponctuelle isolée. À une distance r de la charge, les lignes sont réparties sur une surface sphérique d'aire égale à $4\pi r^2$: la densité des lignes est donc égale à $N/4\pi r^2$ et diminue en $1/r^2$, tout comme le module du champ (équation 2.2).

La figure 2.11 illustre la façon dont les lignes de champ permettent de déterminer le module du champ : sur cette figure, le champ est intense en A et plus faible en B. Comme aucune ligne de champ ne passe en C, on pourrait penser que le champ y est nul ; il faut toutefois se rendre compte que, pour ne pas surcharger le dessin, quelques lignes de champ seulement ont été tracées et que si l'on en traçait dix fois plus, quelques-unes passeraient certainement en C. Le nombre exact de lignes qui partent d'une charge unitaire importe peu ; ce qui importe en réalité, c'est la densité *relative* des lignes en divers points.

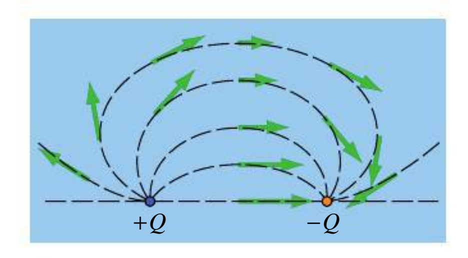


▲ Figure 2.11

Le module du vecteur champ est proportionnel au nombre de lignes de champ qui traversent une surface unitaire perpendiculaire au champ. Il serait inexact de dire que le champ est nul en C : si davantage de lignes étaient représentées sur le dessin, on verrait des lignes passer par C. Seule la densité *relative* des lignes (celle en A comparativement à celle en B, par exemple) nous intéresse.

Voici un résumé des propriétés des lignes de champ :

1. Chaque ligne de champ est dirigée d'une charge positive vers une charge négative. Un truc pratique consiste à imaginer que les charges positives « émettent » des lignes de champ et que les charges négatives les « absorbent »*.
2. Le nombre de lignes qui partent d'une charge ou qui se dirigent vers elle est proportionnel à la grandeur de la charge. Encore ici, le truc consiste à retenir que plus une charge est grande, plus elle « émet » ou « absorbe » de lignes.
3. La direction du champ en un point est *tangente* à la ligne de champ (figure 2.12).
4. Le module du vecteur champ est proportionnel à la *densité* des lignes de champ, c'est-à-dire au nombre de lignes traversant une surface unitaire normale au champ.
5. Les lignes de champ ne se coupent jamais : sinon, à l'endroit où elles se couperaient, le vecteur champ aurait deux directions différentes !
6. Les lignes de champ doivent respecter des *comportements limites*. Dans la zone limite située tout près d'une charge ponctuelle, le champ que produit cette charge domine celui de toutes les autres, et le champ est donc *radial*. Dans la zone limite située très loin de toutes les charges du système, le champ tend vers celui que produirait une charge ponctuelle de même grandeur que la charge totale du système. Il est donc aussi radial.



▲ Figure 2.12

La direction du champ électrique en un point est tangente à la ligne de champ.

* Il ne s'agit que d'un truc et non de quoi que ce soit de physique : bien que les lignes de champ comportent une flèche, elles ne représentent aucun mouvement. Une erreur conceptuelle commune consiste à imaginer que les charges positives émettent réellement quelque chose que les charges négatives absorbent ensuite. Selon la définition que nous avons donnée du champ à la section précédente, chaque charge « émet » un champ, *quel que soit son signe*.

Pour tracer les lignes de champ avec précision, il est nécessaire de connaître précisément l'orientation du champ en plusieurs points, ce qui ne peut se faire autrement que par l'approche des figures 2.5 et 2.6 (p. 41). Toutefois, on peut alléger ce fardeau dans les cas où les charges qui produisent le champ présentent une symétrie. Dans ces cas, *le champ doit présenter la même symétrie que les charges*. Par exemple, si les charges sont identiques après une réflexion par rapport à un plan, le champ doit lui aussi être identique après cette même réflexion (voir la section 3.3). De même, si le système de charges est identique sous rotation par rapport à un axe, alors le champ doit aussi demeurer identique sous cette rotation.

Au chapitre 3, nous étudierons plus en détail comment la symétrie d'une distribution de charges peut aider à déterminer la configuration des lignes de champ. De plus, après avoir défini le potentiel électrique au chapitre 4, nous verrons que les mesures de celui-ci aident à tracer les lignes de champ. Dans l'exemple suivant, toutes les techniques présentées jusqu'à présent sont mises à profit pour permettre d'obtenir un tracé le plus précis possible sans avoir à calculer le vecteur champ en aucun endroit.

Exemple 2.4

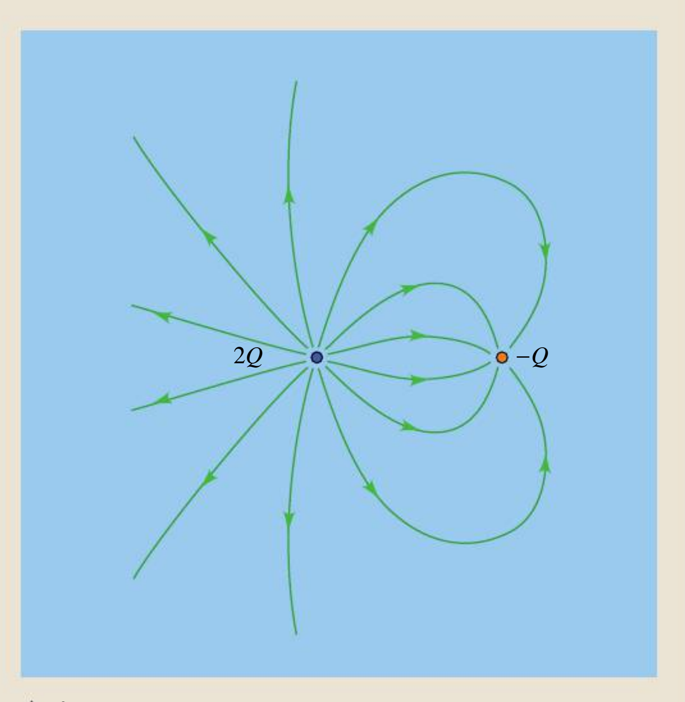
Dessiner les lignes du champ électrique créé par deux charges ponctuelles $2Q$ et $-Q$. On suppose que $Q > 0$.

Solution

On peut établir la configuration des lignes de champ en tenant compte des points suivants.

- *Symétrie* : À tout point situé au-dessus de la ligne joignant les deux charges correspond un point équivalent en dessous de la ligne. La configuration doit donc être symétrique par rapport à la ligne joignant les deux charges.
- *Champ au voisinage immédiat* : Au voisinage immédiat d'une charge, le champ qu'elle crée est prépondérant et les lignes de champ sont donc radiales et de symétrie sphérique.
- *Champ en un point éloigné* : Très loin du système de charges, la configuration doit ressembler à celle d'une charge ponctuelle unique de valeur $(2Q - Q) = +Q$. Autrement dit, les lignes de champ doivent être radiales et orientées vers l'extérieur.
- *Nombre de lignes* : Les lignes « partant » de $+2Q$ sont deux fois plus nombreuses que celles qui « arrivent » en $-Q$.

On obtient le croquis représenté à la figure 2.13.



▲ **Figure 2.13**
Les lignes de champ du système formé par les charges $2Q$ et $-Q$.

2.3 LE CHAMP ÉLECTRIQUE ET LES CONDUCTEURS

Depuis le début de ce chapitre, nous avons considéré des champs électriques produits *dans le vide*. Quand un matériau solide ou fluide est placé dans un champ électrique, les électrons et les protons dont le matériau est fait subissent

la force électrique exercée par ce champ. Dans cette section, nous allons voir l'effet produit quand le matériau est un conducteur. La section 2.7 traitera du cas d'un isolant.

La figure 2.14 illustre un champ électrique extérieur $\vec{\mathbf{E}}_{ext}$, produit par des charges sources non illustrées. Quand on place un conducteur dans ce champ, les seules charges cibles capables de bouger de façon importante sont les électrons libres dans le conducteur (c'est-à-dire environ un électron par atome, voir la section 1.2). Ces électrons libres subissent tous une force dans le sens contraire de $\vec{\mathbf{E}}_{ext}$ (figure 2.14*a*) et se déplacent donc vers le côté du conducteur où «pénètrent» les lignes du champ extérieur; ce côté acquiert une charge négative, tandis que l'autre côté acquiert une charge positive. La séparation de charge qui s'instaure dans le matériau est un phénomène *identique* à celui mentionné à la section 1.3, bien que les charges qui en étaient la cause étaient alors connues, alors que, cette fois, ces charges (ayant créé le champ $\vec{\mathbf{E}}_{ext}$) ne sont pas spécifiées.

Quand la séparation de charge s'établit, les charges accumulées de part et d'autre deviennent très rapidement importantes et doivent être considérées comme des charges sources additionnelles: elles produisent un champ électrique intérieur $\vec{\mathbf{E}}_{int}$ de sens opposé à $\vec{\mathbf{E}}_{ext}$ (figure 2.14*b*). La séparation des charges se poursuivra jusqu'au moment où le module du champ intérieur sera égal à celui du champ extérieur: le champ résultant à l'intérieur du conducteur sera alors nul et n'exercera donc plus aucune force sur les électrons libres (figure 2.14*c*). On dit alors que le conducteur est en **équilibre électrostatique**, ce qui signifie que sa distribution de charge ne change plus. Dans un bon conducteur, cet état d'équilibre électrostatique s'établit presque instantanément, car son temps de relaxation est infime (voir la section 1.2).

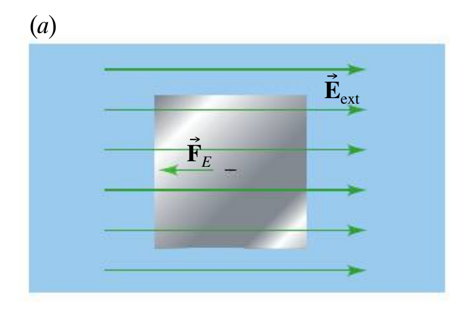
Même si à la figure 2.14 on a représenté un champ électrique extérieur uniforme et un conducteur de forme cubique, le raisonnement que nous venons de faire s'applique à un conducteur de forme quelconque placé dans un champ électrique extérieur quelconque. En effet, tant qu'un champ non nul subsiste en un point quelconque du matériau d'un conducteur, il exerce une force sur les électrons libres, et ceux-ci continuent donc de se déplacer jusqu'à ce que le champ résultant soit nul. On peut donc énoncer une première propriété générale d'un conducteur à l'équilibre électrostatique:

Propriété 1 des conducteurs à l'équilibre électrostatique

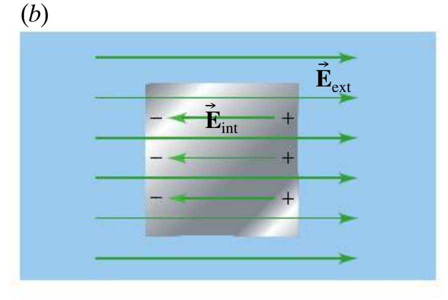
1. À l'équilibre électrostatique, le champ électrique macroscopique résultant à l'intérieur d'un conducteur homogène est nul.

Le terme *macroscopique* a été ajouté ici parce qu'il existe de nombreux champs complexes entre les électrons et les noyaux, mais que la somme de ces champs est pratiquement nulle dès que l'échelle excède quelques dimensions atomiques. Le terme *homogène* est également important: lorsque deux métaux (par exemple, le zinc et le cuivre) sont mis en contact, il y a séparation de charges positives et négatives à l'interface. Un champ électrique règne dans l'interface bien que la charge globale sur les conducteurs soit nulle. Enfin, le terme *résultant* doit être gardé en tête: une erreur conceptuelle commune consiste à penser que les conducteurs «empêchent» les charges de produire un champ, alors que chaque charge produit bel et bien un champ en chaque point du conducteur; c'est la somme de ces champs qui est nulle.

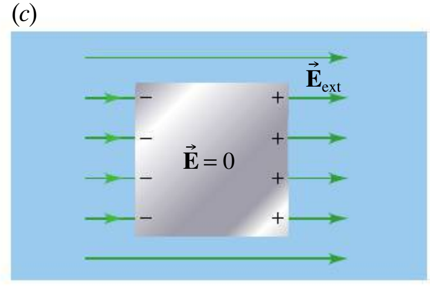
(*a*)



(*b*)



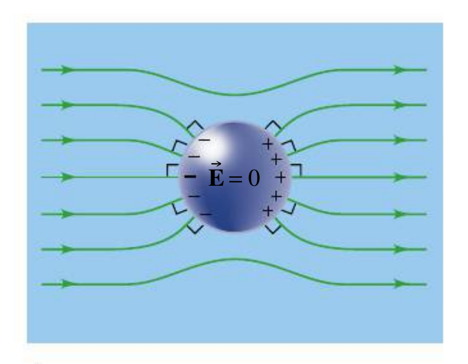
(*c*)



▲ **Figure 2.14**

(*a*) Un champ électrique extérieur produit une force sur les électrons libres du conducteur. (*b*) Sous l'effet du champ extérieur, il y a séparation de charge dans le conducteur; ces charges accumulées produisent un champ intérieur. (*c*) Une fois l'équilibre électrostatique atteint, le champ résultant à l'intérieur du conducteur est nul. On dit donc souvent que les lignes de champ «ne peuvent pas pénétrer» dans le conducteur. Si ce truc est pratique, il faut toutefois se rappeler que les charges produisent bel et bien les champs $\vec{\mathbf{E}}_{int}$ et $\vec{\mathbf{E}}_{ext}$ en chaque point du matériau conducteur.

En fonction des lignes de champ, l'énoncé 1 signifie qu'*on ne doit jamais tracer de lignes de champ à l'intérieur du matériau d'un conducteur à l'équilibre électrostatique*. (En effet, les lignes de champ représentent normalement le champ *résultant*, la figure 2.14*b* étant une exception.)

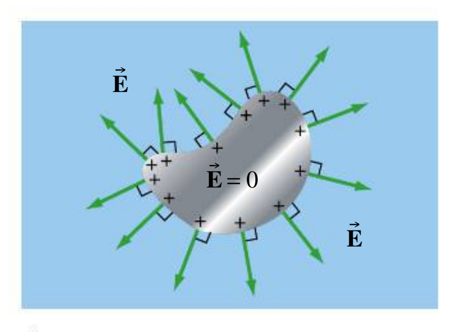


▲ **Figure 2.15**
À l'équilibre électrostatique, le champ résultant tout juste à l'extérieur du conducteur est partout perpendiculaire à la surface du conducteur, même s'il ne conserve pas forcément cette direction en s'éloignant.

Supposons maintenant que le conducteur de la figure 2.14 est remplacé par un conducteur dont les faces ne sont pas perpendiculaires au champ extérieur initial (figure 2.15). La propriété 1 s'applique toujours, mais on tire une conclusion supplémentaire : en plus de se concentrer sur le côté du conducteur où « pénètrent » les lignes de champ, les électrons libres réagiront à la composante du champ qui est parallèle à la surface et la ramèneront rapidement à zéro. En effet, à l'équilibre électrostatique, il ne peut rester de composante du champ extérieur qui serait parallèle à la surface : sinon une telle composante déplacerait les électrons libres le long de la surface et il n'y aurait pas d'équilibre électrostatique. Le même effet se produit de l'autre côté du conducteur. Ainsi,

Propriété 2 des conducteurs à l'équilibre électrostatique

2. À l'équilibre électrostatique, le champ électrique résultant en tout point situé juste à l'extérieur du conducteur est perpendiculaire à la surface de celui-ci.



▲ **Figure 2.16**
Quand un conducteur porte une charge totale non nulle, celle-ci se répartit entièrement sur la surface, afin que le champ résultant intérieur demeure nul. De plus, le champ résultant immédiatement hors du conducteur demeure partout perpendiculaire à la surface. (Notez que cette figure illustre des *vecteurs* champ et non les lignes de champ. Qu'il y ait ou non d'autres charges sources, les lignes de champ ne seraient pas rectilignes.)

Supposons maintenant que le conducteur possède une charge totale non nulle. Qu'il y ait ou non un champ $\vec{\mathbf{E}}_{\text{ext}}$ en plus du champ produit par la charge du conducteur, les énoncés 1 et 2, qui concernent le champ résultant, s'appliquent toujours. On en conclut qu'il ne peut y avoir la moindre parcelle du volume du matériau conducteur qui porte une charge macroscopique (figure 2.16). Une première façon d'expliquer cette conclusion fait appel au truc que nous avons mentionné plusieurs fois : comme chaque ligne de champ doit sembler être « émise » par une charge positive et « absorbée » par une charge négative, le fait qu'il n'y a pas de ligne de champ dans le matériau conducteur implique qu'il ne peut s'y trouver de charge. Une seconde façon d'expliquer cette conclusion consiste à faire appel au vecteur champ : si une charge macroscopique s'accumulait dans un petit volume du conducteur, le champ qu'elle produirait dominerait localement celui de toute autre charge ; près d'elle, il y aurait donc un champ résultant non nul. Or, le champ résultant doit être nul dans un conducteur une fois l'équilibre électrostatique atteint. Ainsi,

Propriété 3 des conducteurs à l'équilibre électrostatique

3. À l'équilibre électrostatique, toute charge macroscopique portée par un conducteur (homogène) se répartit sur sa surface ou ses surfaces, qu'elle soit distribuée uniformément ou non.

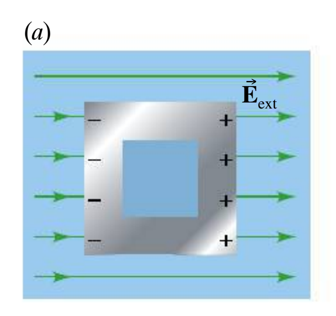
Évidemment, cette propriété ne signifie pas que tous les protons et tous les électrons du matériau migrent vers sa surface : seule la charge macroscopique, c'est-à-dire le *surplus* ou le *déficit* d'électrons, se stabilise à la surface.

Imaginons maintenant que l'on creuse une cavité à l'intérieur d'un conducteur. Puisque le champ est nul partout dans le matériau conducteur* malgré la

* Il ne faut pas confondre l'intérieur *du matériau* du conducteur, où le champ est nul, et la cavité percée dans ce matériau, qu'on est parfois porté à appeler l'« intérieur du conducteur ». En effet, comme la cavité elle-même n'est pas conductrice, le champ peut y être non nul.

présence d'un éventuel champ externe, le champ demeurera nul dans la cavité (figure 2.17*a*). Une **cage de Faraday** fonctionne selon ce principe : il s'agit d'une boîte métallique conductrice fermée (comme les boîtiers d'ordinateur) dont on se sert pour protéger un contenu sensible de l'effet des champs électriques qui existent dans l'environnement externe (figure 2.17*b*).

(*a*)

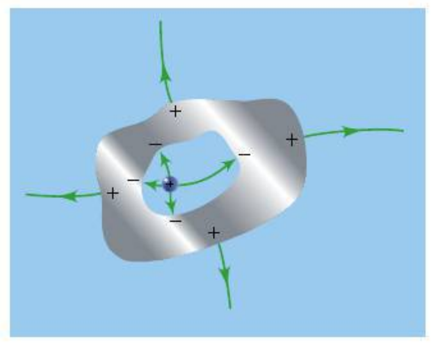


(*b*)



▲ **Figure 2.17**

(*a*) Le champ est toujours nul en chaque point d'une cavité creusée à l'intérieur d'un conducteur, pourvu que cette cavité ne contienne aucun objet chargé. (*b*) Une *cage de Faraday* est un tel conducteur creux qui sert à protéger un contenu sensible de tout champ extérieur. En pratique, un simple treillis métallique suffit.



▲ **Figure 2.18**

Si on place une charge Q à l'intérieur d'une cavité dans un conducteur, une charge $-Q$ sera induite sur la surface de la cavité. Si la charge totale du conducteur est nulle, il y aura une charge $+Q$ sur la surface extérieure. Dans le matériau conducteur, le champ créé par la charge centrale sera annulé par celui créé par les charges $+Q$ et $-Q$ séparées sur les surfaces du conducteur, exactement comme à la figure 2.14. (On note qu'en un point très éloigné à l'extérieur du conducteur, le champ électrique est le même que s'il n'y avait pas de conducteur.)

Bien sûr, si on place une charge Q dans la cavité (figure 2.18), elle produira un champ à l'intérieur de la cavité. Toutefois, ce champ agira sur les électrons libres du conducteur et y causera une séparation de charges. Exactement comme à la figure 2.14, le champ résultant dans le matériau du conducteur deviendra donc nul de façon presque instantanée. À l'équilibre, la charge induite sur la surface *interne* du conducteur creux est forcément de *même grandeur* et de signe opposé à la charge centrale Q : en effet, le nombre de lignes de champ qui débutent ou aboutissent à une charge est proportionnel à la grandeur de cette charge (voir la section précédente). Comme toutes les lignes de champ qui débutent à la charge $+Q$ doivent se terminer à la surface interne du conducteur, celle-ci doit forcément porter une charge $-Q$.

Exemple 2.5

Une sphère conductrice de rayon 50 cm porte une charge de −4 μC. On la place au centre d'une sphère creuse conductrice de 2,5 m de rayon externe, dont la cavité a un rayon de 1,5 m. La charge totale de la sphère creuse est de +12 μC. (a) Représenter schématiquement la distribution des charges ainsi que les lignes de champ. (b) Calculer le module du champ électrique aux distances r suivantes du centre commun aux deux sphères : 3 m ; 2 m ; 1 m ; 10 cm ; 0.

Solution

(a) À l'équilibre, seules les trois surfaces (celle de la petite sphère et les deux surfaces, interne et externe, de la sphère creuse) peuvent porter une charge. La charge de −4 μC portée par la petite sphère se répartit donc entièrement à la surface de celle-ci. Dans la cavité, les lignes de champ doivent donc pointer vers cette charge.

La question est ensuite de savoir comment la charge de +12 μC se fractionne entre les deux surfaces de la sphère creuse. À l'équilibre, le champ produit par la charge de la petite sphère a séparé cette charge de +12 μC d'une façon qui permet d'annuler le champ résultant dans le matériau de la sphère creuse. Le nombre de lignes de champ qui s'interrompent à la surface interne de cette sphère est donc *égal* au nombre de lignes de champ qui quittent la petite sphère. La surface interne de la sphère creuse porte donc +4 μC. ■

Étant donné que la charge totale de la sphère creuse est de +12 μC, il reste donc une charge de +8 μC qui se répartit sur la surface extérieure de la sphère creuse.

Le champ produit à l'extérieur de la sphère creuse est le champ résultant produit par la charge de chacune des trois surfaces. La charge totale du système est positive, les lignes de champ à grande distance doivent être dirigées vers l'extérieur. Les lignes de champ qui quittent la surface externe de la sphère creuse sont donc dirigées vers l'extérieur.

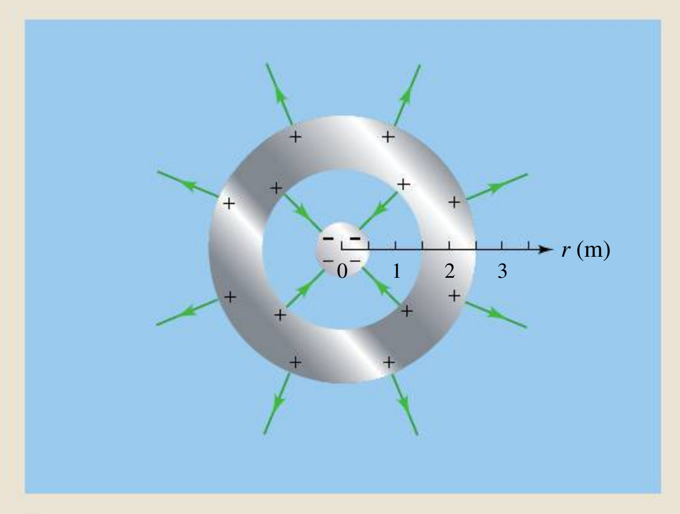
(b) À l'extérieur de la sphère creuse, le champ est le même que si le système était remplacé par une unique charge de +8 μC placée au centre commun des sphères (examinez les lignes de champ sur la figure 2.19) : cela correspond en effet à la charge totale des deux sphères. Pour trouver le module du champ électrique à $r = 3$ m, on peut donc utiliser l'équation 2.2 pour le champ d'une charge ponctuelle :

$$\begin{aligned} E &= k|Q|/r^2 \\ &= (9 \times 10^9 \text{ N·m}^2/\text{C}^2)(8 \times 10^{-6} \text{ C})/(3 \text{ m})^2 \\ &= 8 \text{ kN/C} \end{aligned}$$

À $r = 2$ m, on est à l'intérieur du matériau d'un conducteur, donc $E = 0$. Dans la cavité, le champ est le même que si la charge de −4 μC était placée au centre de la petite sphère et qu'il n'y avait aucune sphère creuse (examinez les lignes de champ). Le module du champ électrique à $r = 1$ m est donc

$$\begin{aligned} E &= k|Q|/r^2 \\ &= (9 \times 10^9 \text{ N·m}^2/\text{C}^2)(4 \times 10^{-6} \text{ C})/(1 \text{ m})^2 \\ &= 36 \text{ kN/C} \end{aligned}$$

À $r = 10$ cm et à $r = 0$, on est à l'intérieur du matériau d'un conducteur et $E = 0$.



▲ **Figure 2.19**

Distribution des charges et des lignes de champ électrique dans le cas d'une petite sphère conductrice chargée placée à l'intérieur d'une sphère conductrice creuse chargée.

2.4 LE MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP ÉLECTRIQUE UNIFORME

Un champ qui a la même valeur en chaque point de l'espace mais qui peut dépendre du temps est appelé **champ uniforme**. Nous allons maintenant étudier le cas de particules chargées en mouvement dans des champs électriques uniformes et constants dans le temps.

Lorsqu'on étudie le mouvement de particules élémentaires comme les protons ou les électrons dans des champs électriques, on peut négliger la force gravitationnelle. Ainsi, une particule de masse m et de charge q placée dans un champ électrique n'est soumise qu'à une force $\vec{\mathbf{F}}_E = q\vec{\mathbf{E}}$. D'après la deuxième loi de Newton, $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = \vec{\mathbf{F}}_E = m\vec{\mathbf{a}}$, et ainsi son accélération est*

$$\vec{\mathbf{a}} = \frac{q\vec{\mathbf{E}}}{m} \tag{2.6}$$

Si le champ est uniforme, l'accélération est constante en module et en orientation ; nous pouvons donc utiliser les équations de la cinématique valables pour une accélération constante (voir les équations 3.9 à 3.12 de la section 3.6 du tome 1) :

$$\begin{aligned} v_x &= v_{x0} + a_x t \\ x &= x_0 + \tfrac{1}{2}(v_{x0} + v_x)t \\ x &= x_0 + v_{x0}t + \tfrac{1}{2}a_x t^2 \\ v_x^2 &= v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0) \end{aligned}$$

* On suppose ici que la vitesse des particules est très inférieure à la vitesse de la lumière. Sinon il faudrait tenir compte des facteurs de correction qui découlent de la théorie de la relativité restreinte (voir le chapitre 8 du tome 3).

Pour produire un tel champ uniforme, nous verrons à la section 2.5 qu'on utilise en pratique deux plaques portant des charges de même grandeur et de signes opposés (voir la figure 2.20). À la section 5.1, nous verrons qu'un tel dispositif peut être appelé un **condensateur plan**.

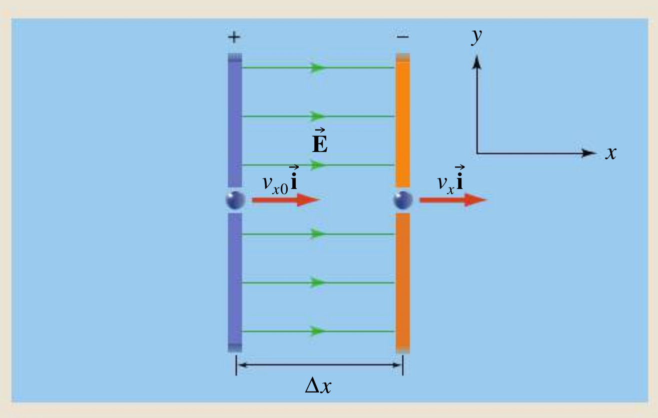
Comme le montrera le premier des exemples suivants, l'accélération qu'un champ électrique imprime à une particule élémentaire chargée peut facilement être considérable. Cela permet de nombreuses applications biomédicales : en bombardant un objet avec un jet d'électrons à haute vitesse, on tue les bactéries portées par l'objet, ce qui constitue une stérilisation efficace ; les rayons X utilisés pour la radiographie sont produits par décélération rapide d'un jet d'électrons ; des jets d'électrons très fins sont aussi utilisés en laboratoire pour « écrire » sur des surfaces microscopiques.

Une autre application technologique qui utilise des jets d'électrons (guidés par un champ électrique ou un champ magnétique, selon le modèle) est le *tube à rayons cathodiques*. Jusqu'au début des années 2000, ce dispositif était utilisé pour produire l'image dans presque tous les téléviseurs, les écrans d'ordinateur et certains appareils électroniques comme l'oscilloscope analogique. L'exemple 2.7 (voir la figure 2.21) illustre son fonctionnement. Depuis l'avènement des écrans plats, cette technologie est toutefois disparue (voir le sujet connexe à la fin de cette section).

Nous verrons aussi, au chapitre 6, qu'une pile électrique peut être utilisée pour produire un champ électrique uniforme dans un fil conducteur et l'empêcher d'atteindre l'état d'équilibre électrostatique. Sous l'effet de ce champ, les électrons libres décrivent de courtes trajectoires à accélération constante, entrecoupées de collisions avec les atomes immobiles.

Exemple 2.6

Un proton parcourt une distance de 4 cm parallèlement à un champ électrique uniforme $\vec{\mathbf{E}} = 10^3\,\vec{\mathbf{i}}$ N/C, comme le montre la figure 2.20. Trouver sa vitesse finale si sa vitesse initiale est égale à 10^5 m/s.



▲ **Figure 2.20**

Un proton est accéléré dans un champ électrique uniforme, produit par deux grandes plaques possédant des charges de même grandeur, uniformément distribuées et de signes opposés. On montre à la section suivante que, dans une telle situation, le champ électrique est uniforme entre les plaques et nul à l'extérieur (voir la figure 2.44, p. 67).

Solution

L'accélération du proton a pour composante

$$a_x = \frac{eE}{m} = \frac{(1{,}6\times 10^{-19}\ \text{C})(10^3\ \text{N/C})}{1{,}67\times 10^{-27}\ \text{kg}} = 9{,}6\times 10^{10}\ \text{m/s}^2$$

elle est donc orientée vers la plaque négative. L'équation de la cinématique qui convient ici est l'équation du carré de la vitesse :

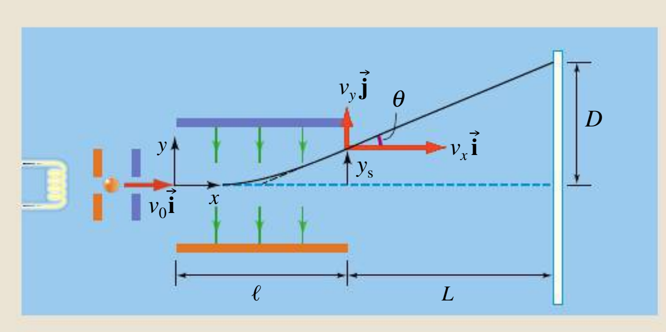
$$\begin{aligned} v_x^2 &= v_{x0}^2 + 2a_x\Delta x \\ &= (10^5\ \text{m/s})^2 + 2(9{,}6\times 10^{10}\ \text{m/s}^2)(4\times 10^{-2}\ \text{m}) \\ &= 1{,}77\times 10^{10}\ \text{m}^2/\text{s}^2 \end{aligned}$$

Donc, $v_x = 1{,}3\times 10^5$ m/s.

Malgré la valeur relativement faible du champ (1000 N/C), l'accélération communiquée au proton est considérable. Cela s'explique par l'extrême petitesse de sa masse. En général, il est donc très facile de faire accélérer des particules élémentaires. ■

Exemple 2.7

Dans un type de tube à rayons cathodiques, un mince filament chauffé émet des électrons qu'on fait passer par des ouvertures percées dans deux disques (figure 2.21), de manière à obtenir un faisceau. Leur vitesse est alors $v_0\vec{\mathbf{i}}$. Ils se déplacent ensuite entre deux plaques de longueur ℓ qui produisent un champ électrique uniforme $\vec{\mathbf{E}} = -E\vec{\mathbf{j}}$. Dans le champ, leur accélération est constante et leur trajectoire est donc parabolique, comme ce serait le cas pour un projectile soumis plutôt à la force gravitationnelle. Après avoir quitté la région comprise entre les deux plaques, ils se dirigent en ligne droite vers un écran recouvert d'une substance fluorescente, du ZnS par exemple. Un petit éclair lumineux est produit chaque fois qu'un électron frappe l'écran. Déterminer: (a) la position verticale de l'électron à sa sortie des plaques; (b) à quel angle il émerge des plaques; (c) sa position verticale finale sur l'écran, qui se trouve à une distance L de l'extrémité des plaques.



▲ **Figure 2.21**

Dans un tube à rayons cathodiques, des électrons émis par un filament chauffé sont accélérés par un champ créé entre deux disques chargés (percés de trous) puis déviés par le champ électrique existant entre deux plaques. Lorsque l'électron frappe l'écran (le rectangle blanc à droite de la figure), un éclair lumineux se produit.

Solution

(a) Puisque $q = -e$ et $\vec{\mathbf{E}} = -E\vec{\mathbf{j}}$, l'accélération est

$$\vec{\mathbf{a}} = +\frac{eE}{m}\vec{\mathbf{j}}$$

On note que l'accélération est orientée vers l'électrode positive, dans le même sens que la force.

Il n'y a pas d'accélération dans la direction des x. Entre les plaques, les coordonnées de la position de l'électron sont donc données par

$$x = v_0 t; \qquad y = \frac{1}{2}a_y t^2$$

Comme l'électron met un temps $t = \ell/v_0$ pour franchir la distance horizontale ℓ entre les plaques, sa coordonnée verticale à la sortie des plaques est

$$y_s = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}\left(\frac{\ell}{v_0}\right)^2 \qquad \text{(i)}$$

(b) À partir des composantes de sa vitesse à la sortie des plaques, on peut trouver l'angle θ:

$$v_x = v_0; \qquad v_y = a_y t = \frac{eE}{m}\frac{\ell}{v_0}$$

On obtient

$$\tan\theta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{eE\ell}{mv_0^2} \qquad \text{(ii)}$$

(c) Sur la figure 2.21, on voit que $\tan\theta = (D - y_s)/L$. On a donc

$$D = y_s + L\tan\theta \qquad \text{(iii)}$$

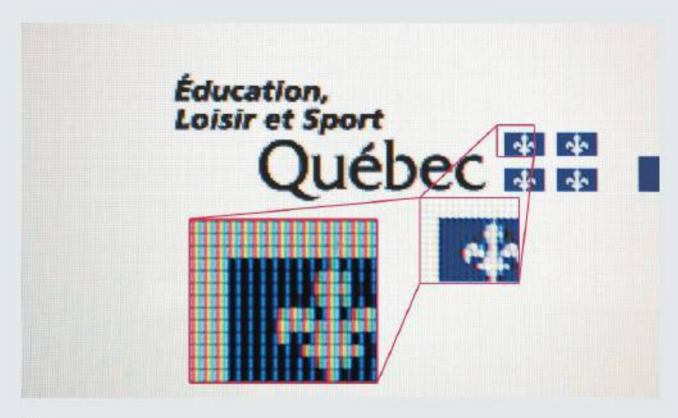
SUJET CONNEXE

La télévision et les écrans numériques

La technologie du tube à rayons cathodiques (TRC), dont nous avons expliqué le rôle dans le fonctionnement des anciens téléviseurs, a été abandonnée au début des années 2000. Les écrans d'aujourd'hui, qu'il s'agisse d'écrans de téléviseurs, d'ordinateurs, de tablettes numériques ou autres, reposent sur la technologie du plasma, initialement employée dans l'industrie informatique, ou sur celle de l'affichage à cristaux liquides (ACL, aussi connu sous l'acronyme anglophone LCD), initialement utilisée pour l'affichage de montres et de calculatrices. Dans ce sujet connexe, nous allons comparer les technologies du plasma et de l'ACL avec la technologie du TRC.

La production de l'image

Tous les types d'écrans ont en commun de produire une image en juxtaposant une série de *pixels* (de l'anglais «*pict*ure *el*ement»). L'image paraît lisse, car l'écran est conçu pour être regardé à une distance où le pouvoir de résolution de l'œil (voir la section 7.3 du tome 3) est trop faible pour distinguer les pixels. Ceux-ci ne deviennent apparents que si on colle notre œil sur l'écran, comme le montre le premier agrandissement de la figure 2.22.



▲ **Figure 2.22**

Pour afficher une image, un écran colore une série de petits points juxtaposés. Quand on regarde de près, on distingue ces *pixels* (premier agrandissement). Quand on regarde d'encore plus près (second agrandissement), on voit que chaque pixel est subdivisé en trois sous-pixels: rouge, vert et bleu. En variant l'intensité relative des sous-pixels, on donne au pixel une couleur donnée.

Le nombre de pixels que peut afficher un écran détermine sa *résolution* ou *définition*. Plus il est élevé, plus l'écran peut être regardé de près (pour une même taille). Les écrans des anciens téléviseurs à TRC comportaient 720 colonnes et 480 lignes, ce qui équivaut à 345 600 pixels, qu'on écrit plus simplement «720 × 480». Aujourd'hui, les standards sont nombreux, l'écran d'un iPhone 6 ayant une résolution de 750 × 1334 et les téléviseurs à haute définition (HD), 1920 × 1080. Les téléviseurs «Ultra HD» atteignent 7680 × 4320.

Pour produire l'illusion d'une image en mouvement, on décompose le mouvement en une *succession d'images fixes*. Quand plus d'une quinzaine d'images par seconde sont affichées, notre cerveau «complète» ce qui se produit entre chaque image et on croît que l'image est effectivement en mouvement. En pratique, l'image est *rafraîchie* bien plus souvent, 48 ou 72 fois par seconde au cinéma et 30 à 240 fois par seconde sur les téléviseurs et les écrans d'ordinateur. L'affichage des pixels est donc extrêmement rapide: même pour un écran 720 × 480 à une fréquence de rafraîchissement de 60 Hz, ce sont 720 × 480 × 60 = 20,7 millions de pixels qui sont illuminés chaque seconde.

Pour afficher une image, un écran illumine de façon successive tous ses pixels. Ce *balayage* se fait selon une séquence standardisée: on balaie tous les pixels d'une ligne avant de passer à la ligne suivante et toutes les lignes de l'écran sont balayées un certain nombre de fois par seconde. Pour réduire le clignotement de l'image perçu par l'œil, certains écrans utilisent l'*entrelacement*: plutôt que de balayer chacune des lignes dans l'ordre, on balaye toutes les lignes paires suivies de toutes les lignes impaires. L'œil perçoit donc deux fois plus de rafraîchissements par seconde et l'image semble plus stable. Dans les écrans *progressifs*, la fréquence de rafraîchissement est assez élevée pour que l'entrelacement ne soit plus nécessaire.

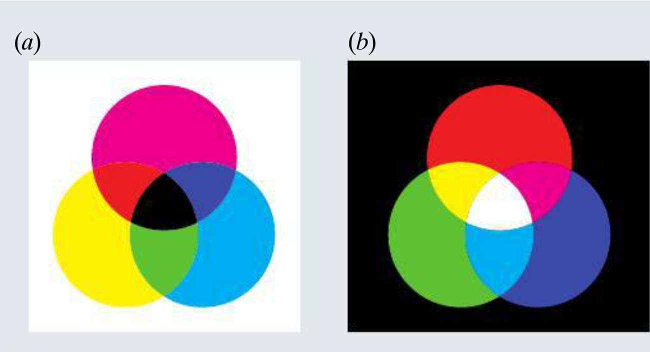
Examinons maintenant le fonctionnement d'un pixel. Le physicien Thomas Young (1773-1829) a observé qu'on pouvait *synthétiser* toute couleur en mélangeant les trois *couleurs primaires* que sont le rouge, le vert et le bleu. Ces couleurs sont celles qui activent *seulement un* des trois types de *cônes*, ces cellules photosensibles qui tapissent la surface interne de l'œil. (Leur «mélange» est donc avant tout une construction de notre cerveau*.) Ainsi, chaque pixel est divisé en trois *sous-pixels*, respectivement rouge, vert et bleu, afin de produire n'importe quelle couleur par la variation de l'intensité relative des sous-pixels. Prenons un exemple où chaque sous-pixel peut prendre 256 intensités différentes, comme c'est le plus souvent le cas en télévision numérique ou dans un écran d'ordinateur. Ainsi, chaque pixel peut afficher 256^3 = 16,8 millions de couleurs différentes. Dans les vieux téléviseurs à TRC, l'intensité de chaque sous-pixel pouvait même être ajustée de façon continue. Comparativement aux pixels, il faut être encore plus proche de l'écran pour distinguer les sous-pixels (à la figure 2.22, on ne les distingue que sur le second agrandissement). Il faut noter que les trois couleurs primaires d'un écran diffèrent des trois couleurs primaires utilisées en dessin ou en imprimerie (figure 2.23).

Les écrans utilisant la phosphorescence

Les trois types d'écrans diffèrent surtout par la façon dont ils illuminent leurs pixels. Les écrans TRC et les écrans plasma utilisent des *revêtements fluorescents* (qui émettent de la lumière), alors que les écrans ACL utilisent des *cristaux liquides* (qui bloquent de la lumière). Nous allons d'abord voir comment fonctionne le premier procédé, avant de passer au second.

* Par exemple, un mélange de rouge et de vert nous paraît jaune parce qu'il active les cônes sensibles à ces deux couleurs, exactement comme le fait une lumière jaune «pure» de 590 nm de longueur d'onde. Notre cerveau ne peut donc absolument pas faire la différence.





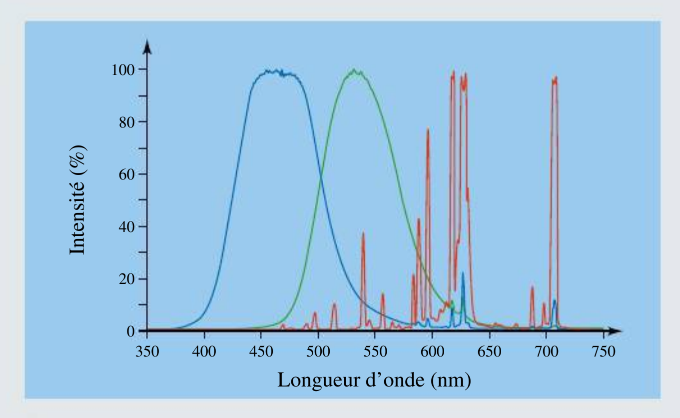
▲ **Figure 2.23**

(*a*) En dessin ou en imprimerie, on utilise la *synthèse soustractive*: les pigments éliminent des composantes de couleur dans la lumière blanche réfléchie par la feuille. Plus on en élimine, plus la lumière réfléchie a une couleur sombre, la combinaison des trois couleurs primaires magenta, jaune et cyan produisant du noir. (*b*) Un écran ou un éclairage scénique utilise plutôt la *synthèse additive*: la lumière projetée ajoute des composantes de couleur à ce qui était initialement obscur. Plus on en ajoute, plus la couleur obtenue est vive, la combinaison des trois couleurs primaires rouge, vert et bleu produisant du blanc.

La phosphorescence est un phénomène où des atomes d'un matériau reçoivent d'abord de l'énergie qui les fait passer à un niveau *excité*, puis restituent cette énergie en émettant de la lumière faite de couleurs caractéristiques du matériau (spectre discret). La phosphorescence est utilisée notamment dans la fabrication des jouets qui « brillent dans le noir »; elle ne doit pas être confondue avec la fluorescence, utilisée notamment dans les éclairages « au néon ». La phosphorescence se distingue de la fluorescence par le fait que la lumière continue d'être émise pendant un certain temps après le retrait de la source d'énergie. Ce temps dépend de la nature du matériau et peut varier de quelques microsecondes à plusieurs minutes, mais demeure nettement plus long que celui de la fluorescence ($\approx 10^{-8}$ s).

Les revêtements phosphorescents les plus fréquents, qu'on identifie à l'aide de codes débutant par la lettre P, sont des oxydes ou des sulfures, notamment d'aluminium, de zinc ou de cadmium, auxquels on mélange une petite proportion d'atomes d'un métal appelé *activateur*. Celui-ci affecte le spectre de la lumière émise, mais a aussi pour rôle d'ajuster le temps pendant lequel le matériau continue d'émettre de la lumière après le retrait de la source d'énergie. En jargon technique, on appelle ces matériaux « des phosphores », mais il importe de ne pas les confondre avec l'élément appelé phosphore, dont ils sont totalement dépourvus.

Selon les applications, on privilégie un matériau phosphorescent plutôt qu'un autre. Par exemple, le sulfure de zinc (ZnS) activé par 5 ppm de cuivre est le phosphore le plus utilisé dans la fabrication des jouets lumineux, pour sa lueur verte émise pendant une période très prolongée. Le même sulfure de zinc, avec un activateur dosé différemment, devient le revêtement P31 qui émet pendant moins d'une milliseconde et servait dans les vieux écrans d'oscilloscope à TRC. Dans un téléviseur à TRC ou à plasma, les sous-pixels sont tapissés des revêtements P22B, P22G et P22R qui émettent respectivement une lumière à dominante bleue, verte et rouge. La figure 2.24 illustre leur spectre d'émission.



▲ **Figure 2.24**

Dans chaque pixel d'un écran plasma (ou TRC), les trois sous-pixels sont recouverts de matériaux phosphorescents émettant des spectres à dominante bleue, verte et rouge.

Pour produire une image, il faut utiliser une source d'énergie pour exciter les revêtements phosphorescents appropriés avec une intensité appropriée. La méthode utilisée par le TRC consiste à projeter des jets d'électrons sur les revêtements de chaque sous-pixel, alors que l'écran plasma utilise des rayons ultraviolets. Nous allons maintenant comparer ces deux méthodes.

Dans un TRC, des électrons sont produits et accélérés par trois *canons à électrons*, un pour les sous-pixels de chacune des couleurs primaires. Dans chaque canon, les électrons proviennent de la *cathode*, un filament chauffé afin de provoquer leur éjection (voir la figure 2.21, p. 50). Ils sont ensuite accélérés par un champ électrique ($\approx 10^6$ V/m) dont on ajuste l'intensité afin d'obtenir la vitesse finale voulue. Enfin, un autre champ, électrique ou magnétique, permet de diriger les électrons à la fois verticalement et horizontalement vers le pixel visé, suivant la séquence de balayage. (Après avoir atteint l'écran, les électrons retournent à la cathode en suivant un parcours conducteur prévu à cet effet.)

À mesure qu'une ligne donnée de l'écran est balayée, l'intensité du faisceau d'électrons est ajustée pour que les sous-pixels atteints par le jet soient illuminés de façon appropriée (c'est-à-dire pour produire une ligne de l'image voulue). L'information qui permet cet ajustement est transmise par le *signal vidéo composite*. La photographie d'un écran TRC révèle que les pixels sont excités une seule fois par rafraîchissement, contrairement à l'écran plasma (figure 2.25).



▲ **Figure 2.25**

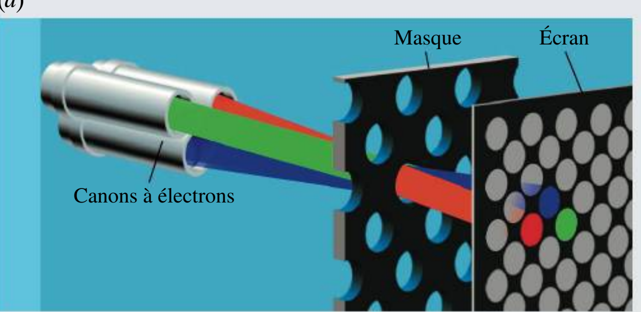
Sur cette photographie prise avec un temps d'exposition suffisamment court, on voit que les pixels d'un écran TRC sont illuminés successivement par un balayage horizontal de chaque ligne. Cela cause un léger clignotement de l'image, qui n'existe pas dans un écran plasma.

Pour assurer que chacun des trois jets d'électrons n'atteint que les sous-pixels de la couleur voulue, les écrans TRC utilisent un obstacle appelé *masque* ou *grille*, muni d'un seul orifice devant chaque pixel (figure 2.26). Les canons sont disposés côte à côte ou en triangle, de telle façon que leurs jets d'électrons, lorsqu'ils traversent le *même* trou du masque, aboutissent respectivement sur chacun des trois sous-pixels d'un même pixel. La façon dont sont disposés les canons détermine la façon dont les sous-pixels sont disposés au sein d'un même pixel : dans le cas illustré, ils forment un triangle, mais ils peuvent aussi être côte à côte.

Le défaut principal des écrans TRC est leur importante profondeur, essentielle pour que les jets d'électrons puissent atteindre l'écran de façon presque perpendiculaire. L'écran plasma, inventé en 1964 et utilisé d'abord comme écran d'ordinateur monochrome, puis commercialisé en 1997 comme écran de téléviseur, a été la première technologie permettant de construire un écran plat (figure 2.27). Dans un tel écran, le revêtement des sous-pixels n'est pas excité par des jets d'électrons mais plutôt par le rayonnement ultraviolet produit par un *plasma*, c'est-à-dire un gaz ionisé.

Chacun des sous-pixels d'un écran plasma est une minuscule cellule dont les parois internes sont tapissées du revêtement phosphorescent et dont une des faces (celle qui donne sur le devant du téléviseur) est transparente. Ces milliers de cellules, prises en sandwich entre deux grandes plaques de verre, sont remplies d'un gaz, habituellement un mélange de xénon et de néon. Quand on établit un champ électrique dans ce gaz, celui-ci s'ionise et est traversé par une décharge électrique, excitant une partie de ses atomes. Par





▲ **Figure 2.26**

(*a*) Chacun des trois jets d'électrons n'atteint l'écran que lorsqu'il passe vis-à-vis d'un des orifices percés dans le masque. La position de ces orifices est calculée pour que chaque canon ne puisse éclairer que les sous-pixels d'une même couleur primaire. Sur l'écran, à droite, on distingue les trois sous-pixels qui correspondent à un des orifices. (*b*) En agrandissant une photographie d'un écran TRC, on peut facilement distinguer les pixels et la disposition des sous-pixels.







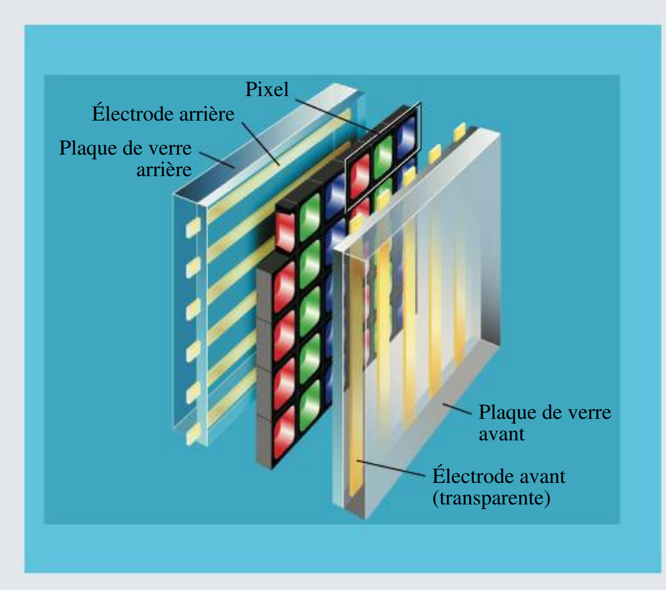
▲ **Figure 2.27**

Ce terminal PLATO V de 1981 montre l'affichage monochrome que produisaient les premiers écrans plasma, inventés en 1964.



fluorescence, ces atomes émettent des ultraviolets, qui, eux, excitent le revêtement phosphorescent.

Pour établir un champ électrique dans les cellules des sous-pixels, celles-ci doivent être reliées de façon individuelle à un circuit électrique. On n'utilise pas deux fils différents par sous-pixel, mais plutôt un *adressage matriciel* : comme l'illustre la figure 2.28, on dispose à l'arrière des sous-pixels une rangée d'électrodes horizontales et, à l'avant, une rangée d'électrodes verticales. Chaque électrode est en contact avec un grand nombre de sous-pixels, mais une combinaison donnée d'une électrode verticale et d'une électrode horizontale n'est reliée qu'à un sous-pixel unique. Pour illuminer un sous-pixel, il suffit donc d'appliquer une différence de potentiel (voir le chapitre 4) entre les deux électrodes appropriées.



▲ **Figure 2.28**

Pour illuminer une des cellules d'un écran plasma, on utilise un adressage matriciel : une combinaison donnée d'une électrode verticale et d'une électrode horizontale n'est reliée qu'à un sous-pixel unique.

La construction d'un écran plasma pose un défi technique : les électrodes du devant doivent être transparentes pour ne pas masquer la lumière émise par les revêtements phosphorescents. Pour ce faire, on fabrique ces électrodes avec un matériau qui est à la fois transparent à la lumière et conducteur d'électricité, l'oxyde d'indium-étain. (Utilisé dans les électrodes des montres Timex, le nom de ce matériau a inspiré celui de la marque *IndiGlo*.) En raison de l'extrême fragilité de ce matériau, dont les électrodes sont faites, on protège celles-ci en les recouvrant d'une pellicule d'oxyde de magnésium.

Dans un TRC, un sous-pixel est excité quand il reçoit le faisceau d'électrons et ne s'allume à nouveau que lorsque le faisceau repasse (voir la figure 2.25). C'est l'intensité du faisceau qui permet de contrôler la luminosité du sous-pixel. Dans un écran plasma, il en va tout autrement : chaque décharge appliquée au gaz d'une cellule est identique. Pour contrôler la luminosité du sous-pixel, on joue plutôt sur la fréquence des décharges : plus les décharges se succèdent rapidement et plus la lumière émise paraît vive. Cette fréquence demeure la même jusqu'au prochain rafraîchissement d'écran. En conséquence, l'image d'un écran plasma ne clignote pas comme celle d'un écran TRC.

L'écran à cristal liquide

Du point de vue du téléspectateur, l'avantage le plus visible de l'écran plasma réside dans sa profondeur nettement inférieure à celle des écrans TRC. Une autre technologie permettant de fabriquer des écrans plats, aujourd'hui la plus populaire sur le marché, est fondée sur l'utilisation de *cristaux liquides* plutôt que des revêtements phosphorescents. Un cristal liquide est un état de la matière qu'on peut voir comme un intermédiaire entre l'état solide et l'état liquide. Quand on chauffe un matériau ordinaire, on atteint le point de fusion, une température précise où celui-ci passe de l'état solide (où ses molécules forment un agencement très régulier, un cristal) à l'état liquide (où ses molécules forment un amoncellement désordonné où elles sont toutes mobiles). En 1888, le biochimiste Friedrich Reinitzer (1857-1927) observa pour la première fois un matériau qui semblait présenter *deux points de fusion* : en chauffant du benzoate de cholestérol initialement solide, il constata que ce matériau « fondait » une première fois à 145,5 °C, devenant une substance fluide et trouble, laquelle « fondait » à nouveau, à 178,5 °C, devenant un liquide limpide. La première substance fluide, intermédiaire entre l'état solide et l'état liquide, est le *cristal liquide*.

Le benzoate de cholestérol, comme les autres cristaux liquides, est constitué de molécules allongées qui ont tendance à s'agglomérer en *domaines* au sein desquels elles demeurent alignées parallèlement, bien qu'elles puissent tout de même bouger les unes par rapport aux autres. Les molécules peuvent aussi s'aligner sur les rayures que comporte une paroi solide avec laquelle elles sont en contact, ce qui fut mis à profit dans la conception de la technologie de l'ACL comme nous le verrons ci-dessous. Du point de vue macroscopique, un cristal liquide présente donc une fluidité, typique d'un liquide, tout en ayant des propriétés attribuées à l'orientation organisée de ses molécules, typiques de certains

solides. Une propriété fréquente des cristaux liquides, en particulier, est la *biréfringence*, c'est-à-dire un indice de réfraction qui n'est pas le même dans toutes les directions. Cette biréfringence* est précisément la propriété qui permet aux cristaux liquides d'être utilisés pour fabriquer des affichages numériques : comme nous le verrons ci-dessous, ces matériaux modifient l'état de la lumière qui les traverse, ce qui leur permet de servir de « porte », laissant passer la lumière ou la bloquant. Leur fluidité est elle aussi essentielle : c'est en déplaçant les molécules qu'on peut « ouvrir » ou « fermer » la porte, ce qui serait impossible dans un solide.

En 1970, la méthode qui permet de fabriquer les écrans ACL fut mise au point. Au départ, ils furent surtout utilisés pour fabriquer des écrans de montres, de calculatrices puis éventuellement d'ordinateurs portables et de tablettes numériques. Ce n'est qu'après 2006 qu'on put fabriquer des écrans ACL aussi grands que les écrans plasma.

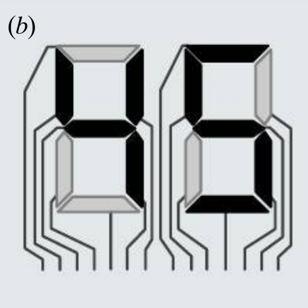
Petit ou grand, un écran ACL est composé de cellules, contenues entre deux plaques de verre, qui renferment des cristaux liquides. Dans un écran ACL couleur, ces cellules sont des sous-pixels ; dans l'écran ACL d'une montre, il n'y a que sept grandes cellules par chiffre (figure 2.29). Alors que les cellules d'un écran plasma émettent (ou non) de la lumière grâce à la phosphorescence, celles d'un ACL *bloquent* (ou non) la lumière. Dans la plupart des ACL, il s'agit de la lumière blanche émise par une source située derrière les cellules, par exemple des diodes électroluminescentes (voir la section 11.8 du tome 3). Dans d'autres cas, celui d'une montre ou d'une calculatrice notamment, c'est plutôt un miroir qui est placé derrière la cellule. L'écran ACL dépend alors de l'éclairage ambiant pour qu'on puisse voir ce qu'il affiche.

Le fonctionnement d'une cellule d'ACL peut s'expliquer à l'aide du modèle électromagnétique de la lumière (voir le chapitre 13), selon lequel la lumière est composée de champs électriques et magnétiques dont la valeur en chaque point oscille. On place derrière la cellule un *filtre polariseur* (voir la section 7.9 du tome 3 ; noter que ce nom n'a rien à voir avec le phénomène de la section 2.7), qui a pour effet de ne laisser passer que la lumière dont le champ électrique oscille selon un axe *horizontal*, et, à l'avant de la cellule, un second filtre identique ne laissant passer que la lumière dont le champ électrique oscille *verticalement*. (Ces filtres sont représentés par les plaques rayées sur la figure 2.30.) En somme, s'il n'y avait pas de cristaux liquides entre les deux filtres, aucune lumière ne les traverserait, car les filtres ont des axes de polarisation perpendiculaires entre eux. Ce n'est toutefois pas ce qui se produit, puisque les cristaux liquides peuvent modifier l'état de polarisation de l'onde électromagnétique qui les traverse (c'est-à-dire l'orientation de l'axe selon lequel le champ électrique oscille, parallèle au plan de la flèche jaune sur la figure 2.30). Pour ce faire, on doit placer les molécules de cristal liquide d'une façon très particulière. Cela est possible en gravant des rayures horizontales sur le verre de la paroi arrière qui borde la cellule et des rayures verticales sur le verre de la paroi avant : les molécules ont donc tendance à s'aligner à la fois entre elles et sur ces rayures, ce qui n'est possible qu'au prix d'une certaine « torsion ». La distance entre les deux parois (environ 20 μm) étant judicieusement choisie, les molécules se stabilisent en une *structure en hélice* (en vert sur la figure 2.30*a*).

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 2.29**

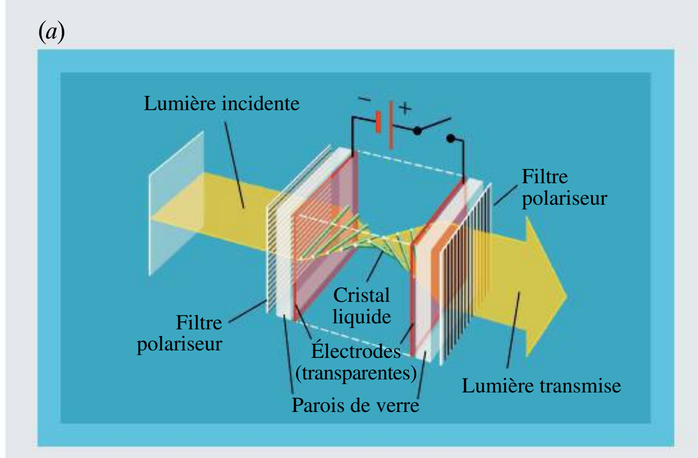
Dans une calculatrice, sept cellules de cristaux liquides suffisent à afficher chaque chiffre. Par exemple, pour produire le chiffre « 4 », un champ électrique rend opaques quatre de ces cellules, alors que les trois autres, transparentes, sont à leur état normal.

Quand la lumière traverse une cellule d'ACL qui est dans l'état illustré à la figure 2.30*a*, elle est d'abord polarisée horizontalement par le premier filtre, puis elle atteint les molécules de cristal liquide. Celles-ci étant biréfringentes, elles font tourner le plan de polarisation de la lumière, de façon à ce qu'il demeure *parallèle aux*

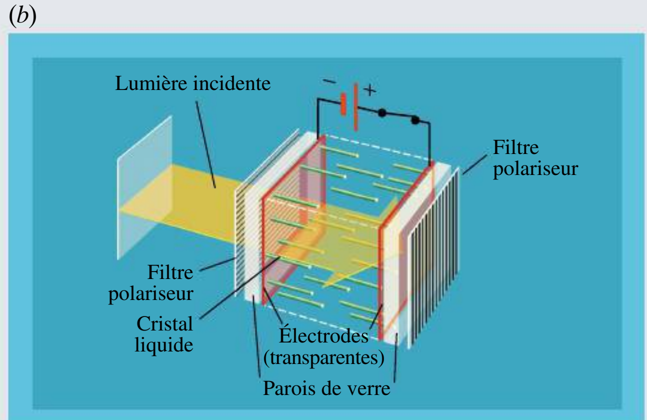


* À la section 7.9 du tome 3, la biréfringence est définie comme un phénomène où des ondes polarisées selon différents plans progressent à des vitesses différentes. Les cristaux liquides présentent une *biréfringence circulaire*, qui est légèrement différente. La lumière polarisée incidente sur un cristal liquide peut être vue comme la superposition d'une onde dont le plan de polarisation tourne en sens horaire et d'une onde de même amplitude dont le plan de polarisation tourne en sens antihoraire. Dans un cristal liquide, ce sont ces deux composantes qui progressent à des vitesses différentes.

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 2.30**

Une cellule d'ACL est composée de plusieurs couches : le cristal liquide est enfermé entre deux plaques de verre qui contiennent des électrodes (en rouge), ces plaques étant elles-mêmes situées entre deux polariseurs croisés (plaques rayées en noir). Selon l'arrangement des molécules de cristal liquide, la lumière peut traverser ou non. (*a*) En l'absence de champ électrique, ces molécules forment une structure en hélice qui a la propriété de changer l'état de polarisation de la lumière qui la traverse. La lumière peut donc traverser la cellule bien que les filtres polariseurs soient croisés. (*b*) Pour rendre la cellule opaque, ce qui « éteint » le pixel, on établit un champ électrique qui fait pivoter les molécules, de sorte qu'elles ne peuvent plus agir sur l'état de polarisation de la lumière.

molécules. Comme les molécules forment une structure en hélice qui tourne de 90°, la lumière passe graduellement d'une polarisation horizontale à une polarisation verticale (figure 2.30*a*). Quand elle atteint le second polariseur, elle a donc la polarisation requise pour traverser et la cellule est illuminée. (Si cette cellule est un sous-pixel, on ajoute par-dessus la cellule un filtre de couleur pour que la lumière transmise paraisse rouge, verte ou bleue.) Pour que la cellule puisse aussi être « éteinte », on a ajouté dans le verre des parois avant et arrière des électrodes (transparentes) en oxyde d'indium-étain. En les branchant, on crée un champ électrique uniforme entre ces électrodes, exactement comme dans un condensateur plan. Les molécules de cristal liquide possédant un moment dipolaire électrique, elles ont tendance à s'aligner sur ce champ (voir la section 2.6), ce qui détruit momentanément la structure en hélice (figure 2.30*b*). Les molécules étant alors orientées parallèlement à la direction de propagation de la lumière, elles n'ont plus le moindre effet sur celle-ci, qui est alors bloquée entièrement par les polariseurs croisés. (Comme le montre la figure 2.30*b*, la flèche jaune qui symbolise la lumière est interrompue par le second polariseur.) Quand le champ électrique est retiré, les molécules se réorganisent en hélice en quelques millisecondes.

Dans une montre, chacune des électrodes est reliée à un circuit, de telle sorte qu'elle puisse être contrôlée individuellement, comme l'illustre la figure 2.29*b*. Par contre, dans un écran d'ordinateur, de téléviseur, d'iPod ou de téléphone cellulaire, le grand nombre de cellules exige le recours à une matrice d'électrodes similaire à celle utilisée dans les écrans plasma.

Les écrans ACL, qui dominent le marché des ordinateurs portables, tablettes et cellulaires, constituent aussi depuis 2007 la majorité des ventes de téléviseurs à l'échelle mondiale. Malgré cette popularité, ils ne produisent pas d'images aussi vives et contrastées que celles des écrans TRC ou plasma. De plus, leur temps de réponse, c'est-à-dire le délai requis pour qu'un pixel passe de l'état « allumé » à l'état « sombre » demeure élevé, ce qui est suffisant pour embrouiller une séquence où l'image bouge rapidement.

D'autres technologies aussi sont prometteuses. Par exemple, les écrans à diodes électroluminescentes organiques (OLED) combinent certains avantages des écrans ACL et des écrans plasma. Jusqu'à présent, les écrans ACL à structure en hélice demeurent la technologie la plus utilisée, mais cela pourrait changer dans un avenir prochain.

2.5 LES DISTRIBUTIONS DE CHARGES CONTINUES

Nous allons maintenant nous intéresser à des objets qui portent une charge électrique qui n'est pas ponctuelle. Comme nous le verrons, on peut imaginer que ces objets sont composés d'un très grand nombre de petits éléments infinitésimaux dq qui peuvent être considérés comme des charges ponctuelles. Nous commençons donc la section par une description de tels éléments.

Densité linéique de charge

Pour décrire la distribution de charge sur un objet qui a la forme d'un fil, on utilise souvent la **densité linéique de charge** (symbole : λ), définie comme la charge par unité de longueur. Si une charge q est uniformément distribuée sur un fil de longueur ℓ, la densité linéique de charge λ s'exprime par

$$\lambda = \frac{q}{\ell} \qquad (2.7)$$

La densité linéique de charge s'exprime en coulombs par mètre (C/m). Un élément infinitésimal de fil de longueur dℓ aura une charge

Élément de charge en fonction de la densité linéique de charge

$$dq = \lambda \, d\ell \qquad (2.8)$$

Cette équation permet d'exprimer dq en fonction d'une des coordonnées du système d'axes. Par exemple, si le fil chargé est disposé selon l'axe des x, un petit élément de fil a une longueur $d\ell = dx$, donc $dq = \lambda \, dx$ (à la condition que $dx > 0$).

Si le fil est uniformément chargé, λ est une constante donnée par l'équation 2.7. Toutefois, on peut aussi utiliser la densité linéique de charge pour décrire un fil qui *n'est pas* chargé uniformément. La densité linéique est alors donnée en fonction d'un paramètre qui représente la position sur le fil. Par exemple, si le fil est situé le long de l'axe des x, on peut spécifier une fonction $\lambda(x)$. Il va sans dire que, dans une telle situation, l'équation 2.7 n'est plus valable.

Densité surfacique de charge

Pour décrire la distribution de charge sur un objet qui a la forme d'une plaque, on utilise plutôt la **densité surfacique de charge**, définie comme la charge par unité de surface. Si une charge q est uniformément distribuée sur une plaque de surface A, la densité surfacique de charge σ est

$$\sigma = \frac{q}{A} \qquad (2.9)$$

La densité surfacique de charge s'exprime en coulombs par mètre carré (C/m^2). Un élément infinitésimal de plaque de surface dA aura une charge

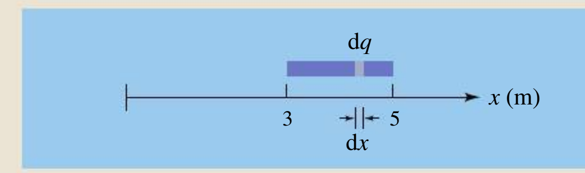
Élément de charge en fonction de la densité surfacique de charge

$$dq = \sigma \, dA \qquad (2.10)$$

Dans le cas d'une plaque uniformément chargée, σ est une constante. Lorsque la plaque n'est pas chargée uniformément, la densité surfacique varie selon les endroits sur la plaque. Dans une telle situation, l'équation 2.9 n'est plus valable.

Exemple 2.8

Un fil rectiligne de 2 m de long est situé sur l'axe des x, entre $x = 3$ m et $x = 5$ m (figure 2.31). Sa densité linéique de charge est donnée par la fonction $\lambda = 3 \times 10^{-6}\, x^2$, où x est en mètres et λ est en coulombs par mètre. Que vaut la charge totale du fil ?



▲ **Figure 2.31**

Un élément de fil de longueur dx porte une charge dq.

Solution

Par l'équation 2.8, la charge d'une portion infinitésimale de fil de longueur dx (situé entre les positions x et x + dx) correspond à $\mathrm{d}q = \lambda\, \mathrm{d}x = 3 \times 10^{-6}\, x^2\, \mathrm{d}x$. La charge totale est la somme (intégrale) de tous les éléments dq, qui s'exprime*

$$q = \int \mathrm{d}q = \int_{x_\mathrm{i}}^{x_\mathrm{f}} 3 \times 10^{-6}\, x^2\, \mathrm{d}x$$

L'intégrale doit se faire sur toute la longueur du fil chargé : la variable d'intégration x varie donc entre les valeurs extrêmes $x_\mathrm{i} = 3$ m et $x_\mathrm{f} = 5$ m, qui sont donc les bornes de l'intégrale. La constante 3×10^{-6} passe à gauche de l'intégrale et on trouve

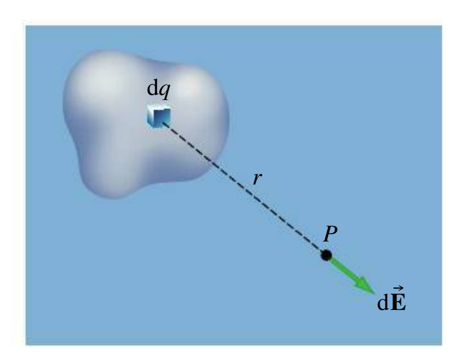
$$q = 3 \times 10^{-6} \int_3^5 x^2\, \mathrm{d}x = 3 \times 10^{-6} \left(\frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_3^5$$

$$= 3 \times 10^{-6} \left(\frac{125}{3} - \frac{27}{3} \right) = 98 \times 10^{-6} = 98\ \mu\mathrm{C}$$

Une erreur commune consiste à tracer l'élément dq à une position particulière sur le schéma, par exemple entre $x = 3$ et $x = 3$ + dx. La figure 2.31 illustre plutôt la démarche correcte : la position de l'élément dq, entre x et x + dx dans ce cas-ci, doit être une *variable*. Ce sont les bornes d'intégration qui spécifient les valeurs que peut prendre cette variable (dans ce cas-ci, *toutes* celles entre 3 m et 5 m). ■

Pour vérifier qu'on n'a pas fait d'erreur en intégrant, on peut estimer l'ordre de grandeur du résultat en faisant comme si le fil était uniformément chargé. Au milieu de la tige ($x = 4$ m), $\lambda = 3 \times 10^{-6}\, x^2 = 48\ \mu$C/m. Si le fil entier avait cette densité linéique de charge, sa charge totale serait $q = (48\ \mu\mathrm{C/m}^2)(2\ \mathrm{m}) = 96\ \mu$C. Cela ne correspond évidemment pas au résultat exact (pourquoi ?), mais montre que ce résultat, 98 μC, a l'ordre de grandeur attendu.

* Lorsqu'on insère des valeurs numériques dans une expression mathématique, on peut omettre d'écrire les unités lorsqu'il s'agit d'étapes de calcul intermédiaire, afin de ne pas surcharger le texte. Toutefois, il faut toujours indiquer les unités du résultat final de l'étape de calcul.



▲ **Figure 2.32**

Pour calculer le champ électrique produit par une distribution continue de charge, on doit d'abord déterminer la contribution d$\vec{\mathbf{E}}$ d'un élément de charge infinitésimal dq. Le champ total est l'intégrale de toutes les contributions.

Maintenant que nous savons décrire la distribution de charge d'un objet non ponctuel, nous allons voir comment évaluer le champ qu'elle produit. Nous nous contenterons ici de trois catégories de situations simples, soit une charge distribuée sur un fil rectiligne, sur un fil en forme d'arc de cercle ou sur une plaque.

On doit d'abord imaginer qu'on divise la charge du fil ou de la plaque en petits éléments infinitésimaux dq qui peuvent être considérés comme des charges ponctuelles (figure 2.32). Ensuite, on doit calculer le champ produit par un élément de charge. Par l'équation 2.2, le module du champ infinitésimal d$\vec{\mathbf{E}}$ produit par chaque dq est

$$\mathrm{d}E = \frac{k|\mathrm{d}q|}{r^2} \qquad (2.11)$$

Enfin, pour trouver le champ électrique total, il faut faire la somme (l'intégrale) de tous les éléments dE, *en tenant compte de la nature vectorielle du champ* :

$$\vec{\mathbf{E}} = \int \mathrm{d}\vec{\mathbf{E}} \qquad (2.12)$$

Cette intégrale équivaut au principe de superposition (équation 2.4). En pratique, son calcul consiste à décomposer d$\vec{\mathbf{E}}$ en dE_x, dE_y et dE_z, puis à intégrer selon chaque axe séparément :

$$E_x = \int \mathrm{d}E_x; \quad E_y = \int \mathrm{d}E_y; \quad E_z = \int \mathrm{d}E_z$$

La méthode de résolution qui suit résume la démarche que nous venons de présenter.

Méthode de résolution

Champ produit par une charge non ponctuelle

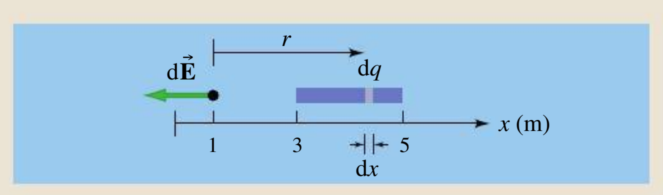
Voici les étapes recommandées pour calculer le champ électrique produit par une distribution de charge continue :

1. Tracer un schéma de la situation et dessiner un élément de charge dq *quelconque* :
   - Si la charge est distribuée sur un fil, écrire $dq = \lambda\, d\ell$.
   - Si la charge est distribuée sur une plaque, écrire $dq = \sigma\, dA$.

   Choisir un système d'axes qui permettra, si besoin est, d'exprimer dℓ en fonction d'une seule coordonnée ou d'exprimer dA simplement.
2. Illustrer le vecteur champ $d\vec{\mathbf{E}}$ produit par dq. Calculer son module dE. Par exemple, pour un dq ponctuel, écrire $dE = k|dq|/r^2$, puis exprimer dq et r en fonction de *variables*. (L'expression obtenue doit être valable où que soit placé l'élément de charge et non correspondre à un élément de charge en particulier.)
3. Calculer les composantes de $d\vec{\mathbf{E}}$. Même si $d\vec{\mathbf{E}}$ est parallèle à un axe x, il faut distinguer dE et dE_x, qui peuvent avoir un signe différent.
4. Afin de réduire le nombre d'intégrales à résoudre, utiliser la symétrie de la situation pour déduire si le champ selon un ou deux des trois axes est nul. Écrire l'intégrale selon chaque composante où le champ est non nul. Par exemple, $E_x = \int dE_x$.
5. Souvent, l'intégrale obtenue contient trois variables : dq, r et un angle utilisé pour calculer la composante de dE. Utiliser la géométrie de la situation pour exprimer toutes ces variables en fonction d'une même variable d'intégration (qui est souvent une des coordonnées du système d'axes ou encore une coordonnée angulaire). Ce faisant, il faut s'assurer que dℓ demeure positif, car il s'agit d'une longueur et non d'une composante vectorielle.
6. Déterminer les bornes d'intégration qui correspondent aux valeurs extrêmes de la variable d'intégration, puis intégrer afin d'obtenir chaque composante du champ résultant.

Exemple 2.9

Un fil rectiligne *uniformément chargé* de 2 m de long est situé sur l'axe des x, entre $x = 3$ m et $x = 5$ m. Sa charge totale est de 40 μC. Calculer le champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ au point $x = 1$ m.



▲ **Figure 2.33**
Un élément de fil de charge dq produit un champ $d\vec{\mathbf{E}}$ au point $x = 1$ m. (Ce champ n'est pas le champ total.)

Solution

Une portion infinitésimale de fil de longueur dℓ porte l'élément de charge $dq = \lambda\, d\ell$. Comme le fil est le long de l'axe des x, on peut dire que $d\ell = dx$, à la condition qu'on prévoit intégrer dans le sens des x croissants (sinon dx est négatif). Ce dq, de même que le champ $d\vec{\mathbf{E}}$ qu'il produit, sont illustrés à la figure 2.33. Puisque le fil est uniformément chargé, sa densité linéique de charge est égale à la charge totale du fil divisée par la longueur totale du fil (équation 2.7) :

$$\lambda = \frac{q}{\ell} = 40\ \mu\text{C}/2\ \text{m} = 20\ \mu\text{C/m} = 2 \times 10^{-5}\ \text{C/m}$$

Comme l'indique la figure 2.33, la position où est situé l'élément de charge dq est une *variable* : il est situé entre x et $x + dx$.

Le champ $d\vec{\mathbf{E}}$ produit au point $x = 1$ m par cet élément est dirigé vers l'axe des x négatifs puisque dq est une charge positive située à la droite de ce point. On peut donc écrire

$$dE = k\frac{dq}{r^2} = k\lambda\frac{dx}{r^2}$$

d'où

$$dE_x = -dE = -k\lambda\frac{dx}{r^2}$$

où r est la distance entre le point où on calcule le champ et la portion infinitésimale de fil dq (figure 2.33).

Ici, la contribution de champ $\mathrm{d}\vec{\mathbf{E}}$ n'a aucune composante selon y, donc le champ total non plus. Le champ total selon x est donné par l'intégrale

$$E_x = \int \mathrm{d}E_x = \int -k\lambda \frac{\mathrm{d}x}{r^2}$$

Comme il y a deux variables dans l'intégrale (x et r), il faut exprimer une variable en termes de l'autre. Puisque $x = 1$ m correspond à $r = 0$, on peut écrire

$$x = r + 1$$

Si on garde x comme variable, on remplace r par $x - 1$ dans l'intégrale. En fonction de la variable d'intégration x, les bornes sont 3 m et 5 m. Si on intègre de la borne la plus petite vers la plus grande, dx est positif et la condition voulant que dℓ soit positif est automatiquement respectée. ■

En faisant passer les constantes k et λ à gauche de l'intégrale, on trouve

$$\begin{aligned} E_x &= -k\lambda \int_3^5 (x-1)^{-2}\,\mathrm{d}x \\ &= -k\lambda[-(x-1)^{-1}]\big|_3^5 \\ &= -1{,}8 \times 10^5[(-4^{-1}) - (-2^{-1})] \\ &= -4{,}5 \times 10^4 \text{ N/C} \end{aligned}$$

On aurait pu choisir de garder r comme variable d'intégration. Comme $x = r + 1$, on a dx/dr = 1 donc dx = dr. On remplace donc dx par dr dans l'intégrale. Comme ils ont le même signe, dℓ est encore positif si on intègre de la borne la plus petite vers la plus grande. Toutefois, en termes de la nouvelle variable d'intégration r, *ces bornes sont maintenant 2 m et 4 m* (vérifiez-le sur la figure 2.33 : l'extrémité gauche du fil correspond à $r = 2$ m, et l'extrémité droite à $r = 4$ m). ■

On trouve alors

$$\begin{aligned} E_x &= -k\lambda \int_2^4 r^{-2}\,\mathrm{d}r = -k\lambda(-r^{-1})\big|_2^4 \\ &= -1{,}8 \times 10^5[(-4^{-1}) - (-2^{-1})] \\ &= -4{,}5 \times 10^4 \text{ N/C} \end{aligned}$$

Évidemment, la réponse demeure la même.

Pour vérifier qu'on n'a pas fait d'erreur en intégrant, on peut estimer l'ordre de grandeur du résultat en supposant que toute la charge de 40 μC est concentrée au centre du fil, en $x = 4$ m. Le champ en $x = 1$ m serait alors

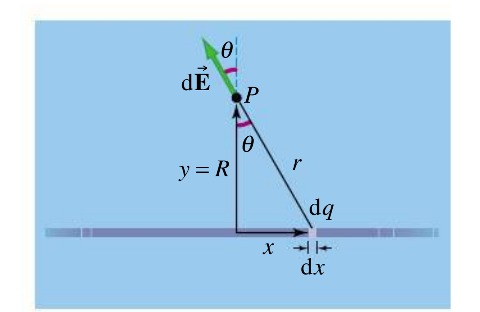
$$\begin{aligned} E_x &= -E = \frac{-k|q|}{r^2} = \frac{-(9 \times 10^9)(40 \times 10^{-6})}{3^2} \\ &= -4 \times 10^4 \text{ N/C} \end{aligned}$$

(Remarquez qu'on a pris $r = 3$ m, la distance entre le point $x = 1$ m et le centre du fil.) Cela concorde assez bien avec la réponse exacte trouvée par intégration.

Le champ électrique produit par un fil rectiligne infini uniformément chargé

Nous allons maintenant utiliser les étapes de la méthode de résolution précédente pour étudier un cas général très utile : le champ produit par un long fil rectiligne uniformément chargé. En des points situés à une distance R nettement inférieure à la longueur du fil, le champ est essentiellement le même que si le fil était infini.

Choisissons un système d'axes tel que le fil coïncide avec l'axe des x. Pour les besoins du calcul, nous choisissons un point P situé à une distance R au-dessus de l'origine de l'axe des x et nous calculerons le champ en ce point. Cependant, comme R peut prendre une valeur quelconque et que le fil a une longueur infinie, le résultat que nous obtiendrons (équation 2.13) permettra de calculer le champ en n'importe quel point de l'espace qui entoure le fil.



▲ **Figure 2.34**

Le champ produit par un élément de charge dq à une distance R d'un long fil rectiligne uniformément chargé.

Sur la figure 2.34, nous avons représenté le champ $\mathrm{d}\vec{\mathbf{E}}$ produit par la charge dq d'une portion infinitésimale dx du fil. (On suppose que le fil est chargé positivement : le champ produit par dq pointe donc dans le sens opposé à dq. Nous verrons ensuite que le cas d'une charge négative donne un champ dont le module est identique.)

Si on considère le champ produit par tous les dq simultanément, on se rend compte par symétrie que le champ total selon x au point P est nul (figure 2.35) : chaque composante dE_x produite par la charge dq à une position x donnée est annulée par la composante dE_x produite par la charge dq à la position $-x$. On n'a donc qu'à intégrer $E_y = \int \mathrm{d}E_y$.

Puisque le fil est uniformément chargé, λ est une constante et la charge d'une portion infinitésimale de fil de longueur $d\ell$ porte l'élément de charge $dq = \lambda\, d\ell$. Comme le fil est le long de l'axe des x, on peut dire que $d\ell = dx$, à la condition qu'on prévoie intégrer dans le sens des x croissants. La composante selon y du champ produit par cette portion de fil est

$$dE_y = dE \cos\theta = k\frac{dq}{r^2}\cos\theta = \frac{k\lambda\, dx \cos\theta}{r^2}$$

avec r et θ tels que définis à la figure 2.34. Le champ total en y est donné par

$$E_y = \int dE_y = \int \frac{k\lambda\, dx \cos\theta}{r^2} \qquad \text{(i)}$$

Nous passons à l'étape 5 de la méthode de résolution : il y a trois variables dans l'intégrale, soit x, r et θ, et il faut tout ramener en fonction d'une seule variable. Pour montrer que la variable choisie n'a pas d'importance, nous obtiendrons le résultat de deux façons différentes.

S'il y a un angle dans l'intégrale et qu'on n'a pas accès à une table d'intégrale, on obtient souvent une intégrale finale plus simple si on ramène tout en fonction de θ. Nous allons donc faire une première fois le calcul en exprimant x et r en fonction de θ.

On peut écrire $\cos\theta = R/r$, d'où

$$r = \frac{R}{\cos\theta} \qquad \text{(ii)}$$

On peut aussi écrire $\tan\theta = x/R$, d'où $x = R\tan\theta$, ainsi,

$$dx = d(R\tan\theta) = R\sec^2\theta\, d\theta = \frac{R}{\cos^2\theta}d\theta \qquad \text{(iii)}$$

Cette dernière équation permet de relier dx et $d\theta$ et montre qu'ils ne sont pas directement proportionnels. La figure 2.36 permet de visualiser la signification de cette transformation. Afin d'éviter de substituer une valeur négative pour $d\ell$, on doit s'assurer d'avoir choisi un angle θ qui augmente quand x augmente ; dx et $d\theta$ ont alors le même signe. C'est bien le cas ici.

En remplaçant les équations (ii) et (iii) dans l'intégrale, on trouve

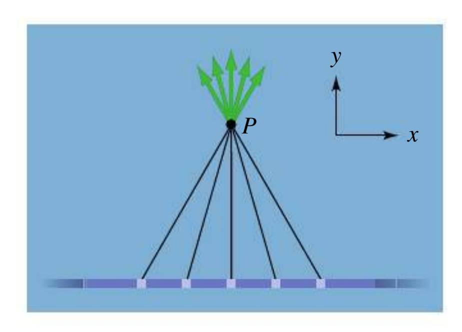
$$E_y = k\lambda \int \frac{(R/\cos^2\theta)\cos\theta}{(R/\cos\theta)^2}d\theta = k\lambda \int \frac{R\cos\theta\cos^2\theta}{R^2\cos^2\theta}d\theta = \frac{k\lambda}{R}\int \cos\theta\, d\theta$$

Notons que ces substitutions introduisent R dans l'intégrale, mais cela est sans conséquence, car il s'agit d'une constante (lorsqu'on déplace dx le long du fil, r, θ et x changent mais pas R). En fonction de notre variable d'intégration θ, les bornes pour le fil infini vont de $\theta_i = -\pi/2$ rad à $\theta_f = +\pi/2$ rad. (Vérifiez-le en examinant la figure 2.34.) On a donc

$$E_y = \frac{k\lambda}{R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta = \frac{k\lambda}{R}[\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{k\lambda}{R}[1-(-1)] = \frac{2k\lambda}{R}$$

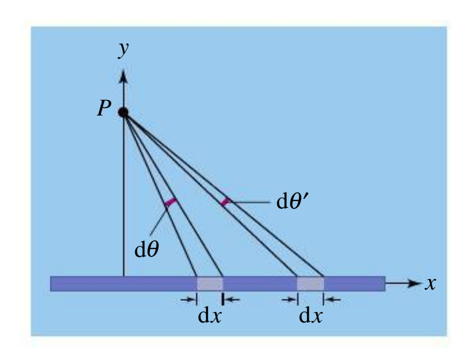
Le même résultat aurait pu être obtenu si on avait choisi x comme variable d'intégration, ce qui est plus facile à visualiser et élimine le risque de substituer une valeur négative pour $d\ell$. Dans ce cas, ce sont r et θ qu'il faut exprimer en fonction de x dans l'intégrale de l'équation (i). En substituant $\cos\theta = R/r$, on élimine premièrement θ de l'intégrale :

$$E_y = \int \frac{k\lambda\, dx\cos\theta}{r^2} = k\lambda R\int\frac{dx}{r^3}$$



▲ **Figure 2.35**

Le champ produit par l'ensemble des éléments dq s'annule en x. En termes mathématiques, le champ $d\vec{E}$ produit par un seul élément dq a une composante dE_x non nulle, mais le champ total en x, c'est-à-dire $E_x = \int dE_x$, est nul.



▲ **Figure 2.36**

Quand on considère différents éléments dx (de même longueur), l'angle $d\theta$ qui les intercepte n'est pas le même. Mathématiquement, dx n'est donc pas proportionnel à $d\theta$: ils sont reliés par la relation $dx = (R/\cos^2\theta)d\theta$.

Ensuite, le théorème de Pythagore permet d'écrire $r = (x^2 + R^2)^{1/2}$, d'où

$$E_y = k\lambda R \int \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Cette intégrale est plus difficile à résoudre (par substitution trigonométrique), mais elle peut facilement s'obtenir dans une table d'intégrales comme celle de l'annexe C. En fonction de la variable d'intégration x, les bornes pour le fil infini vont de $x_i = -\infty$ à $x_f = +\infty$, d'où

$$E_y = k\lambda R \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}} = k\lambda R \left[\frac{x}{R^2(x^2 + R^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{k\lambda}{R} \left[\frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

L'expression entre crochets dans le dernier membre de l'équation doit être évaluée avec x qui tend vers plus et moins l'infini. Cette évaluation est facilitée si on s'aperçoit que R^2 devient négligeable face à x^2 quand x devient très grand et que le dénominateur devient alors $(x^2)^{1/2} = |x|$. Donc on obtient

$$E_y = \frac{k\lambda}{R} \left[\frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{k\lambda}{R}[1 - (-1)] = \frac{2k\lambda}{R}$$

Ce résultat est évidemment identique à celui qu'on a obtenu en utilisant θ comme variable d'intégration. Chaque choix présente son avantage : l'intégration en fonction de θ donne une intégrale plus simple et des bornes d'intégration qui ne seront jamais infinies, alors que l'intégration en fonction de x permet d'éviter d'avoir à transformer dx en dθ, une étape dont l'aspect conceptuel est difficile à visualiser, et évite le risque de substituer une valeur négative pour dℓ.

L'équation $E_y = 2k\lambda/R$ que nous venons d'obtenir de deux façons équivalentes montre que la composante E_y du champ total (la seule composante qui soit non nulle) est positive, ce qui est valable quand le fil est chargé positivement. Si le fil avait été chargé négativement, seul le sens du vecteur d$\vec{\mathbf{E}}$ aurait été inversé à la figure 2.34, sa direction et son module demeurant les mêmes. L'intégrale aurait donc été identique à un signe près et le résultat serait

$$E_y = -\frac{2k|\lambda|}{R}$$

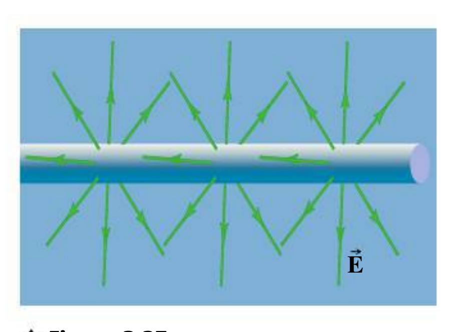
Ces deux résultats peuvent s'exprimer sous la forme d'une unique équation qui ne donne que le *module* du champ électrique en un point P situé à une distance R d'un fil « infini », soit

Module du champ produit par un fil rectiligne infini uniformément chargé

$$E = \frac{2k|\lambda|}{R} \qquad (2.13)$$

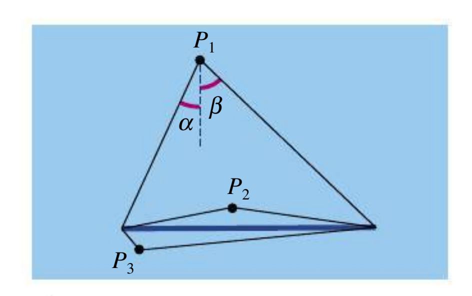
La valeur absolue permet d'éviter que le module du champ électrique soit négatif lorsque λ est négative.

Si le fil est chargé positivement (comme dans notre démonstration), le champ s'éloigne du fil. Si le fil est chargé négativement, le champ se dirige vers le fil. Globalement, les lignes de champ sont radiales dans toutes les directions. La figure 2.37 illustre les lignes de champ produites par un fil chargé positivement. On peut se représenter le tout en considérant une brosse à éprouvette d'un laboratoire de chimie : le fil de fer au milieu de la brosse représente le fil chargé et les soies qui sont partout perpendiculaires au fil représentent les lignes de champ. On remarque que le champ d'un fil infini est inversement proportionnel à la distance, tandis que le champ d'une charge ponctuelle est inversement proportionnel *au carré* de la distance. Cela est reflété par le fait que les lignes de champ s'éloignent les unes des autres quand le fil est vu de face (à son extrémité), mais demeurent parallèles quand il est vu de côté. La densité des lignes de champ décroît donc moins vite pour un fil que pour une charge ponctuelle.



▲ **Figure 2.37**
Les lignes de champ d'un fil infini uniformément chargé.

Dans la réalité, un fil infini n'existe pas. Ainsi, les bornes d'intégration dans la démonstration que nous venons de faire ne valent jamais exactement $-\pi/2$ et $+\pi/2$. Par exemple, pour le point P_1 à la figure 2.38, les bornes valent $-\alpha$ et β. Le point P_1 est trop éloigné du fil par rapport aux dimensions du fil pour que l'on puisse utiliser l'équation 2.13 pour calculer le champ. Toutefois, *si on est suffisamment proche du fil et assez loin des bords*, comme en P_2, les bornes valent presque $-\pi/2$ et $+\pi/2$, et l'équation 2.13 donne un résultat assez précis. Si on est trop près d'une des extrémités, comme au point P_3, une des bornes s'éloigne trop de $\pm\pi/2$, et on ne peut pas utiliser l'équation 2.13. On doit alors refaire le calcul au long et remplacer les bornes par leur valeur exacte. De plus, lorsqu'on n'est pas vis-à-vis du centre du fil, le champ ne s'annule plus en x. Il faut alors résoudre deux intégrales, une selon x et une selon y.

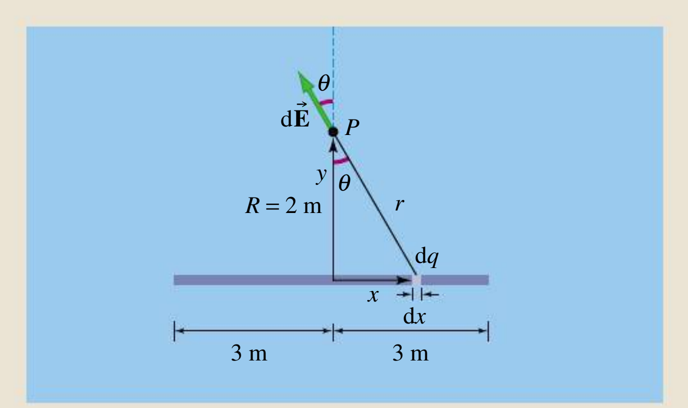


▲ Figure 2.38

L'approximation du fil infini est valable au point P_2, mais pas aux points P_1 et P_3.

Exemple 2.10

Un fil uniformément chargé a une longueur $L = 6$ m et une charge $Q = 360$ μC (figure 2.39). Calculer le module du champ en un point P situé vis-à-vis du centre du fil, à $R = 2$ m de distance.



▲ Figure 2.39

Calcul du champ électrique à 2 m du centre d'un fil de 6 m de longueur.

Solution

Dans cette situation, dE_x est non nul, mais E_x s'annule par symétrie. Selon y, on a

$$E_y = \int dE_y = \int dE\cos\theta = \int k\frac{dq}{r^2}\cos\theta = \int \frac{k\lambda\, dx\cos\theta}{r^2}$$

avec $\lambda = Q/L = (360\ \mu\text{C})/(6\ \text{m}) = 6 \times 10^{-5}$ C/m. Pour calculer l'intégrale, on ramène tout en fonction de θ, $r = R/\cos\theta$ et $x = R\tan\theta$, d'où $dx = (R/\cos^2\theta)d\theta$. Les bornes d'intégration sont $\theta_1 = -\arctan(3/2) = -0{,}983$ rad et $\theta_2 = +0{,}983$ rad, d'où

$$E_y \frac{k\lambda}{R}\int_{-0{,}983}^{0{,}983}\cos\theta\, d\theta = \frac{k\lambda}{R}\left[\sin\theta\right]_{-0{,}983}^{0{,}983} = 4{,}49 \times 10^5\ \text{N/C}$$

On aurait aussi pu calculer cette intégrale en ramenant tout en fonction de x. En utilisant successivement $\cos\theta = R/r$ et $r = (x^2 + R^2)^{1/2}$, l'intégrale devient

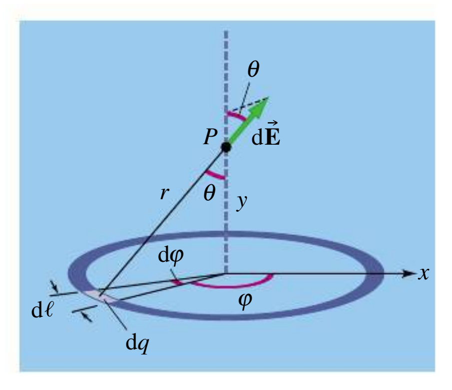
$$E_y = k\lambda R\int_{-3}^{+3}\frac{dx}{(x^2+R^2)^{3/2}} = \frac{k\lambda}{R}\left[\frac{x}{(x^2+R^2)^{1/2}}\right]_{-3}^{+3} = 4{,}49 \times 10^5\ \text{N/C}$$

Le résultat est évidemment identique, mais ce second choix de variable d'intégration a permis de trouver directement les bornes d'intégration. ■

Le champ électrique produit sur l'axe d'un anneau uniformément chargé

Dans ce qui précède, nous n'avons considéré que des fils chargés qui étaient *rectilignes*. Nous allons maintenant calculer le champ que produit un anneau uniformément chargé de rayon b, en nous limitant aux points situés sur l'axe de l'anneau. Aux fins de la démonstration, nous considérerons que λ est positive, mais un anneau négatif produirait un champ de même module.

Choisissons le système d'axes de telle sorte que l'anneau, centré sur l'origine, est parallèle au plan xz et que son axe coïncide avec l'axe des y. Aux fins du calcul, on considère un point P de cet axe, qui est donc situé à la distance y du



▲ **Figure 2.40**

Pour repérer un élément dq situé sur un arc de cercle, il vaut mieux utiliser l'angle φ comme coordonnée. Ici l'anneau de rayon b est parallèle au plan xz, et l'axe des y, vertical, passe par son centre.

plan de l'anneau. La figure 2.40 montre le champ $\mathrm{d}\vec{\mathbf{E}}$ produit en ce point par la charge dq que porte un élément de fil de longueur dℓ. Si on considère le champ total causé par tous les dq simultanément, on se rend compte par symétrie que les composantes horizontales (selon x et z) du champ total au point P sont nulles. Il suffit donc d'intégrer selon y.

Dans les cas de fils rectilignes, on pouvait choisir un axe (par exemple celui des x) parallèle au fil et écrire $\mathrm{d}\ell = \mathrm{d}x$. Dans ce cas-ci, le fil suit un arc de cercle, alors il est plus avantageux d'utiliser l'angle φ, mesuré dans le plan de l'anneau, comme coordonnée. L'angle infinitésimal dφ intercepte donc l'élément de fil de longueur dℓ. Si φ est mesuré en radians, on peut écrire $\mathrm{d}\ell = b\,\mathrm{d}\varphi$, où b est le rayon de l'anneau. Puisque λ est une constante, la charge de cet élément de fil est $\mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}\ell = \lambda b\,\mathrm{d}\varphi$ et la composante selon y du champ $\mathrm{d}\vec{\mathbf{E}}$ que celle-ci produit est

$$\mathrm{d}E_y = \mathrm{d}E\cos\theta = k\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\cos\theta = \frac{k\lambda b\,\mathrm{d}\varphi}{r^2}\cos\theta$$

avec φ, r et θ tels que définis à la figure 2.40. Le champ total selon y est donné par

$$E_y = \int \mathrm{d}E_y = \int \frac{k\lambda b\,\mathrm{d}\varphi\cos\theta}{r^2}$$

Contrairement au cas d'un fil rectiligne, r et θ ne sont pas des variables mais bien des constantes : quand on déplace dℓ le long de l'anneau, seul φ change, alors que r et θ demeurent les mêmes. Comme l'anneau est complet, en fonction de notre variable d'intégration φ, les bornes sont $\varphi_i = 0$ et $\varphi_f = 2\pi$. On a donc

$$E_y = \int \frac{k\lambda b\,\mathrm{d}\varphi\cos\theta}{r^2} = \frac{k\lambda b\cos\theta}{r^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{k\lambda(2\pi b)\cos\theta}{r^2}$$

Comme E_y est la seule composante non nulle, sa valeur absolue correspond au module du champ. Ce module serait le même pour un anneau chargé négativement, sauf que le champ pointerait en direction de l'anneau. Si on s'aperçoit que $2\pi b$ est la circonférence de l'anneau, alors $\lambda(2\pi b)$ correspond à la charge totale q que porte l'anneau. On peut donc exprimer le module du champ sous la forme

Module du champ produit sur son axe par un anneau uniformément chargé

$$E = \frac{k|q|\cos\theta}{r^2} \qquad (2.14a)$$

Quelle que soit la position du point P sur l'axe des y, le champ donné par l'équation précédente est nécessairement parallèle à cet axe. Si l'anneau est chargé négativement, le champ pointe vers l'anneau, alors qu'il pointe en sens inverse si l'anneau est chargé positivement.

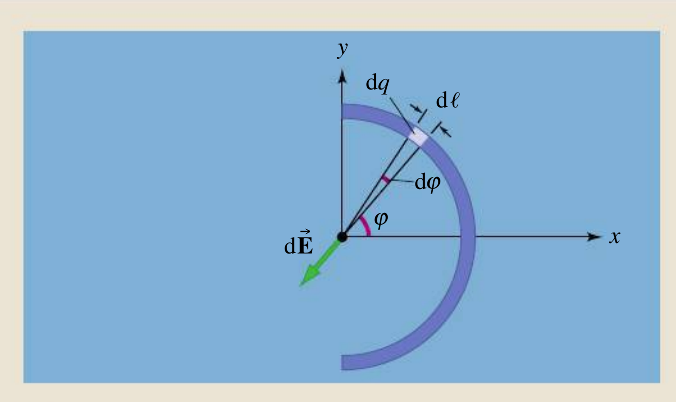
Les constantes r et θ peuvent aussi s'exprimer en fonction du rayon b de l'anneau et de la distance y à laquelle est situé le point P le long de l'axe des y. Comme $\cos\theta = b/r$ et que $r = (b^2 + y^2)^{1/2}$, notre résultat peut donc aussi s'exprimer

$$E = \frac{k|q|b}{(b^2 + y^2)^{3/2}} \qquad (2.14b)$$

La méthode que nous venons d'exposer permet aussi de traiter le cas de champs produits par des fils en forme d'arcs de cercle. Comme tout fil non rectiligne peut être considéré comme une succession de petits arcs de cercle de longueurs et de rayons différents, ce cas est d'importance. L'exemple suivant l'illustrera.

Exemple 2.11

Un fil uniformément chargé en forme de demi-cercle de rayon $b = 2$ m porte une charge totale $q = 31{,}4$ µC (figure 2.41). Calculer le module du champ produit au centre de courbure du demi-cercle.



▲ **Figure 2.41**

Calcul du champ électrique produit au centre de courbure d'un fil chargé en forme de demi-cercle de 2 m de rayon.

Solution

Choisissons un système d'axes tel que le centre de courbure du demi-cercle est situé à l'origine et tel que l'axe des x correspond à l'axe de symétrie du demi-cercle. De cette façon, $\mathrm{d}E_z$ est nul et E_y s'annule par symétrie. Selon x, on a $\mathrm{d}E_x = -\mathrm{d}E \cos\varphi$.

La longueur de l'élément de fil illustré à la figure 2.41 étant $\mathrm{d}\ell = b\,\mathrm{d}\varphi$, le champ total selon x est donné par

$$E_x = \int \mathrm{d}E_x = -\int k\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\cos\varphi = -\int k\frac{\lambda b\,\mathrm{d}\varphi}{r^2}\cos\varphi$$

avec $\lambda = Q/L = (31{,}4\ \mu\mathrm{C})/\pi(2\ \mathrm{m}) = 5{,}00\ \mu\mathrm{C/m}$. Comme $r = b$ est une constante, il n'y a pas de transformation de variables à faire. En fonction de la variable d'intégration φ, les bornes sont $\varphi_\mathrm{i} = -\pi/2$ et $\varphi_\mathrm{f} = +\pi/2$, d'où

$$E_x = -\frac{k\lambda}{b}\int_{-\pi/2}^{+\pi/2}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -\frac{k\lambda}{b}[\sin\varphi]_{-\pi/2}^{+\pi/2}$$
$$= -\frac{k\lambda}{b}[1-(-1)] = -\frac{2k\lambda}{b}$$

Comme les autres composantes sont nulles, le module est $E = |E_x| = 2k\lambda/b = 4{,}5 \times 10^4$ N/C.

Le champ électrique produit sur l'axe d'un disque uniformément chargé

Nous allons maintenant calculer le champ que produit un disque chargé de rayon a, en nous limitant aux points situés sur l'axe du disque. Aux fins de la démonstration, nous considérerons que la densité surfacique de charge σ est positive, mais un disque négatif produirait un champ de même module.

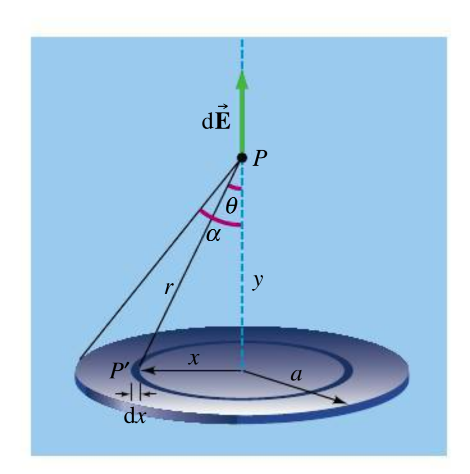
Si on décomposait la charge du disque en éléments ponctuels, il faudrait intégrer deux fois (selon deux coordonnées) puisque la charge est répartie sur une surface (donc selon deux dimensions). Toutefois, on peut éviter cela en exploitant les calculs que nous avons déjà faits et en additionnant la contribution d'éléments qui ne sont *pas* ponctuels. C'est pourquoi nous allons choisir un anneau de rayon x et de largeur $\mathrm{d}x$ comme élément infinitésimal de charge $\mathrm{d}q$ (figure 2.42). En intégrant le champ produit par les anneaux concentriques, du centre jusqu'au bord du disque, on trouvera le champ produit par le disque. La circonférence de l'anneau est $2\pi x$, et sa largeur est $\mathrm{d}x$. Sa surface équivaut* donc à

$$\mathrm{d}A = 2\pi x\,\mathrm{d}x$$

et sa charge s'écrit

$$\mathrm{d}q = \sigma\,\mathrm{d}A = \sigma 2\pi x\,\mathrm{d}x$$

Nous savons déjà que le champ produit par un anneau est parallèle à l'axe des y. De plus, son module est donné par l'équation 2.14*a*. (La seule différence est que l'anneau a ici un rayon $b = x$ et que sa charge de même que le champ



▲ **Figure 2.42**

Pour calculer le champ électrique sur l'axe d'un disque uniformément chargé, on peut décomposer le disque en anneaux de rayon x et d'épaisseur $\mathrm{d}x$.

* Il ne serait pas contradictoire de définir la surface d'un anneau comme celle d'un disque de rayon $x + \mathrm{d}x$ moins celle d'un disque de rayon x, soit $\mathrm{d}A = \pi(x + \mathrm{d}x)^2 - \pi x^2$. En développant le carré et en simplifiant, vérifiez qu'on obtient alors $\mathrm{d}A = 2\pi x\,\mathrm{d}x + \pi(\mathrm{d}x)^2$. Or, $\mathrm{d}x$ étant une quantité infinitésimale, $(\mathrm{d}x)^2$ est une quantité négligeable qui ne changerait aucunement le résultat de notre calcul. En la supprimant, on obtient le même résultat que ci-dessus. Aux fins d'une intégration, on peut toujours calculer la surface d'une bande de largeur infinitésimale, même si elle n'est pas rectiligne, en multipliant sa longueur et sa largeur.

qu'elle produit sont infinitésimaux.) Donc, la composante verticale dE_y de son champ est

$$dE_y = dE = \frac{k\, dq \cos\theta}{r^2}$$

d'où

$$E_y = \int dE_y = \int k\sigma 2\pi x\, dx \frac{\cos\theta}{r^2} = 2\pi k\sigma \int x\, dx \frac{\cos\theta}{r^2}$$

On ramène tous les termes dans l'intégrale en fonction de θ en utilisant la constante y. On a $\cos\theta = y/r$, d'où

$$r = \frac{y}{\cos\theta}$$

On peut aussi écrire $\tan\theta = x/y$, d'où

$$x = y \tan\theta$$

et

$$dx = d(y\tan\theta) = y \sec^2\theta\, d\theta = \frac{y}{\cos^2\theta}\, d\theta$$

Ainsi,

$$E_y = 2\pi k\sigma \int y \tan\theta \frac{y}{\cos^2\theta} d\theta \cos\theta \left(\frac{\cos\theta}{y}\right)^2 = 2\pi k\sigma \int \sin\theta\, d\theta$$

Le champ électrique produit par le disque est la somme des contributions de tous les anneaux, du centre jusqu'au bord. Ainsi, les bornes d'intégration correspondent à $\theta_i = 0$ et à $\theta_f = \alpha$ (voir la figure 2.42). On trouve ainsi $E_y = 2\pi k\sigma[-\cos\theta]_0^\alpha$. Comme $E = E_y$, on obtient

Module du champ produit sur son axe par un disque uniformément chargé

$$E = 2\pi k|\sigma|(1 - \cos\alpha) \tag{2.15}$$

Dans cette équation, la valeur absolue tient compte du fait qu'un disque chargé négativement produirait un champ de même module mais dirigé vers le disque. Le champ donné par l'équation 2.15 est parallèle à l'axe du disque et il s'éloigne du disque si σ est positif, et il se dirige vers le disque si σ est négatif.

On peut exprimer l'équation 2.15 en fonction du rayon a du disque et de la distance y en utilisant l'égalité $\cos\alpha = y/\sqrt{a^2 + y^2}$ (figure 2.42). On trouve ainsi

$$E = 2\pi k|\sigma|\left(1 - \frac{y}{\sqrt{a^2 + y^2}}\right) \tag{2.16}$$

Si on est très loin du disque par rapport à son rayon ($y \gg a$ ou $\alpha \approx 0$), il nous apparaît comme une charge ponctuelle : on devrait donc trouver à nouveau l'équation 2.2 pour le champ électrique d'une charge ponctuelle. Pour le vérifier, nous allons poser $y \gg a$ dans l'équation 2.16.

On utilise l'approximation du binôme $(1 + z)^n \approx 1 + nz$, valable lorsque z est suffisamment petit (annexe B). Le deuxième terme à l'intérieur du crochet peut s'écrire $y(a^2 + y^2)^{-1/2} = (1 + a^2/y^2)^{-1/2}$. Pour $y \gg a$, l'approximation donne

$$\left(1 + \frac{a^2}{y^2}\right)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{y^2}\right)$$

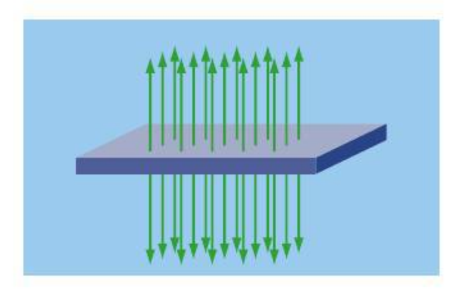
En substituant ce développement dans l'équation 2.16 et en utilisant $Q = \sigma\pi a^2$, on trouve $E \approx kQ/y^2$, qui est effectivement le champ produit par une charge ponctuelle.

Le champ électrique produit par une plaque infinie uniformément chargée

Considérons l'expression du champ électrique du disque chargé donnée par l'équation 2.15. Si on est très près du disque par rapport à son rayon, on a $\alpha \approx \pi/2$ rad et $\cos \alpha \approx 0$, d'où

$$E = 2\pi k|\sigma| \qquad (2.17)$$

Cette équation est l'équivalent pour une plaque de l'équation 2.13 pour un fil: elle s'applique à une plaque infinie. En pratique, *elle est valable lorsqu'on est très près d'une plaque uniformément chargée par rapport à ses dimensions, tout en étant assez loin des bords*. Évidemment, dans l'approximation de la plaque infinie, la forme de la plaque importe peu; on peut utiliser l'équation 2.17 même si la plaque n'est pas un disque circulaire.



▲ **Figure 2.43**

Les lignes de champ d'une plaque infinie uniformément chargée.

L'équation 2.17 s'écrit le plus souvent en fonction de la constante $\varepsilon_0 = 1/(4\pi k)$ que nous avons définie à la section 1.5. On a alors

Module du champ produit par une plaque infinie uniformément chargée

$$E = \frac{|\sigma|}{2\varepsilon_0} \qquad (2.18)$$

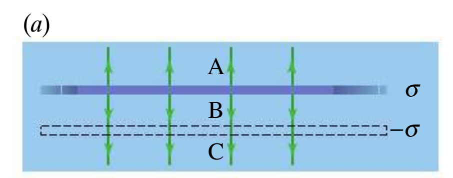
On remarque que, dans l'approximation de la plaque infinie, le champ est *indépendant de la distance à la plaque*. Ainsi, tant qu'on est assez près d'une plaque uniformément chargée pour ne pas «sentir ses bords», le champ est constant et orienté perpendiculairement à la plaque. Il s'agit d'un *champ uniforme*. Il s'agit là de l'analogue en électricité du champ gravitationnel terrestre près de la surface de la Terre; tant qu'on est assez proche de la Terre pour ne pas «sentir» qu'elle est en fait une sphère de dimension finie, on peut considérer que le champ gravitationnel est uniforme et perpendiculaire à un plan horizontal.

Les lignes de champ électrique d'une plaque infinie uniformément chargée sont partout perpendiculaires à la plaque. Leur espacement est donc indépendant de la distance à la plaque, ce qui correspond effectivement à un champ uniforme. On peut visualiser le tout en considérant une planche cloutée pour fakirs: la planche représente la plaque chargée, et les clous représentent les lignes de champ. Remarquons finalement que le champ, par symétrie, a le même module de chaque côté de la plaque. La figure 2.43 représente les lignes de champ d'une plaque chargée positivement.

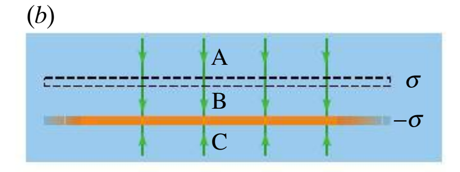
Le champ d'un condensateur plan

Le principe de superposition (équation 2.4) s'applique à toutes les distributions de charges, et notamment aux plaques infinies. Une configuration que l'on utilise souvent pour produire un champ uniforme est constituée de deux plaques parallèles de densités de charge de même grandeur et de signes opposés (figure 2.44). À la section 5.1, nous verrons qu'un tel dispositif peut être appelé un *condensateur plan*. Nous avons déjà rencontré des situations où il est utile (voir la section 2.4). Dans ce dispositif, si la plaque positive était seule, le champ serait de $\sigma/2\varepsilon_0$ vers le haut dans la zone A et de $\sigma/2\varepsilon_0$ vers le bas dans les zones B et C, comme on peut le voir dans la figure 2.44*a*. Si la plaque négative était seule, le champ serait de $\sigma/2\varepsilon_0$ vers le bas dans les zones A et B et de $\sigma/2\varepsilon_0$ vers le haut dans la zone C, comme dans la figure 2.44*b*. Globalement, les champs s'annulent donc dans les zones A et C et se renforcent dans la zone B. On trouve $E_A = E_C = 0$ et $E_B = \sigma/2\varepsilon_0 + \sigma/2\varepsilon_0 = \sigma/\varepsilon_0$ vers le bas entre les deux plaques. (On a dessiné les lignes de champ en conséquence sur la figure 2.44*c*.)

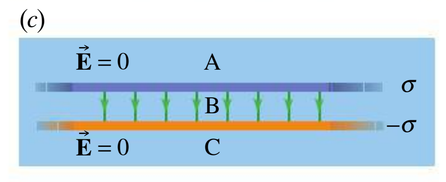
(*a*)



(*b*)



(*c*)



▲ **Figure 2.44**

Deux plaques parallèles de densités de charge uniformes $\sigma > 0$ et $-\sigma$. (*a*) Les lignes de champ produites par la plaque du haut (positive), sans tenir compte de la plaque du bas. (*b*) Les lignes de champ produites par la plaque du bas (négative), sans tenir compte de la plaque du haut. (*c*) Selon le principe de superposition, le champ électrique résultant produit par les deux plaques s'obtient par l'addition vectorielle des contributions de chacune des plaques considérée séparément.

Ainsi, le module du champ entre deux plaques de densités surfaciques de charge σ et $-\sigma$ est

Module du champ produit par un condensateur plan

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{2.19}$$

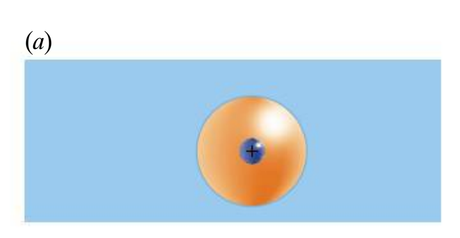
et ce champ est orienté *de la plaque positive vers la plaque négative*. Le champ à l'extérieur des plaques est nul.

En biochimie, une application importante utilisant un champ électrique uniforme est l'*électrophorèse*: pour déterminer la masse molaire d'une protéine inconnue, on la dénature avec des détergents (c'est-à-dire qu'on désorganise sa structure tridimensionnelle) et on l'insère dans un gel poreux ou dans un tube capillaire qu'on plonge dans un champ électrique uniforme. L'agglomération des molécules de détergent autour de la protéine confère à celle-ci une charge négative homogène. Sous l'effet de la force électrique exercée par le champ, la protéine avance lentement dans le gel poreux ou le capillaire, à une vitesse qui dépend seulement de sa masse molaire. En comparant sa distance de migration avec celles de protéines de masse connues, on peut caractériser l'inconnue. Avec des variations minimales, la technique peut aussi s'appliquer pour identifier des fragments d'ADN, des sucres, etc.

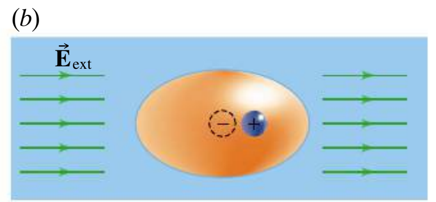
2.6 LES DIPÔLES

Un **dipôle électrique** est constitué de deux charges de même grandeur et de signes opposés séparées par une certaine distance. Même s'ils sont électriquement neutres, les dipôles peuvent produire un champ électrique et subir une force électrique; ils peuvent aussi subir un moment de force (voir la section 11.5 du tome 1). Nous allons d'abord faire un survol de phénomènes et d'applications impliquant des dipôles et ensuite calculer le champ produit par un dipôle source ainsi que la force et le moment de force subis par un dipôle cible.

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 2.45**

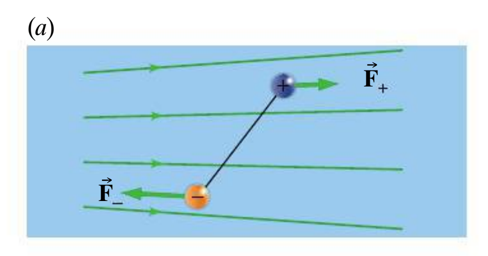
(*a*) Dans un atome isolé, le noyau positif se trouve au centre de la distribution de charges négatives constituée par les électrons. (*b*) Sous l'action d'un champ externe, l'atome se polarise et un dipôle induit apparaît. Ce dipôle disparaît dès qu'on supprime le champ externe.

Toute molécule dans laquelle les centres des charges positives et négatives ne coïncident pas peut, en première approximation, être considérée comme un dipôle. Il peut s'agir d'un dipôle temporaire ou permanent.

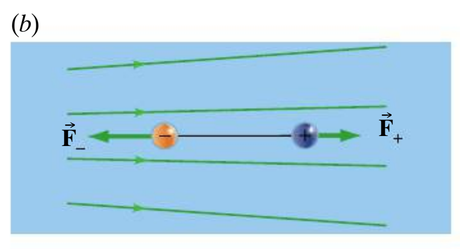
Des dipôles *temporaires* sont formés lorsqu'un atome se trouve dans un champ électrique extérieur. Ce champ déplace les charges positives et négatives de l'atome en des sens opposés, ce qui *induit* un dipôle (figure 2.45). Ce phénomène entraîne la *polarisation* des matériaux isolants, qui sera l'objet de la section suivante. Dès qu'on supprime le champ extérieur, les dipôles induits qu'il avait engendrés disparaissent.

Certaines molécules (comme HCl, CO et H_2O) conservent même en l'absence de champ extérieur un dipôle *permanent* et sont appelées molécules *polaires*. De même, la plupart des molécules organiques portent des *groupements polaires* (comme $-NH_2$, $-OH$, $>C{=}O$). Comme le montre la figure 2.46, de petites molécules polaires placées dans un champ électrique extérieur pivotent de façon à toutes s'aligner sur les lignes de champ; nous calculerons plus loin

(*a*)



(*b*)

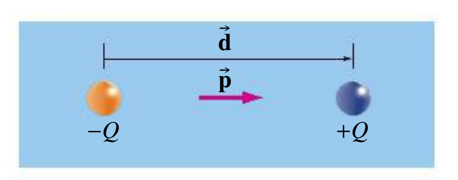


▶ **Figure 2.46**

(*a*) En général, les forces électriques sur les charges du dipôle ne sont pas alignées, de sorte qu'il pivote. (*b*) Le dipôle cesse de pivoter lorsqu'il est aligné sur le champ extérieur.

le moment de force qui cause cette rotation. Cet alignement est de même nature que celui des semences aux figures 2.9 et 2.10 (p. 42).

On peut décrire un dipôle (induit ou permanent) grâce à son **moment dipolaire électrique $\vec{\mathbf{p}}$**, un vecteur orienté de la charge négative $-Q$ vers la charge positive Q et dont le module est égal au produit de la grandeur de l'une des charges par la distance d qui les sépare (figure 2.47) :



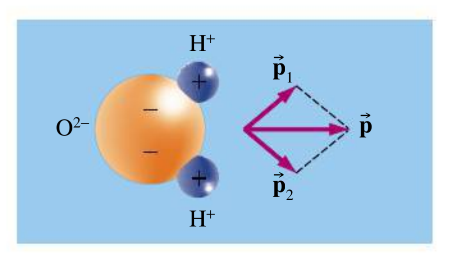
▲ **Figure 2.47**

Par définition, le moment dipolaire est $\vec{\mathbf{p}} = Q\vec{\mathbf{d}}$.

Moment dipolaire électrique

$$\vec{\mathbf{p}} = Q\vec{\mathbf{d}} \tag{2.20}$$

L'unité SI de moment dipolaire électrique est le coulomb-mètre (C·m). Lorsqu'il y a trois charges, comme c'est le cas dans la molécule d'eau (figure 2.48) ou dans un groupement comme $-NH_2$, le moment résultant est la somme vectorielle des deux moments dipolaires.



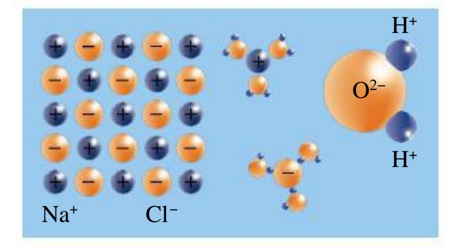
▲ **Figure 2.48**

Lorsque plusieurs dipôles sont présents, le moment dipolaire total est la somme vectorielle des moments dipolaires individuels.

Le module p du moment dipolaire indique comment un dipôle interagit : un peu comme une charge q produit un champ proportionnel à q si on la considère comme une source et subit une force proportionnelle à q si on la considère comme une cible, nous allons voir qu'un dipôle produit un champ proportionnel à p si on le considère comme une source et subit une force et un moment de force proportionnels à p si on le considère comme une cible.

La cuisson au four à micro-ondes fonctionne grâce au moment de force que subissent les dipôles permanents soumis à un champ électrique oscillant qui change de sens à haute fréquence ($2{,}45 \times 10^9$ Hz) ; en vibrant sous l'effet du champ, les dipôles produisent de l'énergie thermique dans le milieu où ils se trouvent. Les matériaux qui n'ont pas de dipôles permanents, comme le papier et le verre, ne peuvent donc pas devenir chauds dans un four à micro-ondes.

Un dipôle peut aussi subir le champ produit par un ion ou un dipôle voisin. La molécule d'eau a un moment dipolaire élevé ($6{,}2 \times 10^{-30}$ C·m) qui en constitue une propriété importante. Par exemple, lorsqu'on met des cristaux de sel (NaCl) dans l'eau, l'attraction entre les charges de la molécule d'eau (polaire) et les ions Na^+ et Cl^- est suffisante pour rompre les liaisons ioniques entre ces ions. Cela permet d'expliquer que le sel se dissout facilement dans l'eau (figure 2.49). Selon cette explication, la solubilité d'une substance dans l'eau dépend de la nature polaire ou non polaire de ses molécules. Si la substance est faite de molécules polaires, ses dipôles vont se combiner avec les dipôles de l'eau pour donner des configurations simples. À l'inverse, si elles sont constituées de molécules non polaires, comme les huiles, elles ne se mélangeront pas bien à l'eau.



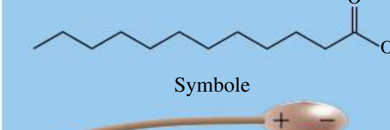
▲ **Figure 2.49**

Lorsqu'un cristal de sel se dissout, les ions Na^+ et Cl^- se fixent sur des molécules d'eau.

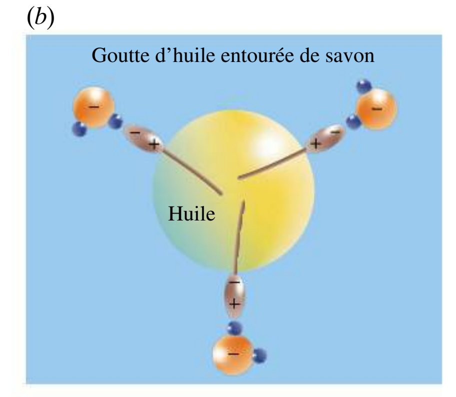
Ces propriétés ont une importance capitale du point de vue biomédical. Toutes les molécules destinées à agir comme médicament doivent pouvoir être acheminées jusqu'aux cellules sur lesquelles elles agissent, ce qui est nettement plus efficace si elles sont polaires ou si on leur ajoute un groupement polaire : elles sont alors solubles dans le sang, majoritairement composé d'eau. De même, pour permettre l'élimination de déchets organiques non polaires, notre corps a souvent recours à un enzyme qui fixe un groupement polaire à ces molécules. Dans le sujet connexe de la section 1.5, nous avons vu comment les collisions aléatoires avec les molécules d'eau ont tendance à regrouper entre elles des molécules ou parties de molécules non polaires, ce qui est l'un des mécanismes principaux permettant aux protéines d'adopter la forme tridimensionnelle qui leur permet de jouer leur rôle. ●

(*a*)

Molécule de savon



(*b*)



▲ **Figure 2.50**

(*a*) Une molécule de savon a une extrémité polaire et une extrémité non polaire. Sa formule chimique est présentée de deux façons équivalentes, la deuxième faisant abstraction des atomes de carbone et d'hydrogène. (*b*) L'extrémité non polaire se combine avec une goutte d'huile, alors que l'extrémité polaire se combine avec l'eau.

Les molécules amphiphiles

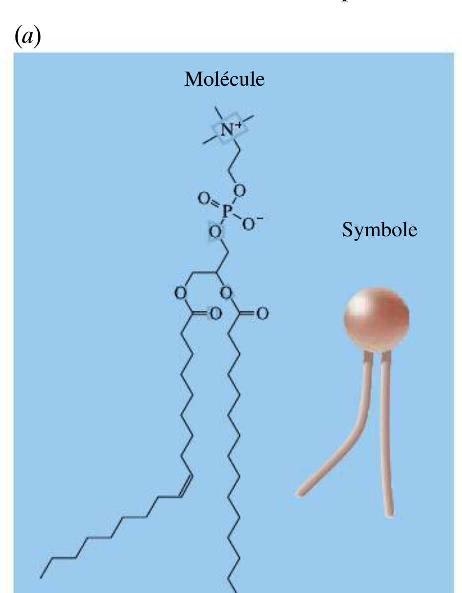
Certaines molécules, appelées *amphiphiles*, ont à la fois une partie polaire et une partie non polaire. Les plus simples sont les savons : une molécule de savon est une longue chaîne d'hydrocarbure (non polaire), à l'extrémité de laquelle se trouve un groupement polaire (figure 2.50*a*). L'extrémité non polaire se mélange facilement avec les acides gras (non polaires), alors que l'extrémité polaire est attirée par l'eau. L'eau savonneuse que l'on jette entraîne donc avec elle les huiles et les graisses (figure 2.50*b*). Comparez les deux façons, *développée* et *abrégée*, dont la même molécule est représentée à la figure 2.50*a*.

Les détergents sont des amphiphiles synthétiques qui diffèrent des savons simplement par le fait que leur extrémité polaire est plus volumineuse ou que la charge électrique y est mieux répartie, ce qui accroît leur solubilité. Alors que l'extrémité polaire des savons tend à attirer les ions positifs et à former des sels, les détergents demeurent en solution et maintiennent leur pouvoir nettoyant. En laboratoire biochimique, on utilise des détergents qui s'insèrent dans des macromolécules comme l'ADN ou les protéines, ce qui en dénature (désorganise) la structure. Cette dénaturation donne accès aux parties internes de la macromolécule.

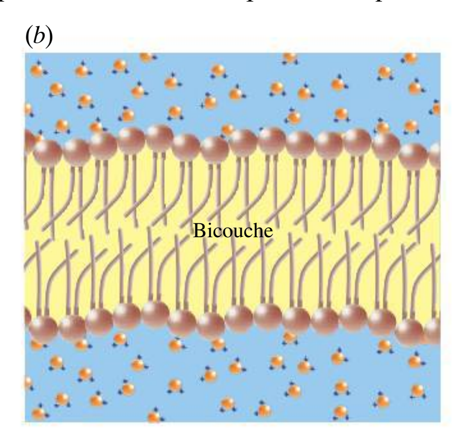
Les membranes cellulaires sont surtout composées de molécules amphiphiles appelées *phospholipides* qui possèdent une « tête » polaire très imposante et deux « queues » non polaires. La figure 2.51*a* présente une telle molécule en utilisant la formule chimique abrégée que nous utiliserons dans le reste de ce manuel. Quand on ajoute de telles molécules dans de l'eau tout en agitant, elles s'agglomèrent spontanément de façon telle que leurs têtes polaires sont en contact avec l'eau et que leurs queues non polaires sont compactées les unes contre les autres et isolées de l'eau. Ce procédé est très similaire à celui par lequel le savon forme des bulles. L'une des configurations optimales qui apparaît spontanément est celle de la *bicouche*, le canevas de base d'une membrane cellulaire (figure 2.51*b*).

L'avantage biologique de telles membranes est leur capacité à laisser passer les petites molécules non polaires tout en bloquant les molécules polaires. En effet, celles-ci demeurent attirées par l'eau de part et d'autre, alors que les composés

(*a*)



(*b*)



▶ **Figure 2.51**

(*a*) Un phospholipide possède une tête polaire volumineuse et deux queues non polaires. La formule chimique est présentée sous forme abrégée, chaque angle et chaque extrémité représentant un atome de carbone. (*b*) La *bicouche*, une configuration qui apparaît spontanément quand on agite un mélange d'eau et de phospholipides, est le canevas de base d'une membrane cellulaire.

non polaires peuvent se mélanger avec le cœur non polaire de la bicouche et diffuser lentement au travers. Une membrane biologique réelle comporte aussi des protéines insérées dans la bicouche, dont certaines ont pour fonction de faire traverser des composés polaires bien précis.

Exemple 2.12



Si N atomes identiques sont liés à un atome central différent, comment doivent-ils se placer pour que la molécule soit non polaire si : (a) $N = 2$; (b) $N = 3$; (c) $N = 4$?

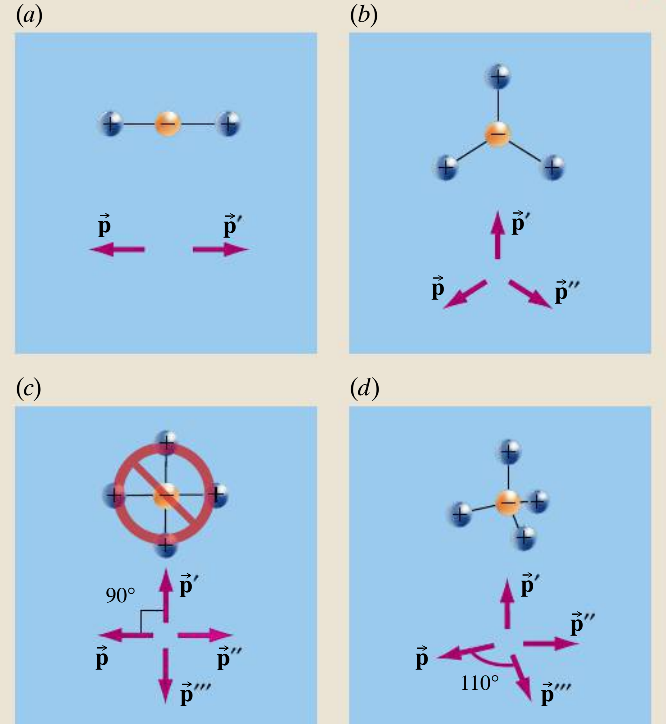
Solution

(a) Ils doivent se placer sur une même droite, de part et d'autre de l'atome central, comme à la figure 2.52*a* (c'est le cas de la molécule de CO_2, un déchet qui quitte en traversant les membranes cellulaires sans moyen spécial).

(b) Ils doivent se placer dans un même plan et former un angle de 120° entre eux (figure 2.52*b*).

(c) Si les cinq atomes restaient dans un même plan, ils pourraient former une croix (figure 2.52*c*), mais les atomes ne seraient pas à une distance maximale les uns des autres, alors que leurs électrons font en sorte qu'ils se repoussent. La configuration observée est tridimensionnelle : c'est un tétraèdre (figure 2.52*d*).

Apprendre à effectuer l'addition vectorielle requise pour comparer la polarité de molécules est une aptitude importante en sciences de la vie. Par exemple, la spectroscopie infrarouge, une méthode utilisée dans les domaines biomédicaux, ne permet que la détection des groupements dont les vibrations modifient le moment dipolaire électrique. ■



▲ **Figure 2.52**
Dans chacun de ces cas, les dipôles se positionnent de façon à annuler le moment dipolaire électrique résultant.

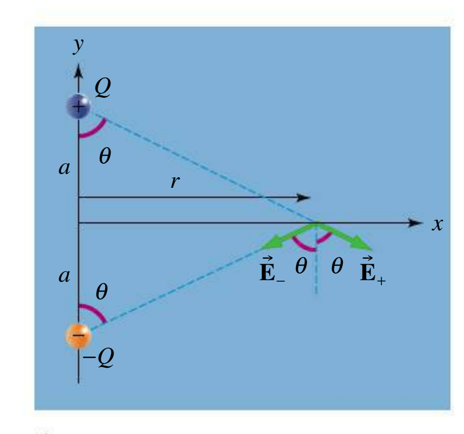
Le champ produit par un dipôle source

Nous allons maintenant voir quantitativement comment un dipôle interagit, en commençant par considérer le cas d'un dipôle *source*. La figure 2.53 représente un dipôle constitué par les charges Q en $(0, a)$ et $-Q$ en $(0, -a)$, où $a = d/2$. On suppose que $Q > 0$. Dans un premier temps, nous voulons trouver le champ électrique sur la médiatrice du dipôle, à une distance r de son centre, c'est-à-dire en $(r, 0)$. En un tel point, situé sur l'axe des x, les champs dus aux deux charges ont le même module :

$$E_+ = E_- = \frac{kQ}{r^2 + a^2}$$

Puisqu'elles font le même angle avec l'axe des x, les composantes selon x s'annulent. La composante selon y du champ est

$$\begin{aligned} E_y &= -(E_+ + E_-)\cos\theta \\ &= -\frac{2kQ}{(r^2 + a^2)}\,\frac{a}{(r^2 + a^2)^{1/2}} \\ &= \frac{-k(2a)Q}{(r^2 + a^2)^{3/2}} \end{aligned}$$



▲ **Figure 2.53**
Le calcul du champ sur la médiatrice d'un dipôle.

On peut exprimer le numérateur en fonction de $p = Qd = 2aQ$. On peut aussi simplifier le dénominateur si on se limite aux points situés loin du dipôle (où $r \gg a$) : on peut alors négliger a par rapport à r, ce qui donne $(r^2 + a^2)^{3/2} \to r^3$. Le module du champ résultant en un point éloigné sur la médiatrice est égal à la composante E_y :

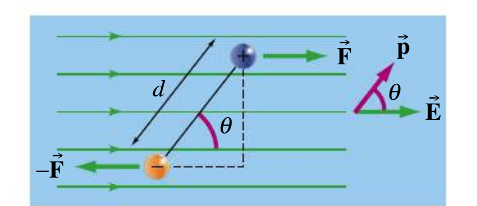
(médiatrice) $$E = \frac{kp}{r^3} \qquad (r \gg a) \qquad (2.21)$$

Le champ résultant est inversement proportionnel au *cube* de la distance et décroît donc plus rapidement que le champ créé par une charge ponctuelle unique. Cela est dû au fait que les composantes du champ s'annulent en partie, les charges étant de signes opposés. En utilisant une démarche similaire, on peut aussi montrer que le champ en un point éloigné sur l'axe d'un dipôle (c'est-à-dire un point situé sur l'axe des y à la figure 2.53) est donné par

(axe) $$E = \frac{2kp}{r^3} \qquad (r \gg a) \qquad (2.22)$$

Dans cette direction aussi, on remarque que le champ décroît avec le cube de la distance, bien qu'il soit deux fois plus intense. Les lignes de champ d'un dipôle source sont représentées à la figure 2.9*b* (p. 42).

Le moment de force exercé sur un dipôle cible



▲ Figure 2.54

Dans un champ électrique, un dipôle électrique est soumis à un moment de force.

Nous considérons maintenant un dipôle *cible* et on s'intéresse d'abord au fait qu'il va pivoter pour s'aligner sur les lignes de champ locales (voir la figure 2.46, p. 68). La figure 2.54 représente le cas d'un champ uniforme, avec lequel un dipôle forme un angle θ. Si le champ est non uniforme, comme à la figure 2.46 (p. 68), on peut considérer en première approximation, du point de vue de la rotation, que le dipôle est plongé dans un champ électrique uniforme dont le module et l'orientation sont ceux au centre du dipôle, de sorte que la figure 2.54 demeure valable.

Le champ causant des forces électriques de sens opposés sur les charges, ces forces s'annulent mais ont quand même tendance à faire pivoter le dipôle. Rappelons que la tendance d'une force à causer une rotation est son *moment* (voir la section 11.5 du tome 1). Le dipôle est soumis à deux moments de force qui s'additionnent. Le module du moment de chaque force par rapport au centre du dipôle est $\tau_+ = \tau_- = r_\perp F$, où $r_\perp = (d/2)\sin\theta$. Le module du moment de force résultant est donc

$$\tau = \tau_+ + \tau_- = 2(qE)\left(\frac{d}{2}\sin\theta\right) = pE\sin\theta \qquad (2.23)$$

On vérifie que ce moment de force a effectivement tendance à orienter le dipôle parallèlement aux lignes de champ, car il diminue si θ s'approche de zéro.

L'équation 2.23 donne seulement le module du moment de force. Si on tient compte aussi du sens de rotation, on peut exprimer le tout par un vecteur moment de force, donné par

Moment de force exercé sur un dipôle

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}} \qquad (2.24)$$

Pour faire pivoter un dipôle de θ_i à θ_f, le moment de force électrique donné par l'équation 2.24 doit effectuer un travail $W_E = -\int \tau \, d\theta$ (voir le chapitre 11 du

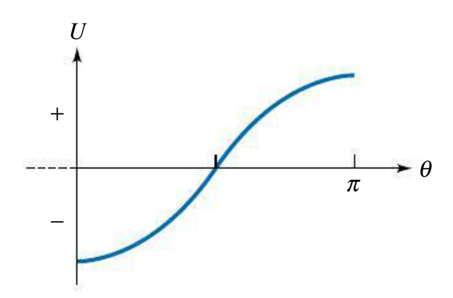
tome 1). Nous allons voir au chapitre 4 que la force électrique est une force conservative, ce qui signifie que ce travail correspond à une variation d'énergie potentielle : $\Delta U = -W_E$. En utilisant l'équation 2.23, on peut écrire

$$\Delta U = \int_{\theta_i}^{\theta_f} pE \sin\theta \, d\theta = -pE\cos\theta_f + pE\cos\theta_i$$

Puisque seules les variations d'énergie potentielle ont une signification physique, il est commode de poser que U_f et U_i correspondent respectivement au premier et au second terme du membre de droite de cette équation. Ce choix équivaut à choisir la référence $U = 0$ en $\theta = \pi/2$ (l'angle pour lequel $\cos\theta = 0$). L'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ externe uniforme (ou considéré localement comme uniforme) est donc

Énergie potentielle électrique d'un dipôle

$$U_E = -pE\cos\theta = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \qquad (2.25)$$



▲ **Figure 2.55**
L'énergie potentielle d'un dipôle en fonction de son orientation.

La figure 2.55 représente graphiquement l'énergie potentielle en fonction de l'angle θ. Elle est minimale en $\theta = 0$ et maximale pour $\theta = \pi$. Si le dipôle est libre de tourner, il oscille par rapport à la direction du champ. Si son énergie mécanique peut être dissipée par un mécanisme quelconque (collisions avec d'autres molécules ou rayonnement), le dipôle finira par atteindre son état de plus faible énergie, autrement dit il va s'orienter suivant le champ.

La force exercée sur un dipôle cible

Considérons maintenant la force résultante que subit un dipôle cible après qu'il se soit aligné parallèlement aux lignes de champ locales.

Si le dipôle est plongé dans un champ électrique uniforme, alors la force électrique sur chacune des charges qui le composent a le même module, de sorte que la force résultante agissant sur le dipôle est nulle (figure 2.56*a*). Ainsi, s'il est initialement immobile, le dipôle ne subit pas de translation.

Si le dipôle est plongé dans un champ électrique non uniforme (figure 2.56*b*), il subit une force résultante, car le module du champ est différent à la position des deux charges. Si $\vec{\mathbf{E}}_+$ et $\vec{\mathbf{E}}_-$ sont les valeurs respectives du champ là où se trouvent la charge positive et la charge négative, et si $\vec{\mathbf{F}}_+$ et $\vec{\mathbf{F}}_-$ sont les forces qui en découlent, la composante selon un axe des x parallèle au dipôle de la force résultante agissant sur le dipôle est

$$F_x = F_+ - F_- = q(E_+ - E_-) = q\Delta E$$

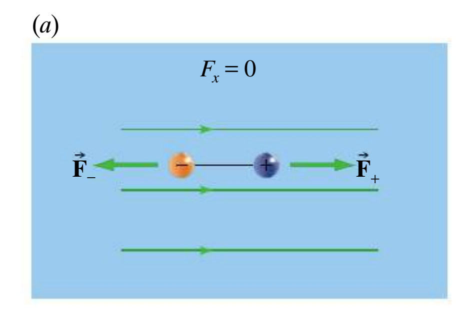
L'axe des x ayant été choisi parallèle au dipôle, on peut écrire $p = q\Delta x$, donc la composante selon x de la force peut alors s'écrire $F_x = p\Delta E/\Delta x$, ce qui donne à la limite, quand $\Delta x \to 0$*,

$$F_x = p\frac{dE}{dx} \qquad (2.26)$$

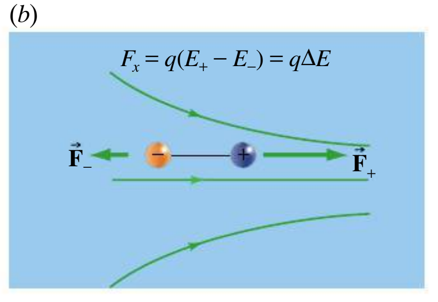
Si dE/dx est positif, cette force est dirigée dans le sens des x positifs.

En général, un dipôle subit *à la fois* une force et un moment de force non nuls : il doit être aligné sur le champ pour que le moment soit nul et doit être dans un champ uniforme pour que la force soit nulle.

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 2.56**
(*a*) Un dipôle cible dans un champ uniforme ne subit aucune force résultante. (*b*) Dans un champ non uniforme, il subit une force résultante.

* On peut aussi tirer cette expression de $U = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$ et de la relation $F_x = -dU/dx$.



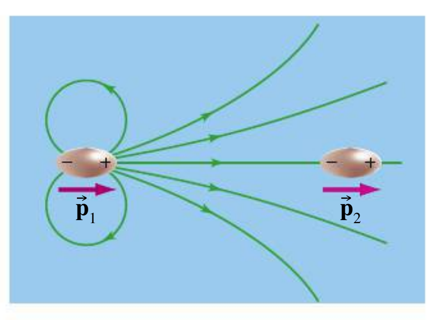
▲ **Figure 2.57**

Un peigne chargé induit des dipôles dans un morceau de papier (un isolant). Comme le champ créé par le peigne n'est pas uniforme, le papier est soumis à une force résultante non nulle qui l'attire vers le peigne.



▲ **Figure 2.58**

Les photocopieurs fonctionnent grâce à l'attraction dipôle-ion : d'abord, l'appareil illumine le document pour en produire, sur un tambour, une « empreinte » chargée positivement. Les particules de toner (encre en poudre) adhèrent ensuite à cette empreinte, car elles sont polarisées puis attirées. Enfin, on met en contact le papier, préalablement chargé par frottement, avec le tambour (voir le sujet connexe à la fin du chapitre 4.)



▲ **Figure 2.59**

Le champ créé par un dipôle peut induire un dipôle dans une molécule ou un atome voisin. Il en résulte une force d'attraction entre les dipôles.

On note qu'un dipôle dans un champ non uniforme subit une force résultante *même s'il est électriquement neutre*. C'est pourquoi un morceau de papier, qui est neutre, peut être attiré par un peigne chargé (figure 2.57). Le champ produit par le peigne polarise chacun des atomes du papier, comme à la figure 2.45 (p. 68). Le champ dû au peigne n'étant pas uniforme, les forces agissant sur les charges positives et négatives du papier ne sont pas égales. La force résultante agissant sur le papier est dirigée vers le peigne. C'est le même phénomène qui permet aux photocopieurs de fonctionner (figure 2.58). C'est aussi le même phénomène qui était à l'œuvre à la figure 2.49 (p. 69), le peigne étant remplacé par les ions et les dipôles temporaires du papier, par les dipôles permanents des molécules d'eau.

L'interaction entre dipôles

Une paire de dipôles côte à côte interagissent, car on peut considérer l'un comme une source et l'autre comme une cible. Le champ produit par la source étant non uniforme, le dipôle cible subit une force résultante. Comme chacun des dipôles est une source du point de vue de l'autre dipôle, tous deux s'attirent mutuellement.

La force entre des dipôles induits dans des atomes neutres est à l'origine d'un type d'interaction faible appelée *force de Van der Waals*. Une fluctuation aléatoire dans la distribution des charges d'un atome peut faire apparaître un moment dipolaire électrique temporaire, que nous appellerons $\vec{\mathbf{p}}_1$. Le module du champ créé en un point éloigné sur l'axe du dipôle est donné par l'équation 2.22 :

$$\text{(axe)} \qquad E_1 = \frac{2kp_1}{x^3}$$

Comme le montre la figure 2.59, ce champ induit un moment dipolaire $\vec{\mathbf{p}}_2$ dans un atome situé à proximité. Le deuxième atome est donc soumis à une force de module

$$F_2 = p_2\left|\frac{\mathrm{d}E_1}{\mathrm{d}x}\right|$$

dirigée vers le premier atome. Le moment dipolaire induit est proportionnel au champ extérieur, c'est-à-dire $p_2 \propto E_1$. Comme $\mathrm{d}E_1/\mathrm{d}x \propto 1/x^4$, on en déduit que la force d'interaction entre les deux dipôles varie comme suit :

$$F \propto \frac{1}{x^7}$$

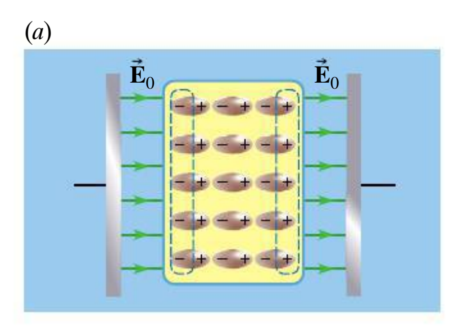
Cette force de Van der Waals est attractive. Elle intervient lors de la condensation d'un gaz en liquide. La facilité avec laquelle le mica se sépare en feuilles s'explique par le fait que celles-ci ne sont maintenues ensemble que par des forces de Van der Walls et non des liaisons ioniques ou covalentes, plus fortes. Une fois qu'une protéine a adopté sa conformation tridimensionnelle, que deux brins d'ADN se sont joints ou qu'une membrane cellulaire s'est assemblée, les parties non polaires ont encore moins tendance à se séparer en raison des forces de Van der Walls. Ces forces sont trop faibles pour permettre l'assemblage initial, mais le stabilisent une fois qu'il est effectué.

2.7 LE CHAMP ÉLECTRIQUE ET LES ISOLANTS

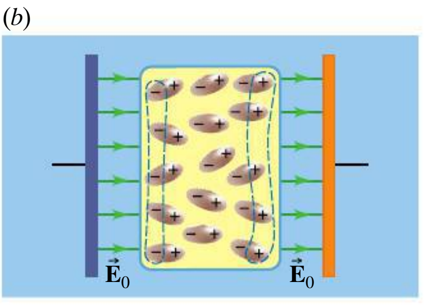
À la section 2.3, nous avons vu qu'un conducteur plongé dans un champ extérieur subissait une séparation des charges, qui annulait le champ résultant dans le conducteur. Nous allons maintenant voir qu'un isolant plongé dans un champ subit un phénomène analogue, la **polarisation**. Celui-ci n'est toutefois pas suffisant pour annuler le champ résultant et ne fait que le *réduire*.

Quand un matériau isolant est plongé dans un champ extérieur, chacun des atomes qui le composent se trouve plongé dans ce champ et devient donc un dipôle induit (voir la figure 2.45, p. 68). On peut donc se représenter le matériau comme une multitude de dipôles *tous alignés* (figure 2.60*a*). Si, en plus, l'isolant est fait de molécules polaires, celles-ci subissent un moment de force qui tend à les aligner sur le champ externe, produisant essentiellement le même résultat (figure 2.60*b*).

(*a*)



(*b*)

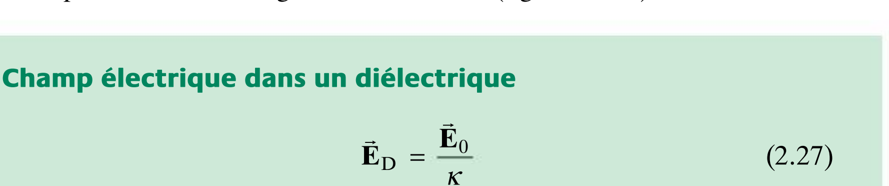


▲ **Figure 2.60**

(*a*) Un champ électrique extérieur polarise un matériau non polaire. (*b*) Si les molécules sont polaires, leur alignement partiel renforce la polarisation. Dans les deux cas, l'effet du diélectrique est équivalent à celui qu'auraient les seules charges encerclées.

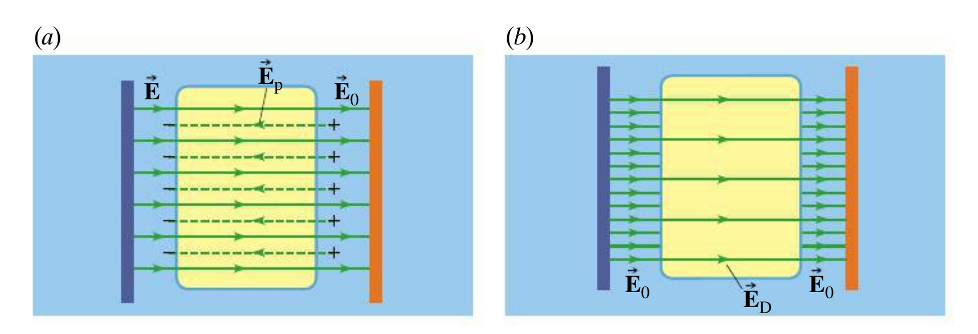
Quand le champ fait apparaître des dipôles dans le matériau, on dit que celui-ci est *polarisé*. Un matériau qui peut se polariser est un **diélectrique** ; un bon isolant n'est pas toujours un bon diélectrique et vice versa.

Ces nombreux dipôles sont la source d'un champ électrique (voir la section précédente) et, comme ils sont tous alignés, le champ qu'ils produisent se renforce et devient non négligeable. On peut montrer mathématiquement que le champ produit par l'ensemble des dipôles est égal au champ que produisent les seules charges de surface apparentes encerclées en pointillés à la figure 2.60. Ces charges de surface, appelées *charges liées* ou *charges de polarisation*, sont d'autant plus grandes que le matériau diélectrique est fortement polarisé. Autrement dit, la polarisation du matériau est équivalente à une séparation réelle des charges sur l'épaisseur du matériau. Ces charges liées créent un *champ électrique de polarisation* $\vec{\mathbf{E}}_p$ qui est ici de sens opposé au champ externe $\vec{\mathbf{E}}_0$ (figure 2.61*a*). Dans les géométries simples que nous étudierons, où les surfaces de diélectriques sont perpendiculaires à $\vec{\mathbf{E}}_0$, le champ $\vec{\mathbf{E}}_p$ est proportionnel à $\vec{\mathbf{E}}_0$ si bien que le champ résultant $\vec{\mathbf{E}}_D = \vec{\mathbf{E}}_0 + \vec{\mathbf{E}}_p$ est lui aussi proportionnel à $\vec{\mathbf{E}}_0$. Ainsi, on peut calculer $\vec{\mathbf{E}}_D$ en divisant par un facteur κ le champ $\vec{\mathbf{E}}_0$ produit par les seules charges des armatures (figure 2.61*b*) :



Champ électrique dans un diélectrique

$$\vec{\mathbf{E}}_D = \frac{\vec{\mathbf{E}}_0}{\kappa} \qquad (2.27)$$



◀ **Figure 2.61**

(*a*) Le champ électrique de polarisation $\vec{\mathbf{E}}_p$ créé par les charges superficielles apparentes du diélectrique est opposé au champ extérieur $\vec{\mathbf{E}}_0$. (*b*) Le module du champ résultant à l'intérieur du diélectrique est $E_D = E_0 - E_p$.

Si on plonge une charge cible q dans le diélectrique, la force $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}_D$ qu'elle subit est différente de ce qu'elle serait en l'absence de diélectrique, soit $q\vec{\mathbf{E}}_0$. D'après l'équation 2.27, ces forces diffèrent d'un facteur κ. Ce facteur κ s'appelle la **constante diélectrique** et ne dépend que de la nature du matériau. Le tableau 5.1 (p. 190) présente la constante diélectrique de quelques matériaux.

L'équation 2.27 signifie qu'on peut décrire le phénomène *sans avoir à considérer explicitement les dipôles induits comme des charges sources additionnelles* : il suffit de diviser par κ le champ qui serait obtenu sans dipôles induits. Dans l'air, la différence est en pratique négligeable (κ = 1,000 59), mais pas dans l'eau ($\kappa \approx 80$). Sauf mention du contraire, on considère que les charges sont situées dans le vide.

Comme nous l'avons annoncé au chapitre 1, on peut appliquer l'équation 2.27 implicitement en remplaçant ε_0, partout où il apparaît, par $\kappa\varepsilon_0$. Pour cette raison, κ est aussi appelée la **permittivité relative** du matériau et $\kappa\varepsilon_0$, sa **permittivité**. Remplacer ε_0 par $\kappa\varepsilon_0$ revient aussi à remplacer la constante k de la loi de Coulomb par k/κ. Par exemple, un ion* de charge q situé en solution dans l'eau ne produira pas un champ de module $E = kq/r^2$, mais $E = kq/\kappa r^2$. L'exemple suivant traite de ce scénario. À la section 5.6, nous récapitulerons le fonctionnement des diélectriques.

Exemple 2.13



Dans l'eau, tous les ions s'entourent de plusieurs molécules d'eau qui réduisent les interactions entre eux. (a) Calculer le champ produit par un ion Na^+ à 5,0 nm de lui dans le vide. (b) Répéter la question dans le cas où il se trouve dans l'eau pure, considérée comme homogène, pour laquelle $\kappa = 80$. (c) Quel effet la présence de l'eau a-t-elle sur l'interaction entre un ion Na^+ et une protéine portant la charge $-e$ qui passe à 5,0 nm ?

Solution

(a) L'ion Na^+ a une charge $q = +e$. Par l'équation 2.2,

$$E_{\text{vide}} = k\frac{e}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r^2} = 5{,}77 \times 10^7 \text{ N/C}$$

(b) Dans l'eau, on remplace ε_0 par $\kappa\varepsilon_0$. On a donc

$$E_{\text{eau}} = \frac{1}{4\pi\kappa\varepsilon_0}\frac{e}{r^2} = 7{,}21 \times 10^5 \text{ N/C}$$

(c) La force subie par la protéine a un module $F = eE$ dans un cas comme dans l'autre. Elle serait donc 80 fois plus élevée en l'absence d'eau. Des forces aussi élevées entre les protéines et les ions plus petits causeraient leur agglomération, empêchant les protéines de jouer leur rôle biologique. ■

2.8 L'EXPÉRIENCE DE LA GOUTTE D'HUILE DE MILLIKAN

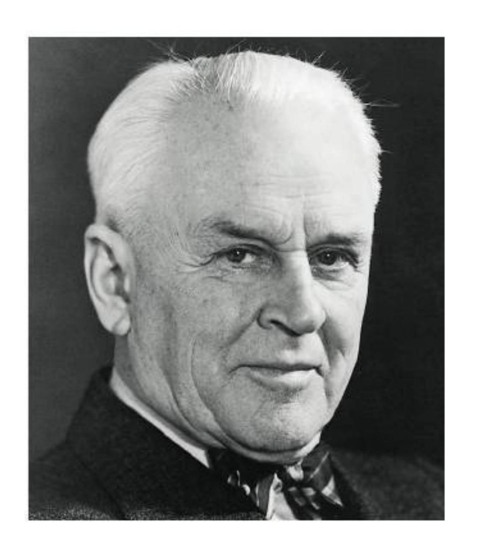


Figure 2.62
Robert A. Millikan (1868-1953).

Nous avons vu à la section 1.1 que la charge électrique est quantifiée, c'est-à-dire que la charge portée par un corps ne peut prendre pour valeurs qu'un des multiples de la charge élémentaire e. Ce principe de quantification fut mesuré directement en 1909 par R. A. Millikan (figure 2.62), dans son *expérience de la goutte d'huile*. Entre deux plaques produisant un champ électrique (figure 2.63), on vaporise de l'huile (il se servait d'un simple vaporisateur à parfum) au-dessus de la plaque supérieure ; les gouttes d'huile se chargent par frottement et on observe celles qui tombent par une ouverture pratiquée dans la plaque supérieure. On fait varier la différence de potentiel entre les plaques jusqu'à ce qu'une goutte donnée soit en équilibre, c'est-à-dire jusqu'à ce que la force électrique et la force gravitationnelle aient le même module : $|q|E = mg$.

La masse d'une goutte est déterminée par son rayon r et par la masse volumique de l'huile. Mais comme il s'agit en fait de très fines gouttelettes ($r \approx 2{,}5 \times 10^{-5}$ cm), leur rayon ne peut être mesuré directement. Lorsqu'on supprime le champ, la chute des gouttelettes est ralentie par la résistance visqueuse de l'air, une force dont le module est donné par $F_{\text{rés}} = \gamma v$, où v est la vitesse de la gouttelette et γ

* L'équation 2.27 modélise le diélectrique comme un milieu continu. Au niveau microscopique, cela peut parfois poser problème, par exemple si deux ions dans l'eau sont tellement rapprochés l'un de l'autre qu'il n'y a pratiquement aucune molécule d'eau entre les deux. Dans un tel cas, on peut obtenir un meilleur résultat en considérant que la situation se déroule dans le vide ($\kappa = 1$), mais que tous les dipôles induits sont des sources de champ. En pratique, l'équation 2.27 devient raisonnable dès que les échelles dépassent quelques nanomètres. Un autre problème survient quand les ions en solution sont très nombreux : un ion donné s'entoure d'ions de charge opposée qui font en sorte que le champ résultant décroît plus vite qu'en $1/r^2$. Nous négligerons cet *effet d'écran* dans l'ensemble de ce manuel.

est une constante qui dépend de son rayon et de la résistance (viscosité) de l'air. En mesurant la vitesse finale, on peut déterminer r puis m (voir le problème P15). Enfin, la charge est donnée par $q = mg/E$.

Après avoir effectué plusieurs centaines de mesures, Millikan confirma l'hypothèse qu'il avait formulée : selon *chacune* de ces mesures, la charge des gouttelettes était toujours un multiple entier de l'unité de base $e = 1{,}602 \times 10^{-19}$ C. Autrement dit, il montra que la charge est *quantifiée*. Soulignons le caractère minutieux de son expérience. En effet, une charge minime de 10^{-10} C, acquise par frottement, correspond à *un milliard* de charges électroniques. Un écart de quelques millions ne ferait donc pas une grande différence ; Millikan a pourtant réussi à faire des mesures avec des gouttelettes portant *une seule* charge électronique !

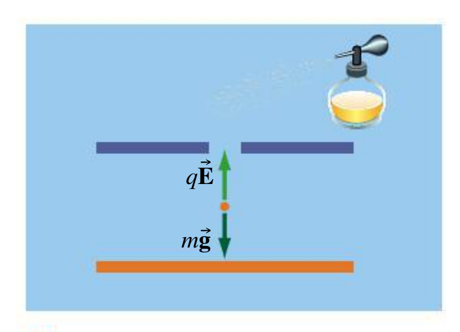


Figure 2.63
Dans l'expérience de la goutte d'huile de Millikan, des gouttelettes chargées sont en équilibre dans le champ créé entre deux plaques.

RÉSUMÉ



Une charge électrique agit sur le milieu qui l'entoure en créant un champ électrique, lequel exerce ensuite une force sur les autres charges. La valeur (vectorielle) du champ électrique en un point est définie comme la force par unité de charge agissant sur une charge d'essai q_{ess} placée en ce point : $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{F}}_E / q_{\text{ess}}$. Le vecteur $\vec{\mathbf{E}}$ est orienté dans le même sens que la force agissant sur une charge positive. Lorsqu'on connaît le vecteur champ, on peut déterminer la force qu'il exerce sur une quelconque charge cible q (c'est-à-dire une charge qui n'est pas à l'origine de ce champ) au moyen de l'égalité

$$\vec{\mathbf{F}}_E = q\vec{\mathbf{E}} \qquad (2.3a)$$

Le module du champ électrique produit par une charge source Q est

$$E = \frac{k|Q|}{r^2} \qquad (2.2)$$

de telle sorte que le module de la force que produit ce champ sur une (autre) charge ponctuelle q est $F = |q|E = k|qQ|/r^2$, ce qui correspond à la loi de Coulomb.

Lorsqu'on est en présence de plusieurs charges sources, le champ total produit par ces charges est donné par le principe de superposition :

$$\vec{\mathbf{E}} = \sum \vec{\mathbf{E}}_i \qquad (2.4)$$

Si la distribution de charge est continue, on calcule le champ en intégrant sur la distribution de charge. Si la charge se distribue le long d'un objet qui a la forme d'un fil, on utilise la densité linéique de charge (symbole : λ) pour trouver la charge dq portée par un élément de longueur dℓ à l'aide de la relation

$$\mathrm{d}q = \lambda \, \mathrm{d}\ell \qquad (2.8)$$

Si la charge se distribue sur un objet qui a la forme d'une plaque, on utilise la densité surfacique de charge (symbole : σ) pour trouver la charge dq portée par un élément de surface dA à l'aide de la relation

$$\mathrm{d}q = \sigma \, \mathrm{d}A \qquad (2.10)$$

À la section 2.5, on a utilisé cette méthode pour étudier les cas importants d'un champ produit par un long fil rectiligne chargé, par un anneau chargé, par une grande plaque chargée ou par un système de deux plaques parallèles chargées.

Les lignes de champ électrique nous aident à visualiser la configuration du champ. Elles nous donnent les renseignements suivants : 1) le vecteur champ est orienté selon la tangente à la ligne de champ, et 2) le module du champ est proportionnel à la densité des lignes de champ, c'est-à-dire au nombre de lignes qui traversent une surface unitaire perpendiculaire aux lignes. Les autres propriétés des lignes de champ électrique et la manière de les tracer sont décrites à la section 2.2.

Deux charges de même grandeur et de signes opposés $+Q$ et $-Q$ séparées par une distance d forment un dipôle électrique. Le moment dipolaire électrique est donné par

$$\vec{\mathbf{p}} = Q\vec{\mathbf{d}} \tag{2.20}$$

où le vecteur $\vec{\mathbf{d}}$, et donc le vecteur $\vec{\mathbf{p}}$, sont orientés de la charge négative vers la charge positive. Placé dans un champ externe, le dipôle est soumis à un moment de force donné par

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}} \tag{2.24}$$

Ce moment de force a tendance à orienter le moment dipolaire parallèlement au champ. L'énergie potentielle d'un dipôle dans un champ extérieur est

$$U_E = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}} \tag{2.25}$$

L'énergie potentielle est donc minimale lorsque $\vec{\mathbf{p}}$ est parallèle à $\vec{\mathbf{E}}$.

Si on plonge un conducteur dans un champ extérieur, il subit une séparation de charges. Ces nouvelles charges sources produisent un champ inverse qui annule le champ résultant dans le matériau du conducteur. Si on plonge un isolant diélectrique dans un champ extérieur, il se polarise localement, ce qui résulte en l'équivalent d'une séparation de charge, plus faible que dans un conducteur. Le champ résultant n'est pas annulé mais réduit par un facteur κ, appelé constante diélectrique, qui dépend de la nature du matériau diélectrique :

$$\vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{D}} = \frac{\vec{\mathbf{E}}_0}{\kappa} \tag{2.27}$$

La constante κ est aussi appelée *permittivité relative*, ce qui permet de dire que $\kappa\varepsilon_0$ est la *permittivité* du matériau.

TERMES IMPORTANTS

cage de Faraday (p. 47)
champ électrique (p. 34)
champ uniforme (p. 48)
charge cible (p. 35)
charge source (p. 35)
condensateur plan (p. 49)
constante diélectrique (p. 75)
densité linéique de charge (p. 57)
densité surfacique de charge (p. 57)
diélectrique (p. 75)
dipôle électrique (p. 68)
équilibre électrostatique (p. 45)
ligne de champ électrique (p. 41)
moment dipolaire électrique (p. 69)
permittivité (p. 76)
permittivité relative (p. 76)
polarisation (p. 74)

RÉVISION

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

R1. Quel rôle joue le champ électrique entre les particules chargées ?

R2. Comparez les définitions et les unités du champ gravitationnel et du champ électrique.

R3. Énoncez la règle qui permet de déterminer le sens du vecteur champ électrique produit par une charge Q en un point quelconque.

R4. Vrai ou faux ? Si on double la valeur de la charge d'une particule, le champ électrique à l'endroit où elle se trouve double.

R5. Quel physicien du XIXe siècle considérait les lignes de champ comme des entités matérielles ?

R6. Dressez une liste des propriétés des lignes de champ.

R7. Tracez les lignes de champ électrique produites par une paire de charges identiques séparées par une certaine distance (a) si elles sont positives ; (b) si elles sont négatives ; (c) si elles sont de signes opposés.

R8. Pourquoi les lignes de champ ne se croisent-elles jamais ?

R9. Vrai ou faux ? Le module du champ est constant le long d'une ligne de champ.

R10. On place une charge d'essai dans le champ électrique créé par deux charges ponctuelles. Les lignes de champ indiquent-elles les trajets possibles pour la charge d'essai ?

R11. Expliquez pourquoi le champ électrique à l'intérieur d'un conducteur est nul à l'équilibre électrostatique.

R12. Expliquez pourquoi le champ électrique est perpendiculaire à la surface d'un conducteur à l'équilibre électrostatique.

R13. Puisque des objets chargés infinis n'existent pas, dans quelles conditions peut-on utiliser l'équation valable pour le fil infini (équation 2.13) ? Celle valable pour la plaque infinie (équation 2.18) ?

R14. Comment le module du champ électrique varie-t-il en fonction de la distance dans le cas (a) d'une charge ponctuelle ; (b) d'un fil infini uniformément chargé ; (c) d'une plaque infinie uniformément chargée ?

R15. Le champ électrique produit par un dipôle est proportionnel à son moment dipolaire électrique, lequel est proportionnel à la distance qui sépare les charges. Expliquez en quoi la séparation des charges affecte la valeur du champ.

R16. Expliquez pourquoi le moment dipolaire électrique de la molécule d'eau en fait un solvant très puissant. Quelle importance cela a-t-il pour l'existence de la vie ?

R17. Pourquoi des molécules amphiphiles peuvent-elles spontanément se regrouper pour former une membrane cellulaire ? Expliquez le rôle de l'eau.

QUESTIONS

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

Q1. Soit un champ électrique créé par un ensemble de charges immobiles. Lorsqu'on introduit une nouvelle charge dans la région, les lignes de champ sont modifiées. Devrait-on utiliser les lignes initiales ou les nouvelles lignes pour déterminer la direction de la force agissant sur la nouvelle charge ?

Q2. Les lignes de champ électrique partent des charges positives et se dirigent vers les charges négatives. Que deviennent les lignes créées par une charge isolée ?

Q3. On place une charge ponctuelle au centre d'un cube métallique creux non chargé. Dessinez les lignes de champ à l'intérieur du cube dans un plan parallèle à une face et passant par la charge.

Q4. Expliquez qualitativement pourquoi le champ électrique créé par une plaque infinie chargée est uniforme.

Q5. Quatre charges électriques ponctuelles et identiques sont situées aux sommets d'un carré. Où, ailleurs qu'à l'infini et au centre du carré, le champ électrique résultant est-il nul ?

Q6. En quoi la loi de Coulomb et la loi de la gravitation universelle de Newton se ressemblent-elles ? En quoi sont-elles différentes ? Considérez les lois proprement dites et leurs modes d'application.

Q7. Le champ gravitationnel a-t-il parfois la configuration d'un dipôle ? Si oui, donnez un exemple en indiquant comment cela peut se produire.

Q8. Citez deux champs observés dans la vie quotidienne qui sont (a) scalaires ; (b) vectoriels.

Q9. Quel est le travail effectué pour faire tourner un dipôle électrique de 180° dans un champ électrique uniforme, dans chacun des cas suivants : (a) de 0° à 180° ; (b) de −90° à +90° ? Les angles sont mesurés par rapport à $\vec{\mathbf{E}}$.

Q10. Les molécules CO_2 et H_2O contiennent toutes deux des atomes identiques liés à un atome central. Pourtant, la première est non polaire alors que la seconde est polaire. Que cela vous indique-t-il quant à leurs géométries ? Laquelle peut traverser le plus facilement une membrane cellulaire ?

Q11. Si on place des molécules amphiphiles dans un solvant non polaire et qu'on agite, vont-elles former des bicouches similaires à une membrane cellulaire, comme elles le font dans l'eau ? Sinon, quelles seront les différences ?

EXERCICES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

Dans les exercices et les problèmes où il s'agit de situations évoluant près de la surface de la Terre, on doit considérer que l'axe des y est orienté vers le haut. De plus, sauf mention du contraire, on suppose que les situations décrites se déroulent dans le vide.

2.1 Champ électrique

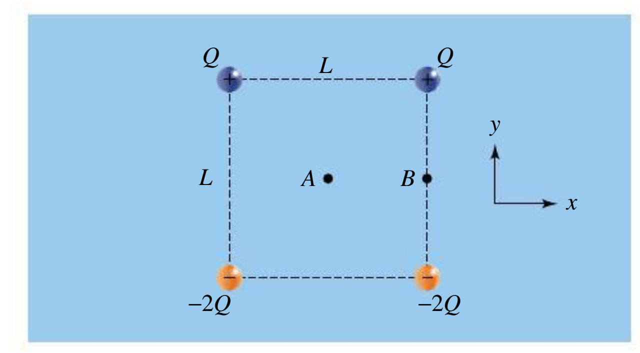
E1. (I) Quel est le champ électrique nécessaire pour compenser le poids des particules suivantes près de la surface de la Terre : (a) un électron ; (b) un proton ?

E2. (I) Par beau temps, on observe à la surface de la Terre un champ électrique de 120 N/C orienté vers le bas. (a) Quelle est la force électrique agissant sur un proton dans un tel champ ? (b) Quelle est l'accélération du proton ?

E3. (I) Une charge ponctuelle $q_1 = 3{,}2$ nC est soumise à une force électrique $\vec{\mathbf{F}}_E = 8 \times 10^{-6}\,\vec{\mathbf{i}}$ N. (a) Décrivez le champ électrique extérieur à l'origine de cette force. (b) Quelle serait la force exercée sur une charge ponctuelle $q_2 = -6{,}4$ nC située au même point ?

E4. (I) Soit une charge ponctuelle $-4q$ située en $x = 0$ et une deuxième charge en $x = 1$ m. À part l'infini, où le champ électrique résultant est-il nul, sachant que la deuxième charge vaut (a) $9q$; (b) $-q$?

E5. MonLab (I) On donne quatre charges ponctuelles situées aux sommets d'un carré de côté L, comme sur la figure 2.64. Déterminez le champ électrique résultant (a) au point A, au centre du carré ; (b) au point B.



▲ **Figure 2.64**
Exercice 5.

E6. (I) Soit une charge ponctuelle Q_1 positive située à l'origine et une charge Q_2 négative en $x = 2$ m. Le champ électrique résultant est égal à $10{,}8\vec{\mathbf{i}}$ N/C en $x = 1$ m et à $-8\vec{\mathbf{i}}$ N/C en $x = 3$ m. Trouvez Q_1 et Q_2.

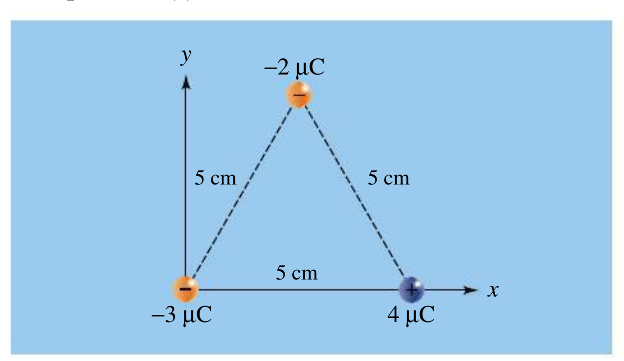
E7. (I) Une gouttelette a une masse de 10^{-13} kg et une charge de $+2e$. Dans quel champ électrique vertical la gouttelette serait-elle en équilibre près de la surface de la Terre ?

E8. (I) Soit une charge $q_1 = 3$ nC située à l'origine et $q_2 = -7$ nC située en $x = 8$ cm. (a) Trouvez le champ électrique créé par q_1 au point où se trouve q_2. (b) Trouvez le champ électrique créé par q_2 au point où se trouve q_1. (c) Quelle est la force électrique exercée par q_1 sur q_2 ? (d) Quelle est la force exercée par q_2 sur q_1 ?

E9. (I) On donne une charge ponctuelle de -5 μC située à l'origine. Trouvez le champ électrique aux points suivants : (a) (2 m, –1 m) ; (b) (–2 m, 3 m). (c) On ajoute une seconde charge de 100 μC à la position (1 m, 1 m). La présence de cette charge change-t-elle le champ produit par la première charge ? (d) Affecte-t-elle le champ résultant ?

E10. (I) Soit une charge ponctuelle $Q_1 = -4$ μC située au point (2 m, 1 m) et une charge $Q_2 = +15$ μC en (1 m, 4 m). Trouvez le champ électrique résultant au point (3 m, 5 m).

E11. MonLab (I) On considère les trois charges ponctuelles situées aux sommets du triangle équilatéral de la figure 2.65. (a) Déterminez le champ électrique produit à l'origine par les charges –2 μC et +4 μC. (b) Quelle est la force électrique exercée sur la charge de –3 μC ? (c) Si l'on change le signe de la charge située à l'origine, quel est l'effet sur le champ calculé à la question (a) ?



▲ **Figure 2.65**
Exercice 11.

E12. (II) Soit une charge ponctuelle Q_1 en $x = 0$ et une charge Q_2 en $x = d$. Quelle est la relation existant entre ces charges si le champ électrique résultant est nul aux points suivants : (a) $x = d/2$; (b) $x = 2d$; (c) $x = -d/2$?

E13. (II) Soit une charge ponctuelle Q située à l'origine. Montrez que les composantes du champ électrique en un point quelconque de l'espace et à une distance r de la charge sont données par

$$E_\alpha = \frac{kQ\alpha}{r^3}$$

où $\alpha = x$, y ou z.

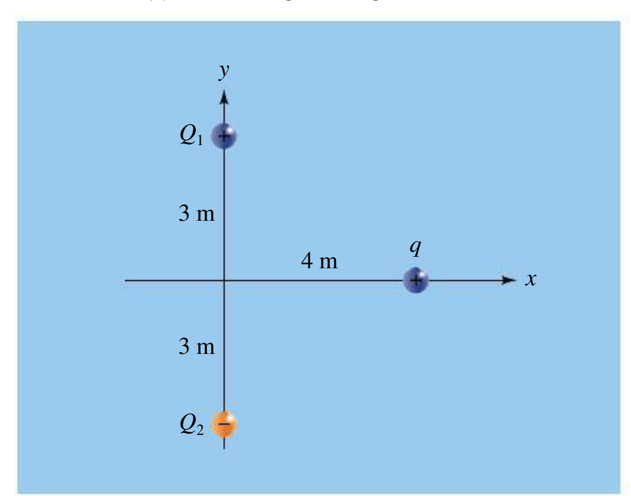
E14. (I) Le rayon du proton est égal à $0{,}8 \times 10^{-15}$ m. (a) Quel est le module du champ électrique à sa surface ? (b) Quel est le module du champ électrique à une distance de $0{,}53 \times 10^{-10}$ m du proton, qui correspond au rayon de l'orbite de l'électron selon le modèle atomique de Bohr ?

E15. (II) On donne une charge ponctuelle q positive en $x = 0$ et une charge $-q$ en $x = 6$ m. (a) Trouvez l'expression de la composante horizontale du champ électrique résultant le long de l'axe x. L'expression est différente selon que l'on se trouve à gauche de la charge q, entre les deux charges ou à droite de la charge $-q$. (b) Fixez une valeur raisonnable pour q et tracez le graphe de $E_x(x)$ pour x allant de -2 m à 8 m.

E16. (II) On donne une charge ponctuelle $2q$ positive en $x = 0$ et une charge $-q$ en $x = 6$ m. (a) Trouvez l'expression de la composante horizontale du champ électrique résultant le long de l'axe des x. (b) Où, ailleurs qu'à l'infini, le champ électrique résultant est-il nul sur l'axe des x ? (c) Fixez une valeur raisonnable pour q et tracez le graphe de $E_x(x)$ pour x allant de -2 m à 8 m.

E17. (I) On suppose l'existence d'un champ électrique uniforme $\vec{\mathbf{E}}_0 = 500\vec{\mathbf{i}}$ N/C sans préciser quelles charges en sont la source. À ce champ s'ajoute celui d'une charge ponctuelle de 2 µC située à l'origine. Quelle est la force électrique résultante agissant sur une charge de 5 µC située au point (3 m, 4 m) ?

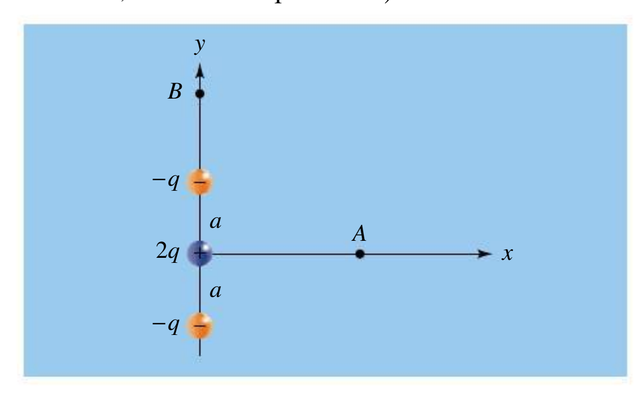
E18. (I) Les charges ponctuelles $Q_1 = 25$ µC et $Q_2 = -50$ µC sont situées sur l'axe des y comme le montre la figure 2.66. Une charge ponctuelle $q = 2$ µC se trouve sur l'axe des x. (a) Trouvez le champ électrique produit par Q_1 et Q_2 au point où se trouve q. (b) Que devient le champ calculé en (a) si la valeur de q est divisée par deux ? (c) Que devient le champ calculé en (a) si q change de signe ?



▲ **Figure 2.66**

Exercice 18.

E19. (II) La figure 2.67 représente une combinaison de charges que l'on nomme quadripôle électrique, où $q > 0$. Trouvez le champ électrique résultant existant (a) au point A $(x, 0)$; (b) au point B $(0, y)$. (c) Montrez que, pour le point A ou le point B, $E \propto 1/r^4$ pour $r \gg a$, r étant la distance par rapport à l'origine. (*Indice* : Utilisez l'approximation du binôme $(1 + z)^n \approx 1 + nz$, valable lorsque $z \ll 1$.)



▲ **Figure 2.67**

Exercice 19.

2.2 et 2.3 Lignes de champ, champ électrique et conducteurs

E20. (II) Trois charges ponctuelles sont situées aux sommets d'un triangle équilatéral. Deux des charges sont égales à q et la troisième à $-q$ $(q > 0)$. Dessinez les lignes de champ. Y a-t-il un point où $\vec{\mathbf{E}} = 0$?

E21. (II) Une plaque infinie porte une charge électrique positive répartie uniformément sur sa surface. Une charge ponctuelle est à une certaine distance devant ce plan. Dessinez les lignes de champ associées à cet ensemble dans le cas où (a) la charge ponctuelle est positive ; (b) la charge ponctuelle est négative. (c) Pour calculer la force sur la charge ponctuelle, faudra-t-il tenir compte des lignes de champ que vous venez de tracer ou uniquement de celles dues à la charge portée par la plaque ?

E22. MonLab (II) Dessinez les lignes de champ associées à l'ensemble formé de deux charges, $+3q$ et $-q$, placées à une certaine distance l'une de l'autre $(q > 0)$. En plus des lignes de champ, tracez aussi le vecteur champ en quelques points.

E23. (I) Soit un disque de dimension finie portant une charge électrique positive répartie uniformément sur sa surface. Dessinez les lignes de champ apparaissant dans un plan perpendiculaire au disque et passant par le centre du disque.

E24. (II) Dessinez les lignes de champ associées à l'ensemble formé de deux charges positives, $2q$ et q, placées à une certaine distance l'une de l'autre. En plus des lignes de champ, tracez aussi le vecteur champ en quelques points.

E25. (II) Deux charges égales et positives Q sont placées aux extrémités de la diagonale d'un carré. Deux charges négatives $-Q$ sont aux extrémités de l'autre diagonale. Dessinez les lignes de champ.

E26. (I) Une charge de 16 μC est placée au centre d'une coquille métallique sphérique portant −8 μC. Quelles sont les charges sur les surfaces intérieure et extérieure de la coquille ? Représentez les lignes de champ à l'intérieur et à l'extérieur de la coquille.

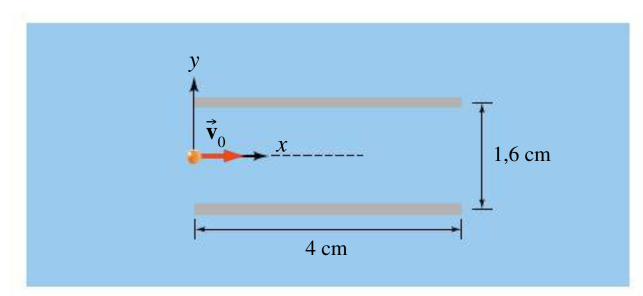
2.4 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

E27. (I) Un électron initialement au repos est soumis à une accélération par un champ électrique uniforme de module 10^5 N/C. (a) Combien de temps lui faut-il pour atteindre la vitesse de 0,1c, où $c = 3 \times 10^8$ m/s, soit la vitesse de la lumière ? (b) Quelle distance aura-t-il parcourue au bout de ce délai ? (c) Quelle est son énergie cinétique finale ?

E28. (I) Dans le tube cathodique d'un stérilisateur, un électron initialement au repos est accéléré jusqu'à une vitesse de 5×10^6 m/s par un champ électrique uniforme sur une distance de 1,6 cm. Quel est le module du champ ?

E29. (I) Un proton est projeté avec une vitesse initiale de 8×10^5 m/s selon une orientation opposée à un champ uniforme de module $2{,}4 \times 10^4$ N/C. (a) Quelle distance va-t-il parcourir avant de s'immobiliser ? (b) Combien de temps lui faut-il pour s'immobiliser ?

E30. MonLab (I) Un électron pénètre dans la région située entre deux plaques horizontales chargées uniformément, mais de signes opposés. Sa vitesse initiale, à mi-distance entre les plaques (figure 2.68), est de $2 \times 10^6\,\vec{\mathbf{i}}$ m/s. Les plaques ont une longueur de 4 cm et sont distantes de 1,6 cm. On considère que, dans toute la région entre les plaques, le champ électrique est uniforme et perpendiculaire aux plaques. (a) Quel est le module maximal que peut avoir le champ électrique vertical pour que l'électron ne touche aucune des plaques ? (b) À partir du résultat obtenu en (a), tracez le graphe de la trajectoire de l'électron pour x allant de 0 à 4 cm.



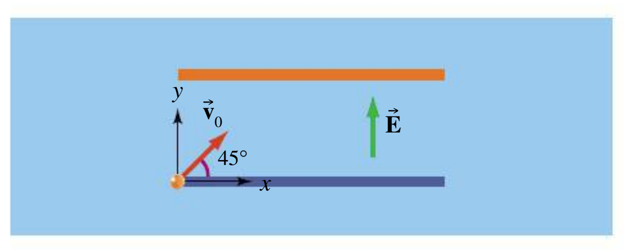
▲ **Figure 2.68**

Exercice 30.

E31. (I) Soumises à un champ électrique de module 3×10^6 N/C environ, les molécules d'air s'ionisent spontanément pour produire des étincelles. Dans un tel champ, déterminez : (a) le temps qu'il faut à un électron initialement au repos pour acquérir une énergie cinétique de 4×10^{-19} J, nécessaire pour provoquer son ionisation ; (b) la distance parcourue par l'électron durant ce délai.

E32. (II) Un positron est une particule de même masse que l'électron mais de charge $+e$. Soit un électron et un positron en orbite autour de leur centre de masse. Le rayon de l'orbite est égal à $0{,}5 \times 10^{-10}$ m. Trouvez : (a) le module de la vitesse de chaque particule ; (b) la période de rotation.

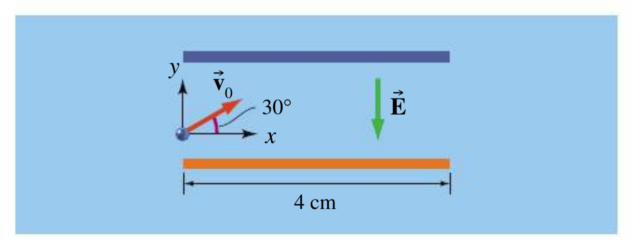
E33. MonLab (II) Un électron est projeté avec une vitesse initiale $\vec{\mathbf{v}}_0$ à 45° par rapport à l'horizontale à partir de la plaque inférieure du montage représenté à la figure 2.69. Les plaques sont très longues et séparées par une distance de 2 cm. On considère que, dans toute la région entre les plaques, le champ électrique est orienté vers le haut et que son module correspond à $E = 10^3$ N/C. (a) Quelle valeur doit prendre v_0 pour que l'électron effleure la plaque supérieure ? (b) Tracez, à partir du résultat obtenu en (a), le graphe de la trajectoire de l'électron entre les plaques.



▲ **Figure 2.69**

Exercice 33.

E34. (II) Un champ uniforme $\vec{\mathbf{E}} = -10^5\,\vec{\mathbf{j}}$ N/C règne entre deux plaques de longueur 4 cm (figure 2.70). Un proton est projeté à 30° par rapport à l'axe des x avec une vitesse initiale de 8×10^5 m/s. Trouvez : (a) sa coordonnée verticale à sa sortie de la région comprise entre les plaques, en supposant que l'origine de cet axe coïncide avec la position initiale du proton ; (b) l'angle décrivant l'orientation de sa vitesse à la sortie. (c) Tracez le graphe de la trajectoire du proton pour x allant de 0 à 4 cm.

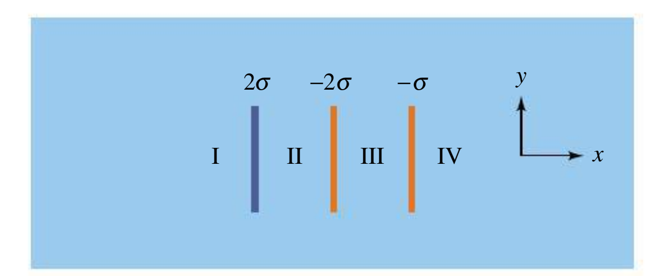


▲ **Figure 2.70**

Exercice 34.

2.5 Distributions de charges continues

E35. MonLab (I) De part et d'autre d'une plaque infinie sur laquelle on trouve une densité surfacique de charge σ uniforme, le module du champ électrique est donné par $E = |\sigma|/2\varepsilon_0$ ($\sigma > 0$). En vous servant de ce résultat et du principe de superposition, donnez l'expression du champ électrique résultant pour les quatre régions formées par l'agencement de trois plaques infinies parallèles décrit à la figure 2.71.



▲ **Figure 2.71**
Exercice 35.

E36. (I) Une grande plaque métallique non chargée est telle que son plan soit perpendiculaire aux lignes d'un champ uniforme de module 1000 N/C. Quelle est la densité surfacique de charge apparaissant sur chaque face de la plaque ?

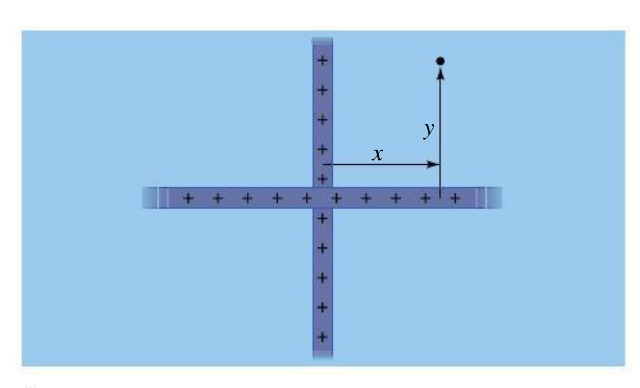
E37. (I) Une charge ponctuelle $q = 2$ μC est située à une distance $d = 20$ cm d'une plaque portant une charge uniforme de densité surfacique $\sigma = 20$ μC/m^2. (a) Quel est le module de la force électrique exercée sur la charge ponctuelle ? (b) En quel(s) point(s) le champ résultant est-il nul ?

E38. MonLab (II) Une mince tige, longue de 10 cm, possède une densité linéique de charge de 2 μC/m. Quel est le module du champ électrique créé par la tige le long de son axe (c'est-à-dire un axe parallèle et confondu avec la tige), à 20 cm de son centre ?

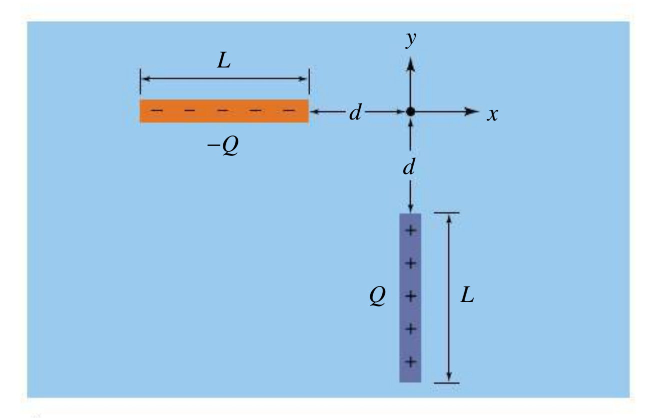
E39. (II) Soit un disque de rayon 4 cm possédant une densité surfacique de charge uniforme égale à 5 μC/m^2. Quel est le module du champ électrique en un point situé le long de son axe central à 10 cm du centre ?

E40. (II) Deux fils infinis ayant la même densité de charge linéique λ positive coïncident avec les axes des x et des y (figure 2.72). Quel est le champ électrique résultant en un point arbitraire (x, y) ?

E41. MonLab (II) Deux tiges minces de longueur finie L portent des charges uniformes et de signes opposés. Elles sont situées sur les axes des x et des y avec leurs extrémités à une distance d de l'origine, comme à la figure 2.73. Quel est le champ électrique résultant à l'origine ? On prendra $Q = 0{,}2$ μC, $L = 5$ cm et $d = 1$ cm.



▲ **Figure 2.72**
Exercice 40.



▲ **Figure 2.73**
Exercice 41.

2.6 Dipôles

E42. (I) Un dipôle de moment $p = 3{,}8 \times 10^{-30}$ C·m est placé dans un champ uniforme de module $E = 7 \times 10^4$ N/C. (a) Quel est le travail extérieur nécessaire pour faire tourner le dipôle de 60° à partir d'une position initiale parallèle au champ électrique ? (b) Lorsque le dipôle fait un angle de 60° avec le champ, quel est le module du moment de force exercé sur lui par ce champ ?

E43. MonLab (I) Un dipôle est formé de deux charges ±2 nC distantes de 4 cm. (a) Quel est le module du moment dipolaire électrique ? (b) Quelle est la variation d'énergie potentielle lorsque le dipôle pivote de 90° à partir d'une position initiale parallèle au champ $\vec{\mathbf{E}}$ dont le module est $E = 10^5$ N/C ?

E44. (II) La molécule d'eau a un moment dipolaire électrique de module $p = 6{,}2 \times 10^{-30}$ C·m. Trouvez le module de la force électrique engendrée par le dipôle sur le groupement $-NH_3^+$ d'un acide aminé, de charge $+e$, situé à une distance de 0,35 nm : (a) dans le cas où l'ion se trouve sur l'axe du dipôle ; (b) dans le cas où l'ion se trouve le long d'une droite perpendiculaire à l'axe du dipôle et passant par son centre. (Utilisez l'approximation du champ en un point éloigné ; considérez que les deux molécules sont séparées par du vide.)

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

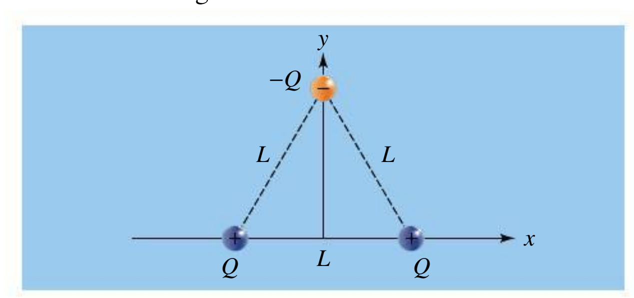
(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

2.1 Champ électrique

E45. (I) On représente la charge apparaissant dans un nuage par deux charges ponctuelles de 40 C et de −40 C, séparées par 3 km. (a) Trouvez le module du champ électrique résultant à mi-chemin entre les deux charges. (b) Quel serait le module de l'accélération subie par un électron placé en cet endroit ?

E46. (I) Une charge ponctuelle, Q_1 = 2,2 nC, est à l'origine. Une autre charge, Q_2 = −3,5 nC, se situe au point (4 m, 0). Trouvez le champ électrique résultant au point (a) (2 m, 0) ; (b) (0, 2 m).

E47. (II) Trois charges ponctuelles (Q, Q et $-Q$) forment un triangle équilatéral de côté L, décrit à la figure 2.74. Trouvez le champ électrique résultant au centre du triangle.



▲ **Figure 2.74**

Exercice 47.

E48. (II) Une petite sphère chargée, de masse 0,5 g, est suspendue à un fil. Lorsqu'un champ électrique uniforme et horizontal de 1,3 × 10^4 N/C agit sur la sphère, le fil forme un angle de 12° avec la verticale. Trouvez la charge présente sur la sphère.

E49. (I) Une charge ponctuelle Q = 0,20 nC est à l'origine. Une autre charge q est à x = 1 m, sur l'axe des x. Si le champ électrique résultant est nul à x = 2,5 m sur l'axe des x, trouvez q.

E50. (I) Une charge ponctuelle Q_1 = −3,0 nC est à l'origine. Une autre charge Q_2 = 5,0 nC se trouve à y = 1 m, sur l'axe des y. Trouvez le champ électrique résultant au point (2 m, 0).

E51. (I) Considérez à nouveau l'exercice E1 du chapitre 1. Répondez à la même question en calculant d'abord le champ à l'origine de chacune des forces demandées. Quel est ce champ ?

E52. (I) Considérez à nouveau l'exercice E3 du chapitre 1. Répondez à la même question en calculant d'abord le champ à l'origine de chacune des forces demandées. Quel est ce champ ?

E53. (I) Considérez à nouveau l'exercice E5 du chapitre 1. Répondez à la même question en trouvant plutôt l'endroit où le champ résultant produit par q_1 et q_2 est nul plutôt que celui où la force est nulle. Comparez votre réponse.

E54. (II) Considérez à nouveau l'exercice E10 du chapitre 1. Répondez à la même question (a) en calculant d'abord le champ à l'origine de la force demandée. Quel est ce champ ? Répondez aussi à la même question (b) en calculant plutôt l'endroit où doit être placée la charge de +2,5Q pour que le champ soit nul à la position où q est située. Comparez votre réponse.

2.4 Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrique uniforme

E55. (I) Un proton, initialement au repos, est soumis à un champ électrique uniforme, ce qui le fait se déplacer de 20 cm en 0,65 μs. (a) Trouvez le module du champ électrique. (b) Quel délai lui serait nécessaire pour atteindre une vitesse de 3,0 × 10^6 m/s à partir du repos ?

2.5 Distributions de charges continues

E56. (II) Un fil rectiligne de 2 m de long est situé sur l'axe des x, entre x = 1 m et x = 3 m. Sa densité linéique de charge est donnée par la fonction $\lambda = 2 \times 10^{-6}/x$, où x est en mètres et λ en coulombs par mètre. Quelle est la charge totale du fil ?

E57. (II) Un fil rectiligne de 3 m de long est situé sur l'axe des x, entre x = 2 m et x = 5 m. Sa densité de charge est donnée par la fonction $\lambda = 2 \times 10^{-6}\, x$, où x est en mètres et λ en coulombs par mètre. (a) Quelle est la charge totale du fil ? (b) Calculez le champ électrique au point x = 0.

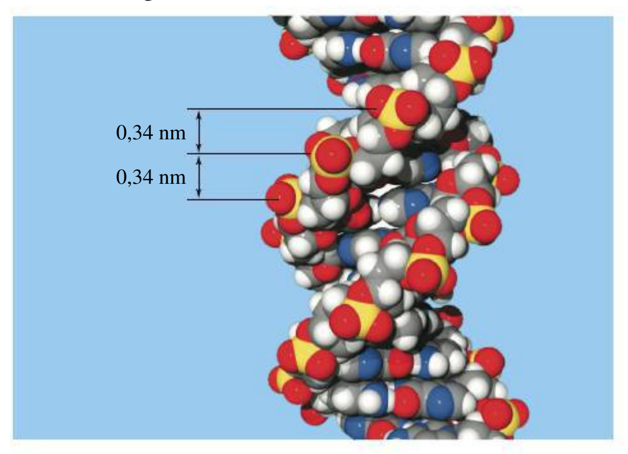
E58. (II) Un fil rectiligne de 4 m de long est situé sur l'axe des x, entre x = 1 et x = 5 m. Il est uniformément chargé à une densité linéique λ = 4 μC/m. Calculez le champ électrique aux points (x, y) suivants : (a) (–1 m, 0) ; (b) (0, 2 m) ; (c) (2 m, 2 m).

E59. (II) (a) Soit un disque uniformément chargé de 1 m de rayon, dont la charge est de 100 μC. Calculez le module du champ électrique sur l'axe du disque à une distance de 20 m du centre du disque. (b) Calculez le module de champ électrique à 20 m d'une charge ponctuelle de 100 μC. (c) Quel est le pourcentage d'écart entre les réponses obtenues en (a) et en (b) ? Pourquoi les résultats sont-ils si proches ?

E60. (I) Une membrane cellulaire a une épaisseur de 4,5 nm et on y mesure un champ électrique de 1,4 × 10^7 N/C, orienté perpendiculairement au plan de la membrane. (a) Si le matériau de la membrane a une constante diélectrique moyenne κ = 5, calculez la densité de charge, accumulée de part et d'autre de la membrane, qui produit ce

champ. Estimez que la membrane est homogène. (b) Quelle force électrique subit un ion Na^+ quand la cellule le force à traverser la membrane en sens contraire du champ ?

E61. (I) Dans les conditions physiologiques, les groupements phosphate de l'ADN sont ionisés, ce qui favorise sa solubilité. Dans la forme normale à double hélice (figure 2.75), chacun des deux brins d'un fragment rectiligne d'ADN porte des groupements phosphate à tous les 0,34 nm (en orange sur la figure). (a) Quel est le module du champ électrique produit à une distance r dans l'eau ($\kappa = 80$) par un long fragment rectiligne d'ADN ? (b) Quel est le module de la force que subirait un ion Cl^- s'il se trouvait à 10 nm d'un tel fragment ?

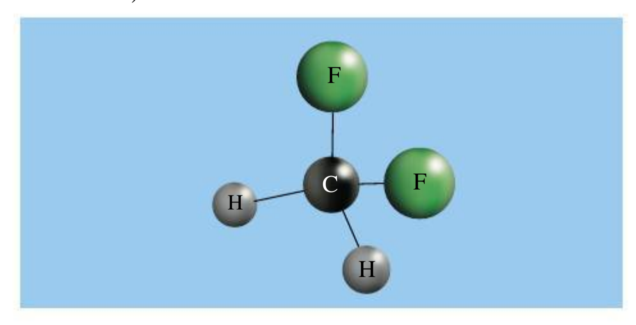


▲ **Figure 2.75**

Exercice 61.

2.6 Dipôles

E62. (I) Le méthane, CH_4, a une forme tétrahédrique. Dans les laboratoires où on synthétise des composés organiques, on rencontre souvent ses dérivés fluorés comme CH_2F_2 (figure 2.76). En prenant 5×10^{-30} C·m pour le moment dipolaire électrique du lien C–F et en considérant que celui du lien C–H est négligeable, calculez le module du moment dipolaire de (a) CHF_3 ; (b) CH_2F_2. (*Indice* : Utilisez d'abord le fait que CF_4 est non polaire pour déterminer l'angle entre les liens et estimez que cet angle est le même dans chaque molécule.)



▲ **Figure 2.76**

Exercice 62.

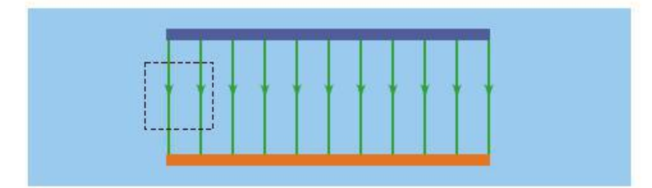
E63. (I) Une protéine transmembranaire donnée comporte six hélices α (voir le sujet connexe de la section 1.5), dont chacune comporte 12 acides aminés. (a) Si les liaisons N–H et C=O, supposées parallèles à l'axe de l'hélice, ont respectivement des dipôles électriques de modules a et b, quel est le module du dipôle électrique résultant de chaque hélice α ? (b) Le dipôle de trois des six hélices α est inversé par rapport à celui des trois autres hélices α. Décrivez comment elles interagissent entre elles en raison de leurs dipôles.

E64. (II) Une protéine en solution dans l'eau ($\kappa = 80$) porte une charge $q = e$. (a) Avec quelle force électrique attire-t-elle une molécule dipolaire ($p = 1{,}2 \times 10^{-29}$ C·m) située à 5 nm ? (b) Calculez la force réciproque ; respecte-t-elle la troisième loi de Newton ?

PROBLÈMES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

P1. (I) Utilisez le fait que la force électrique est conservative pour montrer que les lignes de champ aux extrémités de deux plaques de charges opposées ne peuvent pas cesser brusquement comme sur la figure 2.77. Dessinez les lignes de champ correctement. (*Indice* : Une force est conservative si le travail effectué le long d'un parcours fermé, comme celui qui est décrit en pointillé à la figure 2.77, est nul : $\oint \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\ell} = 0$.)



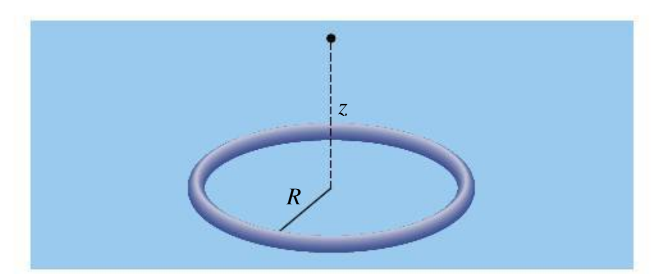
▲ **Figure 2.77**

Problème 1.

P2. (I) Un anneau circulaire de rayon R porte une charge de densité linéique λ (figure 2.78). (a) Trouvez l'expression du module du champ électrique le long de l'axe de l'anneau, à une distance z du centre. (b) Pour quelle valeur de z le module du champ est-il maximal ? (c) Que devient le module du champ pour $z \gg R$? Vérifiez que votre fonction satisfait à ce critère. (d) Pour $R = 1$ m et $\lambda = 1$ μC/m, tracez le graphe de $E(z)$ pour z allant de 0 à 4 m.

P3. (I) Un dipôle de moment dipolaire $\vec{\mathbf{p}}$ est parallèle à l'axe des x ($\vec{\mathbf{p}} = p\vec{\mathbf{i}}$) dans un champ électrique non uniforme $\vec{\mathbf{E}} = (C/x)\vec{\mathbf{i}}$, où x est en mètres et $\vec{\mathbf{E}}$ en newtons par coulomb. Quelle est la force exercée sur le dipôle ?

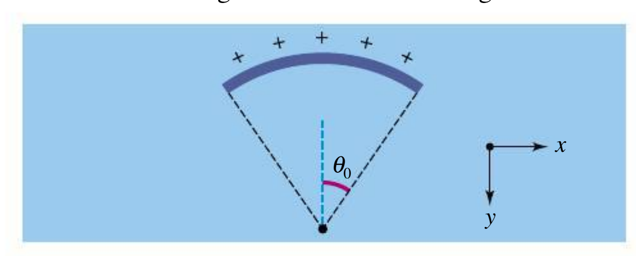
P4. (I) Une tige portant une densité de charge linéique positive λ a la forme d'un arc de cercle de rayon R



▲ Figure 2.78

Problème 2.

(figure 2.79). (a) Si l'arc de cercle s'étend de $-\theta_0$ à θ_0, exprimez le champ électrique au centre du cercle. (b) Montrez que le module du champ au centre d'un demi-cercle chargé uniformément est égal à $2k\lambda/R$.



▲ Figure 2.79

Problème 4.

P5. (I) Soit une charge ponctuelle positive Q_1 en $(-a, 0)$ et une charge Q_2 en $(a, 0)$. Représentez qualitativement la valeur de la composante du champ électrique résultant sur l'axe des x, sachant que: (a) $Q_1 = Q_2$; (b) $Q_1 = -Q_2$.

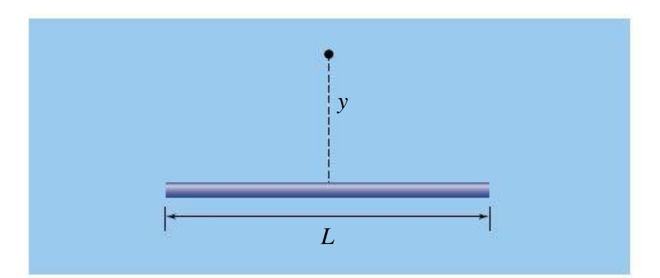
P6. (II) La forme en $1/r^2$ de la loi de Coulomb a les implications suivantes: (i) Le champ électrique est nul en tout point situé à l'intérieur d'une cavité uniformément chargée. (ii) On peut déterminer le champ électrique à l'extérieur d'une sphère uniformément chargée en supposant la charge concentrée au centre de la sphère. À l'aide de ces deux énoncés, montrez que, à l'intérieur d'une sphère uniformément chargée de rayon R et de densité volumique de charge ρ, le champ augmente linéairement avec la distance r à partir du centre, c'est-à-dire que $E \propto r$ pour $r < R$.

P7. (II) (a) Montrez que le module du champ électrique à une distance y sur la médiatrice d'une tige uniformément chargée de longueur L et de charge totale positive Q (figure 2.80) est donné par

$$E = \frac{2kQ}{y(L^2 + 4y^2)^{1/2}}$$

(b) Quelle forme prend cette expression quand $y \gg L$? (c) Quelle forme prend-elle quand $y \ll L$?

P8. (I) À l'aide des résultats obtenus à l'exemple 2.7, montrez qu'à la sortie des plaques on peut considérer que les électrons ont parcouru une ligne droite commençant au milieu des plaques.



▲ Figure 2.80

Problèmes 7 et 23.

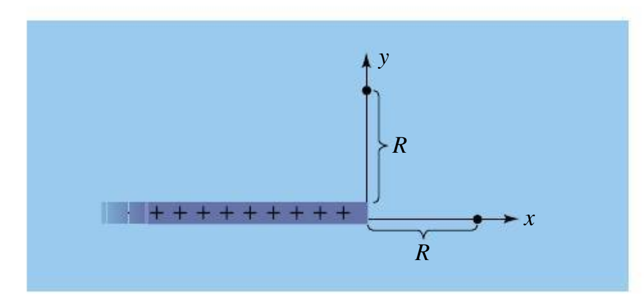
P9. (II) Utilisez le résultat $E = 2k|\lambda|/r$ donnant le module du champ électrique d'un fil infini chargé uniformément pour obtenir le résultat $E = |\sigma|/2\varepsilon_0$ donnant le module du champ créé par un plan infini portant une charge de densité surfacique σ. (Consultez la table des intégrales à l'annexe C.)

P10. (II) Une charge $-q$ gravite sur une orbite circulaire de rayon R autour d'un fil infini de densité linéique de charge λ. Le plan de l'orbite est perpendiculaire au fil. Donnez l'expression de la période. (On donne $q > 0$, $\lambda > 0$.)

P11. (II) Un dipôle de moment dipolaire $\vec{\mathbf{p}}$ peut pivoter librement autour de son centre. Il est placé dans un champ électrique uniforme de module E. Si son moment d'inertie par rapport au centre est I, montrez que, pour de petits déplacements angulaires, le dipôle oscille à la fréquence

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{pE}{I}}$$

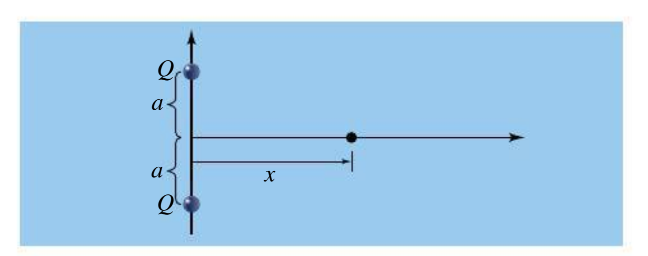
P12. (II) Un fil de densité linéique de charge λ positive s'étend de l'origine à $x \to -\infty$ (figure 2.81). Trouvez le champ électrique créé à une distance R de son extrémité: (a) sur l'axe des x; (b) sur l'axe des y.



▲ Figure 2.81

Problème 12.

P13. (I) Soit deux charges positives identiques disposées sur l'axe des y comme le montre la figure 2.82. (a) Trouvez le champ créé au point $(x, 0)$. (b) Quelle est la forme de $E(x)$ pour $x \gg a$? (c) En quel point $E(x)$ est-il maximal ? (d) Fixez une valeur raisonnable à Q et à a, et tracez le graphe du module du champ électrique résultant le long de l'axe x pour x allant de 0 à $3a$.



▲ **Figure 2.82**

Problème 13.

P14. (II) Le module du champ électrique créé sur l'axe et à une distance x du centre d'un anneau circulaire de rayon R et de charge totale Q positive est donné par

$$E(x) = \frac{kQx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

(a) Que devient cette expression lorsque $x \ll R$? (b) Montrez qu'une charge négative $-q$ serait animée d'un mouvement harmonique simple si on lui faisait subir de petits déplacements sur l'axe à partir du centre. (c) Montrez que la fréquence angulaire de l'oscillation est

$$\omega = \sqrt{\frac{kqQ}{mR^3}}$$

P15. (II) Dans l'expérience de la goutte d'huile de Millikan, on maintient d'abord les gouttes immobiles au moyen d'un champ uniforme de module E. Ensuite, on supprime le champ et on laisse les gouttes tomber dans l'air jusqu'à ce qu'elles atteignent une vitesse limite de module v_L. La résistance du fluide est donnée par la loi de Stokes, $F = 6\pi\eta r v_L$, où η est le coefficient de viscosité et r le rayon. La condition pour qu'une goutte tombe à la vitesse limite s'écrit

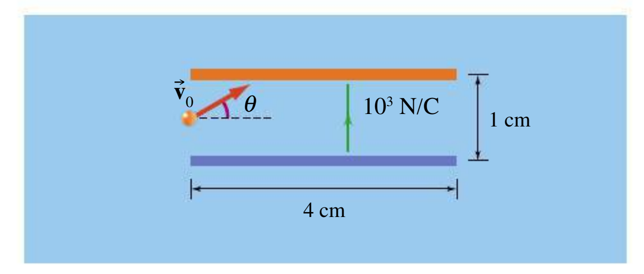
$$6\pi\eta r v_L = m_{eff}\, g$$

On donne ici la masse effective de la goutte, soit $m_{eff} = \frac{4}{3}\pi r^3(\rho - \rho_A)$, où ρ est la masse volumique de la goutte et ρ_A la masse volumique de l'air, qui exerce une poussée d'Archimède. Montrez que la grandeur de la charge portée par la goutte est

$$q = \frac{18\pi}{E}\sqrt{\frac{\eta^3 v_L^3}{2(\rho - \rho_A)g}}$$

P16. (II) Un électron est projeté selon un angle $\theta = 30°$ par rapport à l'horizontale à partir du point situé à mi-chemin de deux plaques horizontales de 4 cm de longueur et distantes de 1 cm (figure 2.83). Un champ uniforme orienté vers le haut, de module 10^3 N/C, règne entre les plaques. Trouvez les valeurs minimale et maximale du module de la vitesse initiale v_0 de l'électron pour qu'il ne frappe aucune des plaques.

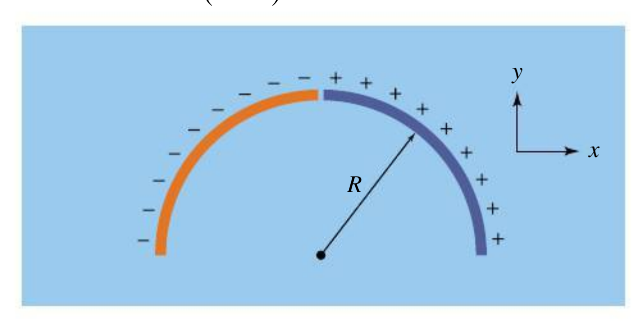
P17. (I) Un électron est projeté à une vitesse initiale de module $v_0 = 3 \times 10^6$ m/s à partir du point situé à mi-chemin de deux plaques horizontales de longueur 4 cm et distantes de 1 cm (figure 2.83). Pour quelle valeur initiale de l'angle l'électron se trouve-t-il à mi-distance des plaques lorsqu'il sort de la région comprise entre les plaques ?



▲ **Figure 2.83**

Problèmes 16 et 17.

P18. (I) Deux tiges uniformément chargées, de densités linéiques $+\lambda$ et $-\lambda$, sont recourbées en forme d'arcs de cercle. On fait coïncider leurs extrémités de manière à former un demi-cercle de rayon R (figure 2.84). Quel est le champ électrique résultant créé au centre du demi-cercle ($\lambda > 0$) ?



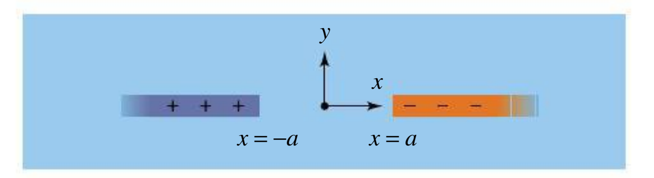
▲ **Figure 2.84**

Problème 18.

PROBLÈMES SUPPLÉMENTAIRES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

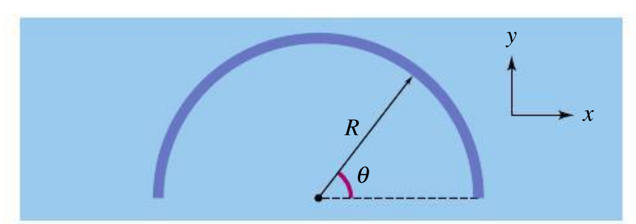
P19. (I) Deux fils semi-infinis ont une densité linéique de charge uniforme $+\lambda$ et $-\lambda$. Ces deux fils sont parallèles à l'axe des x. Chacun se termine en $x = -a$ ou $x = a$, comme dans la figure 2.85. Calculez le champ électrique à l'origine.



▲ **Figure 2.85**

Problème 19.

P20. (I) Un fil chargé a la forme d'un demi-cercle, comme dans la figure 2.86. Sa densité linéique de charge varie comme $\lambda(\theta) = \lambda_0 \sin \theta$. Calculez le champ électrique à l'origine.



▲ **Figure 2.86**
Problème 20.

P21. (II) Reprenez la partie (a) du problème P2 en supposant qu'une moitié seulement de l'anneau est chargée. Considérez que l'anneau est dans le plan xy et que son centre constitue l'origine d'un système d'axes. L'axe des x coupe l'anneau en deux et la portion chargée s'étend dans la région du plan pour laquelle $y > 0$. Donnez une réponse vectorielle.

P22. (II) Reprenez la partie (a) du problème P4 en supposant que la densité linéique de charge λ varie comme (a) $\lambda = \lambda_0 \cos \theta$; (b) $\lambda = \lambda_0 \sin \theta$.

P23. (II) Soit une tige de longueur L possédant une densité linéique de charge λ comme celle de la figure 2.80 (p. 86). Trouvez l'expression du champ électrique à une distance perpendiculaire y du centre de la tige, mais en considérant que la densité linéique de charge varie comme (a) $\lambda = A|x|$; (b) $\lambda = Ax$. (On suppose que l'axe des x a pour origine le centre de la tige.)

P24. (II) Une charge électrique $q_1 = -3\ \mu$C est à (–1 m, 0) et une autre, $q_2 = 1\ \mu$C, est à (1 m, 0). Utilisez le résultat de l'exercice E13 pour obtenir l'expression exacte du champ électrique résultant de ces deux charges dans le plan xy. Tracez le graphe de ce champ de vecteurs pour la région du plan xy définie par -2 m $< x < 2$ m et -2 m $< y < 2$ m. Comment ce graphe se compare-t-il avec le résultat de l'exercice E22 ?

P25. (II) Dans le problème P5, supposez que $a = 1$ m et que $Q_2 = 1\ \mu$C. Pour (a) $Q_1 = Q_2$ et (b) $Q_1 = -Q_2$, tracez le graphe de $E_x(x)$ pour $y = 0$, sur l'intervalle -2 m $< x < 2$ m.

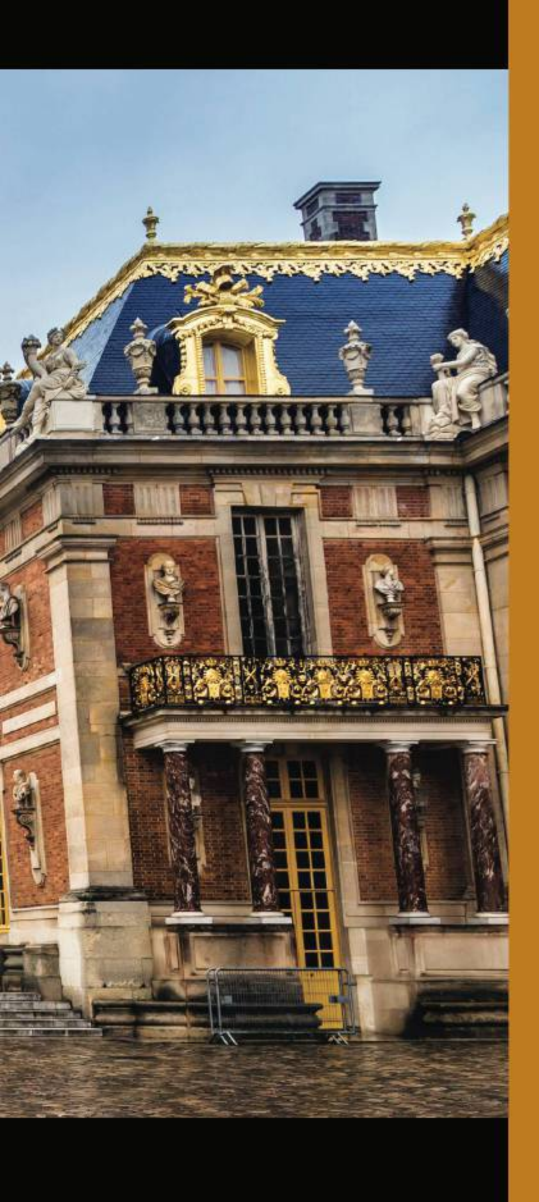


CHAPITRE 3

LE THÉORÈME DE GAUSS



SOMMAIRE



Cette façade est symétrique sous réflexion : en inversant (en réfléchissant) ses deux moitiés, elle demeure identique. Certains objets chargés peuvent eux aussi être symétriques sous réflexion, mais aussi sous rotation ou sous translation. Dans ce chapitre, nous verrons que le champ produit par un objet chargé doit forcément avoir la même symétrie que la distribution de charge portée par l'objet lui-même. Dans ces situations où la symétrie nous renseigne déjà sur le champ, il est plus facile de calculer celui-ci en utilisant une équation fondée sur le comportement des lignes de champ, le théorème de Gauss.

En principe, le champ électrique produit par toute distribution continue de charge peut être déterminé à l'aide d'une méthode fondée sur une seule équation, tirée de la loi de Coulomb, $E = k|Q|/r^2$. Pour ce faire, on décompose la distribution en un nombre infini de charges infinitésimales, on détermine la contribution de chacune au champ électrique et on effectue l'intégrale (la somme) de toutes les contributions pour calculer le champ total (voir la section 2.5). Toutefois, cette approche peut devenir fort complexe. Dans ce chapitre, nous allons présenter le *théorème de Gauss*, qui est une autre équation qui décrit le comportement du champ. Ce théorème est tout aussi général que la loi de Coulomb et l'équation $E = k|Q|/r^2$ qui en découle*. Dans les cas spécifiques où les charges sont distribuées d'une façon suffisamment symétrique, ce nouveau théorème, combiné aux informations déduites par symétrie, permettra de calculer bien plus facilement le champ électrique. En somme, le théorème de Gauss sera le

* En fait, nous verrons au chapitre 13 qu'il est encore plus général, car il s'applique aussi à des champs qui varient dans le temps, ce qui n'est pas le cas de la loi de Coulomb. C'est d'ailleurs cette limite de la loi de Coulomb qui a rendu nécessaire l'invention du concept de champ (voir la section 2.1).



▲ **Figure 3.1**
Carl F. Gauss (1777-1855).

fondement d'une approche équivalente à celle fondée sur la loi de Coulomb, mais qui lui est entièrement indépendante.

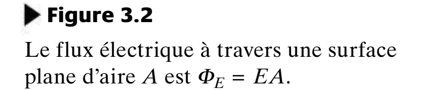
Cette nouvelle approche s'appuie sur le comportement des lignes de champ. Michael Faraday, qui avait conçu ces lignes pour représenter le champ, n'avait pas exprimé cette idée sous forme mathématique. Le mathématicien Carl Freidrich Gauss (figure 3.1), par contre, formula des idées équivalentes sous une forme quantitative. Partant de l'image des lignes de champ qui semblent « s'écouler » à travers une surface, Gauss eut l'idée d'introduire une grandeur appelée *flux*, qui est proportionnelle au nombre de lignes de champ qui traversent une surface. À l'aide de cette notion, il montra que le flux traversant une surface fermée sur elle-même, quelle que soit la forme de cette surface, ne dépend que de la charge totale située à l'intérieur de la surface. C'est cette simple idée qui est exprimée quantitativement par le théorème de Gauss. Cette équation reflète donc les propriétés *générales* des champs électriques, bien qu'elle ne soit utile pour déterminer le champ que dans les cas symétriques. Après avoir démontré le théorème de Gauss (section 3.2), nous développerons donc la notion de *symétrie* (section 3.3) avant d'envisager des applications (section 3.4).

3.1 LE FLUX ÉLECTRIQUE

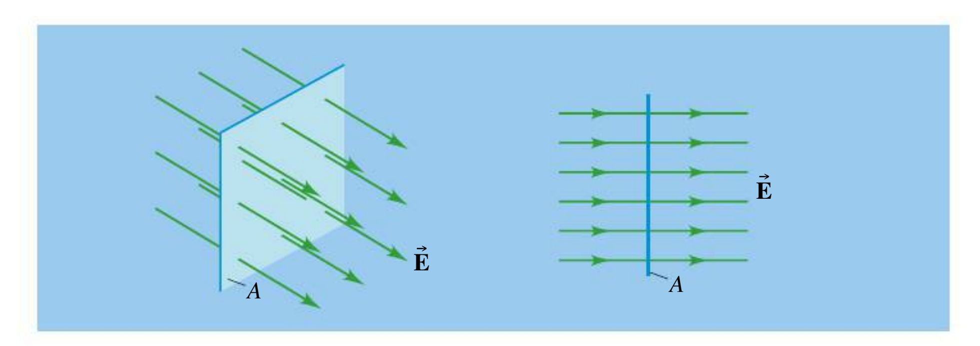
La figure 3.2 représente une surface plane d'aire A, perpendiculaire aux lignes d'un champ électrique uniforme. (Il s'agit d'une surface au sens mathématique, donc imaginaire, et non d'une surface matérielle.) Par définition, le **flux électrique** Φ_E qui traverse cette surface est

$$\Phi_E = EA$$

L'unité SI de flux électrique est le newton-mètre carré par coulomb (N·m²/C)*. Bien que la définition du flux ne fasse pas intervenir explicitement les lignes de champ, *le flux électrique à travers une surface donnée est proportionnel au nombre de lignes de champ passant par cette surface*. C'est de là que le flux tire son nom : si on fait une analogie entre les lignes de champ qui traversent la surface et les lignes de courant d'un fluide qui s'écoulerait au travers la même surface, le flux correspondrait au débit du fluide. Bien sûr, ce n'est qu'une analogie : le champ électrique est statique.



▶ **Figure 3.2**
Le flux électrique à travers une surface plane d'aire A est $\Phi_E = EA$.



Si la surface est inclinée et fait un certain angle avec le champ, comme à la figure 3.3, le nombre de lignes interceptées dépend de A_n, la projection de la surface sur un plan normal aux lignes. Il est équivalent de dire que le flux dépend de la composante de $\vec{E}$ normale à la surface :

$$\Phi_E = EA_n = E_nA$$

* Si on utilise le volt (V), qui sera défini au chapitre 4, l'unité du flux devient le volt-mètre (V·m).

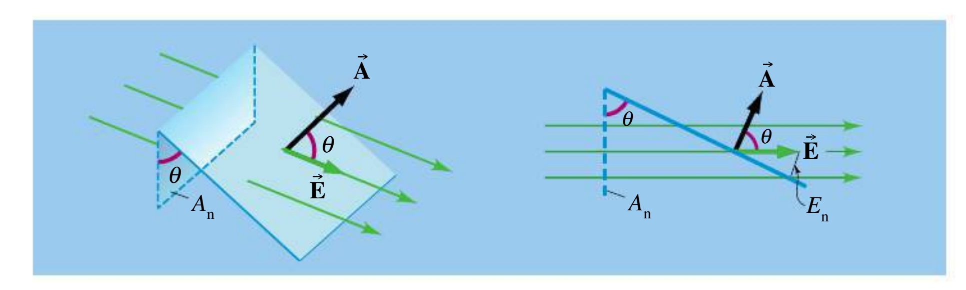


Figure 3.3

Si la surface est inclinée par rapport au champ, le flux électrique est $\Phi_E = EA \cos \theta$.

L'orientation de la surface peut être spécifiée par un vecteur $\vec{\mathbf{A}}$, de module égal à A et de direction perpendiculaire au plan de la surface. Le sens de $\vec{\mathbf{A}}$ reste néanmoins ambigu : choisissons-le pour l'instant tel que Φ_E soit positif. Les deux expressions présentées ci-dessus donnent alors

$$\Phi_E = EA \cos \theta$$

θ étant l'angle entre $\vec{\mathbf{A}}$ et $\vec{\mathbf{E}}$. On reconnaît là l'expression du produit scalaire (voir le chapitre 2 du tome 1) et on peut donc dire que le flux associé à un champ électrique uniforme s'écrit

Flux électrique dans un champ uniforme

$$\Phi_E = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{A}} \tag{3.1}$$

L'équation 3.1 doit être modifiée si le champ n'est pas uniforme ou si la surface n'est pas plane. Dans ce cas, on divise la surface en petits éléments $\Delta\vec{\mathbf{A}}$ pouvant être considérés comme plans (figure 3.4). Même si le champ n'est pas uniforme, il ne varie pas sensiblement sur chaque élément d'aire. Le flux total à travers la surface est approximativement égal à la somme

$$\Phi_E \approx \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}}_2 + \ldots = \sum \vec{\mathbf{E}}_i \cdot \Delta\vec{\mathbf{A}}_i$$

À la limite, quand $\Delta\vec{\mathbf{A}} \to 0$, cette somme, discrète et de valeur approchée, devient une intégrale continue et de valeur exacte. On peut donc écrire la définition générale du flux électrique ainsi :

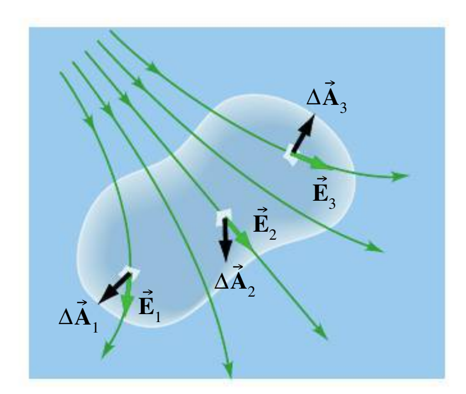


Figure 3.4

Si la surface n'est pas plane ou si le champ n'est pas uniforme, il faut diviser cette surface en éléments de surface infinitésimaux et additionner les contributions au flux provenant de chacun de ces éléments. Comme chacun de ces éléments est suffisamment petit pour être considéré comme plan et pour que le champ puisse être considéré comme constant sur sa surface, on calcule le petit flux qui le traverse de la même façon que pour une surface plane dans un champ uniforme (équation 3.1).

Définition générale du flux électrique

$$\Phi_E = \int \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \tag{3.2}$$

Le membre de droite de l'équation 3.2 est une intégrale de surface qui peut être assez difficile à calculer pour une surface ou un champ quelconques. En revanche, cette intégrale est souvent très facile à calculer *sur une surface qui possède les mêmes propriétés de symétrie que celles que possèdent la distribution de charge et le champ* (voir l'exemple 3.2 et la section 3.3). En somme, dans une situation peu symétrique, le flux est très difficile à calculer, et dans une situation très symétrique, il ne peut être calculé facilement qu'au travers d'une surface qui a été judicieusement choisie. Heureusement, le théorème de Gauss que nous démontrerons à la section suivante permet cette latitude : nous aurons effectivement la liberté de *choisir* la forme de la surface sur laquelle le flux est calculé.

L'équation 3.2 peut être formulée en deux étapes, ce qui reflète la notation que nous avons utilisée dans le chapitre précédent. On commence par calculer le

flux infinitésimal traversant un *quelconque* élément de surface $\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$. Selon l'équation 3.1, ce flux est donné par

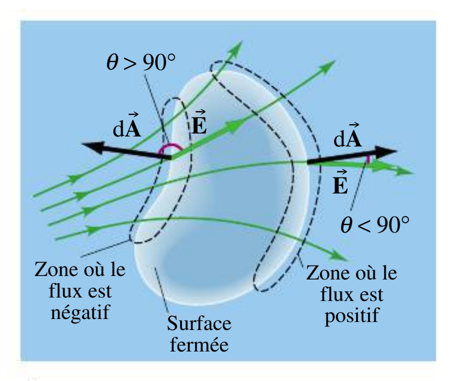
$$\mathrm{d}\Phi_E = \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = E\,\mathrm{d}A \cos\theta$$

Ensuite, on additionne (intègre) ces flux infinitésimaux pour obtenir le flux total :

$$\Phi_E = \int \mathrm{d}\Phi_E$$

La combinaison de ces deux étapes équivaut à l'équation 3.2.

La figure 3.5 représente des lignes de champ passant à travers une surface *fermée* imaginaire. Dans ce cas, on peut lever l'ambiguïté au sujet du sens du vecteur $\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$:



▲ **Figure 3.5**

Le flux sortant d'une surface fermée est positif, alors que le flux entrant dans une surface fermée est négatif.

Orientation du vecteur $\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$

Par définition, le vecteur $\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$ est, en un point donné d'une surface fermée, orienté selon la direction de la normale *sortant* de la surface.

Il s'ensuit, en raison du signe de cos θ dans $\mathrm{d}\Phi_E = E\,\mathrm{d}A \cos\theta$, que le flux sortant d'une surface fermée est positif, alors que le flux entrant est négatif. À la figure 3.5, le flux total à travers la surface est nul puisque le nombre de lignes de champ qui entrent est égal au nombre de lignes qui sortent de la surface.

Quand on calcule le flux traversant une surface fermée, on l'indique en ajoutant un cercle sur le symbole de l'intégration. L'équation 3.2 s'écrit donc alors

$$\Phi_E = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$$

Exemple 3.1

Le plan d'un disque de rayon 8 cm est incliné de 40° par rapport à un champ électrique uniforme de 600 N/C. Quel est le flux à travers le disque ?

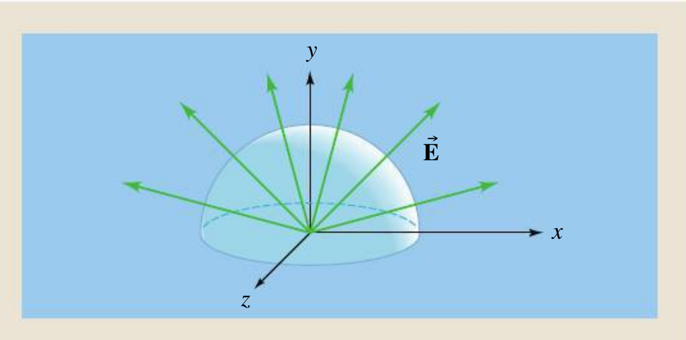
Solution

Le vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ représentant l'aire du disque, dont la direction est normale au plan du disque, fait un angle de 50° avec le champ (la surface étant ouverte, on a pris le sens de $\vec{\mathbf{A}}$ de façon à ce que le flux soit positif). L'aire est égale à $A = \pi r^2 = 0{,}02\ \mathrm{m}^2$. Le flux est donc

$$\begin{aligned}\Phi_E &= EA \cos 50° \\ &= (600\ \mathrm{N/C})(0{,}02\ \mathrm{m}^2)(0{,}643) = 7{,}71\ \mathrm{N{\cdot}m^2/C}\end{aligned}$$

Exemple 3.2

Soit un champ non uniforme dont le module en chaque point d'une petite région de l'espace est donné par $E = A/r^2$, où A est une constante et r la distance par rapport à l'origine du système d'axes, mesurée en mètres. En chaque point, le champ est dirigé dans la direction diamétralement opposée à l'origine. (a) Obtenir le flux qui traverse une surface en forme de demi-sphère de rayon a, centrée sur l'origine du système d'axes (figure 3.6). (b) Que vaut ce flux pour $A = 100\ \mathrm{N{\cdot}m^2/C}$ et $a = 5$ cm ?



▲ **Figure 3.6**

Quel est le flux qui traverse la surface en forme de demi-sphère ?

Solution

(a) Le champ est orienté radialement et son module ne dépend que de la distance r mesurée par rapport au centre : $E = E(r)$. Il est donc très symétrique. (En effet, il demeure le même sous réflexion et sous rotation, comme nous le verrons à la section 3.3.)

Tous les points de la surface d'intégration sont situés à la même distance r du centre ($= a$), puisque cette surface est une demi-sphère. Il s'ensuit que le champ en chacun de ces points a le même module $E(r = a)$, que nous noterons E_a, et qu'il est localement perpendiculaire à la surface. C'est l'avantage d'utiliser une surface d'intégration qui a la même symétrie que le champ. ■

Pour calculer le flux, on subdivise la surface d'intégration en éléments $\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$. Considérons un quelconque élément de surface : le champ de module E_a qui le traverse étant orienté perpendiculairement à la surface, il est parallèle au vecteur $\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$. Donc,

$$\mathrm{d}\Phi_E = E\,\mathrm{d}A\cos\theta = E_a\,\mathrm{d}A\cos 0 = E_a\,\mathrm{d}A$$

La somme de ces contributions est

$$\Phi_E = \int \mathrm{d}\Phi_E = \int E_a\,\mathrm{d}A$$

Or, comme le champ a le même module pour tous les éléments de surface, on peut faire sortir E_a devant l'intégrale. (Cela équivaut à dire que le facteur E_a revient dans chaque « terme » de la « somme » que constitue cette intégrale et peut donc être mis en évidence.) On peut donc écrire

$$\Phi_E = E_a\int \mathrm{d}A = E_a\left(\frac{4\pi a^2}{2}\right) = \frac{A}{a^2}\left(\frac{4\pi a^2}{2}\right) = 2\pi A$$

où nous avons substitué $E_a = A/a^2$ et utilisé le fait que la somme $\int \mathrm{d}A$ des éléments de surface est tout simplement la surface totale de la demi-sphère. Notons que le résultat final ne dépend pas de a.

(b) Le flux qui traverse chaque élément de surface est alors $\mathrm{d}\Phi = (A/a^2)\mathrm{d}A = (100/0{,}05^2)\mathrm{d}A = 40\,000\ \mathrm{d}A$ et l'intégrale donne $40\,000\int \mathrm{d}A = 40\,000(4\pi 0{,}05^2/2) = 200\pi = 628\ \mathrm{N{\cdot}m^2/C}$. Cela aurait évidemment pu être obtenu par substitution directe dans le résultat obtenu en (a).

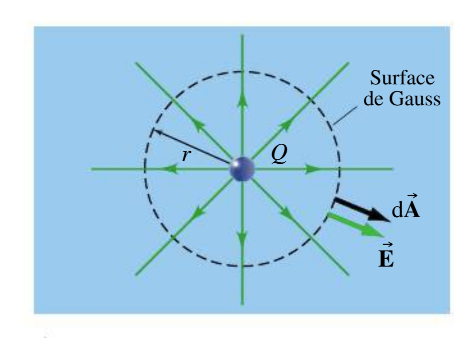
Dans le dernier exemple, nous n'avons substitué la valeur de E_a qu'à la toute fin. Cela montre que la symétrie permet d'exprimer le flux explicitement en fonction du champ, *même si celui-ci est inconnu* : il suffit de savoir que son module est le même en chaque point de la surface d'intégration pour pouvoir le faire sortir devant l'intégrale. À la section 3.4, nous devrons souvent intégrer d'une façon semblable, sans connaître le module du champ.

3.2 LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE GAUSS

Dans l'introduction du chapitre, nous avons dit que le flux qui traverse toute surface imaginaire fermée (qu'on appellera *surface de Gauss*) ne dépend que de la charge totale ΣQ enfermée par la surface. Nous allons maintenant démontrer l'équation qui exprime Φ_E en fonction de ΣQ, c'est-à-dire le théorème de Gauss. Pour *démontrer* ce théorème, nous aurons besoin de la loi de Coulomb et du principe de superposition*.

Dans un premier temps, calculons le flux quand la charge totale contenue par la surface est une unique charge ponctuelle positive Q (figure 3.7). La symétrie sphérique de la configuration (voir la section suivante) permet de déduire que le champ électrique a le même module E en tout point d'une surface de Gauss en forme de sphère de rayon r centrée sur la charge. Elle permet aussi de déduire que tout vecteur $\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$ (perpendiculaire au plan de l'élément d'aire qu'il représente) est parallèle au champ local. Ainsi, le flux infinitésimal traversant un quelconque de ces éléments d'aire est $\mathrm{d}\Phi = \vec{\mathbf{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = E\,\mathrm{d}A\cos(0°) = E\,\mathrm{d}A$. Le flux total à travers la surface de Gauss fermée est

$$\Phi_E = \int E\,\mathrm{d}A = E\int \mathrm{d}A = E(4\pi r^2)$$



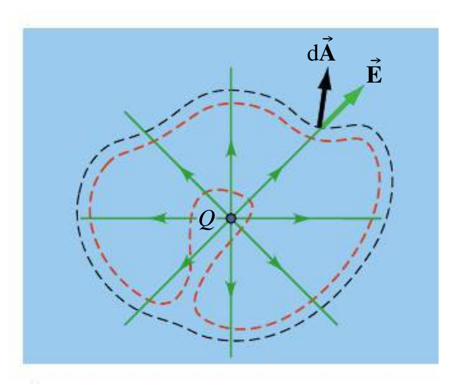
▲ **Figure 3.7**

Surface de Gauss sphérique centrée sur une charge ponctuelle.

* À l'inverse, si on prenait le théorème de Gauss comme hypothèse, on pourrait s'en servir pour démontrer la loi de Coulomb. Cela montre bien que les approches fondées sur ces équations sont équivalentes, comme nous l'avons dit dans l'introduction du chapitre.

On peut sortir E de l'intégrale parce que le module E du champ est le même en chaque point de la surface. L'intégrale se réduit donc à la somme des éléments d'aire, qui est tout simplement l'aire de la sphère, $4\pi r^2$. D'après la loi de Coulomb, on sait que le module du champ en chacun des points de la surface de Gauss sphérique est $E = kQ/r^2$, où r est le rayon de la surface ; on en déduit $\Phi_E = 4\pi kQ$. En remplaçant k par sa valeur $1/4\pi\varepsilon_0$ (voir la section 1.5), on élimine le facteur 4π et le flux total s'écrit alors sous la forme

(Q à l'intérieur) $$\Phi_E = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \text{(i)}$$



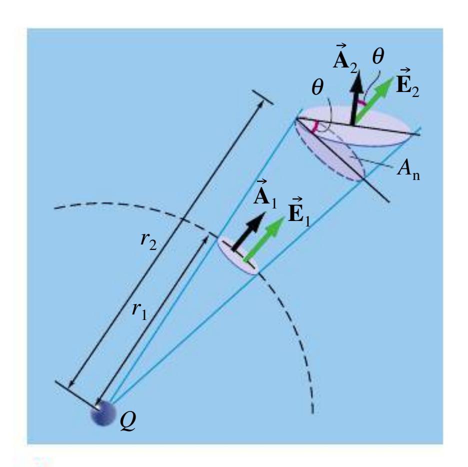
▲ **Figure 3.8**

Surface de Gauss de forme quelconque (en noir) entourant une charge ponctuelle. Le flux traversant cette surface est le même que pour une surface sphérique entourant la charge. On remarque que si la surface de Gauss n'entoure pas la charge (en rouge), le flux total est nul, car toutes les lignes de champ qui entrent dans la surface en ressortent.

Notons que cette équation est encore valable lorsque Q est négatif, car le flux Φ_E est alors lui aussi négatif (le facteur cos 0° devient cos 180° = –1). Le rayon r de la sphère n'intervient pas dans l'expression de Φ_E parce que la décroissance radiale du module du champ ($E \propto 1/r^2$) est compensée par l'accroissement simultané de l'aire ($A \propto r^2$). En d'autres termes, le nombre de lignes de champ traversant une grande sphère est exactement le même qu'une petite sphère.

Tel qu'attendu, l'équation ci-dessus montre bel et bien que le flux ne dépend *que* de la charge Q enfermée dans la surface de Gauss, mais ce résultat n'est pas encore général : nous avons supposé que la surface de Gauss était sphérique et que la seule charge, intérieure ou extérieure à la surface, était une charge ponctuelle Q. Il nous faut généraliser ce résultat.

Dans un second temps, considérons la même charge Q, mais entourée d'une surface de Gauss de forme arbitraire, comme la surface pointillée noire à la figure 3.8. L'intégration nécessaire pour obtenir le flux est un calcul difficile, mais on voit immédiatement que le nombre de lignes de champ qui traversent la surface (ce qui représente le flux) est exactement le même que dans le cas d'une sphère. Le flux est donc toujours donné par l'équation (i).



▲ **Figure 3.9**

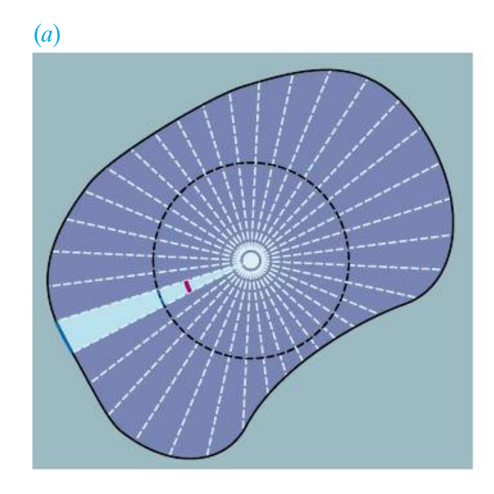
Le flux qui traverse la surface A_2 est le même que le flux qui traverse la surface A_1, car elles ont la même « projection ». En termes mathématiques, on dit qu'elles sont interceptées par le même *angle solide*.

Pour démontrer plus formellement que le flux ne dépend aucunement de la forme de la surface de Gauss, il suffit de décomposer celle-ci en petits éléments infinitésimaux de surface. Considérons ensuite un de ces éléments de surface, comme la surface A_2 illustrée à la figure 3.9. Un peu comme on prend la projection (composante) d'un vecteur le long d'un axe, on peut imaginer la « projection » de cet élément de surface sur une sphère. À la figure 3.9, la « projection » de la surface A_2 sur la sphère de rayon r_1 serait la surface A_1. Dans le « complément de démonstration » qui termine cette section, on montrera mathématiquement que le flux qui traverse la surface A_2 est le même que le flux qui traverse la surface A_1, car le même *angle solide* les intercepte. Comme l'ensemble des éléments de surface forme une surface de Gauss fermée, l'ensemble de leurs « projections » forme une *sphère* fermée. (La figure 3.10*a* présente une analogie en deux dimensions.) Le flux traversant l'ensemble des éléments de surface est donc le même que celui traversant la sphère, soit Q/ε_0.

Dans un troisième temps, considérons la même charge Q et une surface de Gauss qui ne l'entoure pas, comme la surface pointillée rouge à la figure 3.8. En d'autres termes, la charge est située à l'*extérieur* d'une surface. Encore une fois, on peut déduire nos conclusions seulement en regardant les lignes de champ : autant de lignes entrent dans cette surface (contribution négative au flux) qu'il y en a qui sortent (contribution positive au flux). Le flux traversant la surface est donc

(Q à l'extérieur) $$\Phi_E = 0 \qquad \text{(ii)}$$

(*a*)



(*b*)

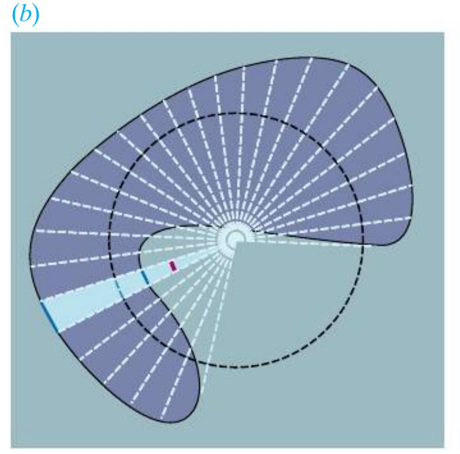


Figure 3.10

Sur ces figures en deux dimensions, la ligne fermée pleine peut être décomposée en segments. (*a*) Pour chacun de ces segments, on peut identifier une portion du cercle pointillé qui est intercepté par le *même angle*. L'ensemble des segments formant une courbe fermée, toutes les portions du cercle sont attribuées à l'un d'eux. Dans la démonstration du théorème de Gauss, la même idée est appliquée en trois dimensions, la ligne pleine étant remplacée par la surface de Gauss, le cercle, par une sphère, et l'angle, par un angle solide. (*b*) Cette fois, deux éléments de la ligne ont la même projection sur le cercle.

Attention de ne pas confondre le flux et le champ : quand Q est située à l'extérieur de la surface, le flux au travers de la surface est nul, mais la charge produit bel et bien un champ.

Comme la propriété précédente, on peut démontrer plus formellement cette propriété en décomposant la surface de Gauss en éléments de surface, puis en les projetant sur une sphère centrée sur Q. Si on considère une quelconque portion de la sphère (comme la surface A_1 à la figure 3.9), l'élément de surface qui s'y projette (s'il y a lieu) n'est jamais seul : il y a toujours *deux* éléments de surface qui sont interceptés par le même angle solide. L'un de ces éléments correspond à un flux positif, et l'autre, à un flux négatif de même grandeur. Toutes les contributions s'annulant deux à deux, le flux total est donc nul. (La figure 3.10*b* présente une analogie en deux dimensions.)

Nous avons maintenant établi que le flux que cause une charge ponctuelle Q au travers d'une surface de Gauss quelconque est Q/ε_0 si la charge est à l'intérieur de la surface et est nul si elle est à l'extérieur, *quelle que soit la forme de la surface*. Dans un quatrième temps, il ne reste plus qu'à généraliser cette idée au cas où il y a plusieurs charges ponctuelles q_1, q_2, q_3, etc., certaines se trouvant à l'intérieur de la surface alors que les autres se trouvent à l'extérieur. D'après le principe de superposition (équation 2.4), le champ résultant dû à toutes ces charges est la somme des contributions individuelles de chaque charge : $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \vec{\mathbf{E}}_3 + \ldots$. Ainsi, quelle que soit la surface de Gauss considérée, le flux qui la traverse est

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \int \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \int (\vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2 + \vec{\mathbf{E}}_3 + \ldots) \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \\ &= \int \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} + \int \vec{\mathbf{E}}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} + \int \vec{\mathbf{E}}_3 \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} + \ldots\end{aligned}$$

En somme, le flux total qui traverse la surface correspond à la somme des flux attribués à chaque charge. Or, nous savons déjà calculer le flux attribué à une unique charge Q : il est nul si la charge est à l'extérieur de la surface et correspond à Q/ε_0 si elle est à l'intérieur. La somme ci-dessus se réduit donc à

$$\Phi_E = \underbrace{\frac{q_1}{\varepsilon_0} + \frac{q_2}{\varepsilon_0} + \frac{q_3}{\varepsilon_0} + \ldots}_{\substack{\text{Somme des contributions}\\ \text{au flux dues aux charges}\\ \text{intérieures}}} + \underbrace{0 + 0 + 0 + \ldots}_{\substack{\text{Somme des contributions}\\ \text{au flux dues aux charges}\\ \text{extérieures}}} = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$$

où ΣQ désigne seulement la somme des charges (avec leur signe) situées *à l'intérieur* de la surface de Gauss. Si on substitue l'équation 3.2, on obtient

le **théorème de Gauss**. On ajoute un cercle sur le symbole de l'intégration (voir la section 3.1) pour signifier que la surface d'intégration doit être une surface fermée sur elle-même :

Théorème de Gauss

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0} \qquad (3.3a)$$

Le flux total à travers une surface fermée est égal à $1/\varepsilon_0$ que multiplie la charge totale à l'intérieur de la surface*.

Qualitativement, le théorème de Gauss dit essentiellement que les lignes de champ débutent dans une « zone » où il y a des charges positives, traversent les zones où il n'y a aucune charge et aboutissent en une zone où il y a des charges négatives**. En somme, le théorème de Gauss est une équation entièrement générale qui permet de calculer le *flux* traversant *n'importe quelle* surface fermée, quelle que soit la forme de celle-ci. À la section 3.4, nous verrons toutefois que ce théorème n'est utile pour calculer le *champ* que dans des situations suffisamment symétriques.

On remarque que le théorème de Gauss ne dépend pas de la position exacte des charges à l'intérieur de la surface. De plus, le champ électrique qui intervient dans l'équation 3.3*a* est le champ *total* créé par toutes les charges, et pas seulement par celles qui sont à l'intérieur de la surface de Gauss. Si la charge à l'intérieur est nulle, cela *ne veut pas* forcément dire que $\vec{\mathbf{E}} = 0$ sur la surface de Gauss. Le champ peut très bien être créé par des charges extérieures à la surface, comme le montre la figure 3.5 (p. 94). Toutefois, le théorème de Gauss implique que le flux total traversant la surface est fonction uniquement des charges qui sont à l'intérieur de la surface.

Les charges extérieures produisent aussi un champ.

On note que l'utilisation de la permittivité *du vide* ε_0 dans la démonstration ci-dessus suppose que la surface de Gauss, où on évalue le champ, est située dans le vide. L'équation 3.3*a* est donc valable dans le vide où, sauf mention du contraire, nous supposerons que toutes les situations se situent. Pour obtenir le champ électrique $\vec{\mathbf{E}}_D$ en présence d'un matériau diélectrique dans une situation macroscopique simple, on peut modifier l'équation 3.3*a* pour tenir compte de la polarisation en remplaçant ε_0 par $\kappa\varepsilon_0$ (voir la section 2.7) :

$$\oint \kappa\varepsilon_0 \vec{\mathbf{E}}_D \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \Sigma Q \qquad (3.3b)$$

Dans cette équation, le membre de droite ne tient compte que des charges libres, et non des charges liées qui apparaissent parce que le diélectrique se polarise, mais l'intégrale du membre de gauche contient le champ résultant produit par toutes ces charges. On note que $\kappa\varepsilon_0$ a été inclus dans le membre de gauche de l'équation, ce qui permet de traiter des cas où la surface de Gauss passe en partie dans le diélectrique et en partie hors du diélectrique. À la section 3.6, nous verrons comment appliquer cette équation.

Bien que nous ayons démontré le théorème de Gauss pour une situation électrostatique, nous verrons au chapitre 13 qu'il s'applique aussi quand le champ

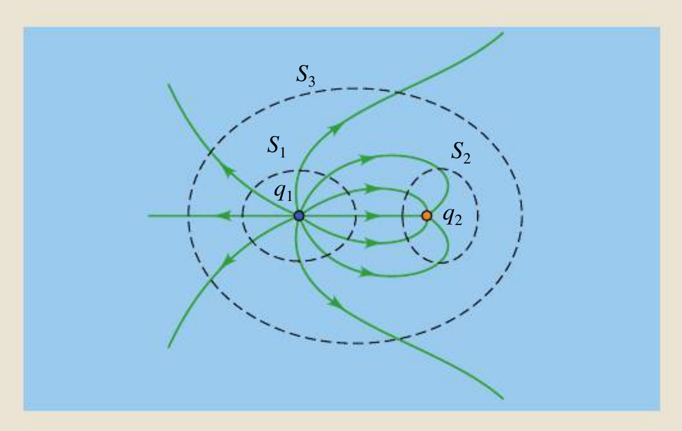
* Au lieu de dire que le flux est *proportionnel* au nombre de lignes de champ qui croisent la surface, on pourrait dire qu'ils sont *égaux*, à la condition de définir le nombre de lignes comme étant égal à $\Sigma Q/\varepsilon_0$. Comme ce nombre est typiquement élevé, le fait qu'il n'est pas un entier peut alors être négligé.

** C'est la justification formelle des propriétés que nous avons attribuées aux lignes de champ à la section 2.2.

électrique varie dans le temps. La validité du théorème dans un cas électrostatique sera illustrée dans l'exemple suivant.

Exemple 3.3

La figure 3.11 représente le champ *résultant* dû à deux charges $q_1 = 2$ nC et $q_2 = -1$ nC. (a) Calculer le flux au travers des surfaces S_1, S_2 et S_3. (b) Interpréter ces flux en termes visuels, en faisant référence aux lignes de champ.



▲ **Figure 3.11**

Le flux à travers une surface est déterminé par la charge *totale* à l'intérieur de celle-ci.

Solution

(a) C'est le flux et non le champ qui est demandé. Il n'est donc pas nécessaire d'intégrer : le théorème de Gauss donne directement le flux : $\Phi_E = \Sigma Q$. ■

Considérons d'abord la surface S_1. Puisque la seule charge enfermée dans cette surface est q_1, le flux hors de S_1 est $q_1/\varepsilon_0 = 226$ N·m²/C. La présence de q_2 n'a aucun effet sur le flux au travers de S_1, bien que q_2 produise un champ qui contribue au champ résultant.

De même, le flux hors de S_2 est $q_2/\varepsilon_0 = -113$ N·m²/C.

Enfin, si on considère la surface S_3, la charge totale qu'elle contient est $\Sigma Q = q_1 + q_2 = (2\text{ nC}) + (-1\text{ nC}) = +1$ nC, donc le flux quittant S_3 est +113 N·m²/C. Notons qu'on additionne les charges en tenant compte de leur signe.

Si on avait demandé le champ plutôt que le flux, il aurait fallu isoler le champ du membre de gauche de l'équation 3.3*a* en intégrant, ce que la (faible) symétrie de la figure ne permet pas de faire. Il en sera autrement dans les cas étudiés à la section 3.4. ■

(b) Le flux hors de S_2 est deux fois plus petit et de signe opposé à celui qui traverse S_1, ce qui correspond à ce qu'on peut déduire des lignes de champ : 10 lignes « quittant » S_1 sont illustrées, alors que 5 lignes « entrent » dans S_2. De même, les flux traversant S_2 et S_3 sont de signes opposés mais de même grandeur, ce qui correspond bien aux 5 lignes de champ qui « quittent » S_3.

Complément de démonstration

Notre raisonnement ci-dessus reposait sur le fait que les surfaces A_1 et A_2 à la figure 3.9 (p. 96) avaient la même « projection » et étaient donc traversées par le même flux. Nous montrerons ici cette propriété de façon plus formelle. Pour ce faire, il faudra d'abord décrire quantitativement l'ouverture du cône de lignes de champ issues de la charge Q, illustré à la figure 3.9 (p. 96). En effet, l'ouverture de ce cône ne peut se mesurer par un angle ordinaire, car elle est en trois dimensions. On peut toutefois définir à cette fin la notion d'*angle solide*. En deux dimensions, un angle ordinaire mesuré depuis le centre d'un cercle est défini (en radians) comme l'arc de cercle qu'il intercepte divisé par le rayon du cercle. Ce rapport ne dépend en effet que de l'angle. Pour le cercle complet, l'arc de cercle est $2\pi r$, si bien que l'angle intercepté est $2\pi r/r = 2\pi$. En trois dimensions, l'angle solide est défini comme la *surface* interceptée sur une sphère, divisée par le carré du rayon de la sphère. Cette quantité ne dépend en effet que de l'ouverture du cône. Pour une sphère complète, la surface est $4\pi r^2$, si bien que l'angle solide intercepté est $4\pi r^2/r^2 = 4\pi$. En général, on définit l'angle solide Ω intercepté par une surface A tel que

$$\Omega = \frac{A_n}{r^2} = \frac{A\cos\theta}{r^2}$$

$A_n = A \cos \theta$ étant la projection de A perpendiculaire à l'axe du cône dans lequel A s'inscrit. L'unité d'angle solide est le stéradian.

Appliquons maintenant cette définition à la figure 3.9 (p. 96), où on a représenté un cône interceptant une aire A_1 sur la surface sphérique de rayon r_1 et une région d'aire A_2 sur une surface arbitraire. Les surfaces peuvent être de forme quelconque même si on a illustré des disques, mais sont supposées suffisamment petites pour que le champ ait la même valeur en chacun des points d'une même surface. D'après la loi de Coulomb ($E \propto 1/r^2$), le rapport entre le module des champs sur les deux surfaces est

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{r_1^2}{r_2^2} \tag{i}$$

On peut exprimer l'angle solide du cône en fonction de l'aire de l'une ou l'autre des surfaces :

$$\Omega = \frac{A_1}{r_1^2} = \frac{A_2 \cos \theta}{r_2^2} \tag{ii}$$

Le flux traversant chaque surface est $\Phi_1 = E_1 A_1$ et $\Phi_2 = E_2 A_2 \cos \theta$. Des équations (i) et (ii), on tire $\Phi_1 = \Phi_2$. Autrement dit, le flux dans un angle solide donné à la figure 3.9 (p. 96) est constant et ne dépend pas de la forme ni de l'orientation de la surface.

3.3 LA SYMÉTRIE

Nous allons maintenant voir comment la symétrie de la distribution de charge nous renseigne sur la configuration du champ qu'elle produit. C'est la combinaison de cette information et de celle donnée par le théorème de Gauss qui est le fondement de l'efficace méthode pour calculer le champ que nous exposerons à la section suivante. La symétrie est en effet très révélatrice : au chapitre précédent, nous avons vu que le champ produit par un fil chargé était radial, que celui produit par une plaque était uniforme, etc. Ce comportement a toutefois été prédit par la méthode exposée à la section 2.5. Or, il aurait pu être déduit presque exclusivement à partir de la symétrie de la distribution de charge, uniquement en supposant que le champ est dirigé des charges positives vers les charges négatives, sans même connaître la forme exacte de la loi de Coulomb.



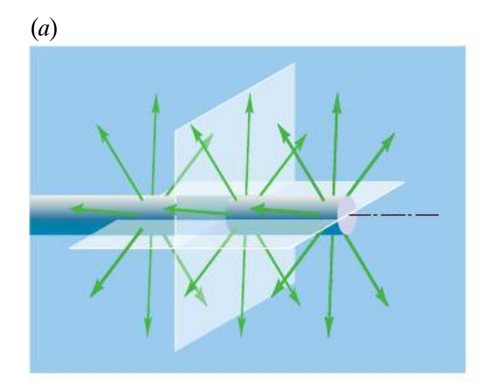
▲ **Figure 3.12**

Cette illustration n'est plus la même si elle est inversée par rapport à un axe vertical. Pourtant, elle *est* symétrique : sous une rotation de 90°, elle demeure inchangée.

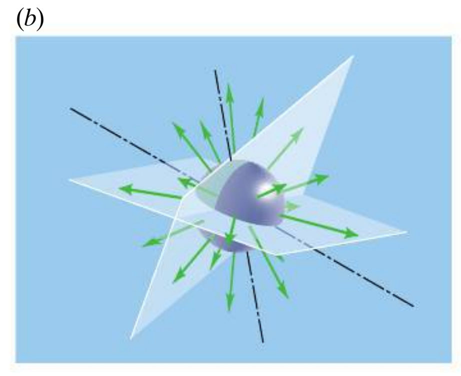
On confond souvent le concept de symétrie avec celui de réflexion, mais cette vision est incomplète. En fait, une figure géométrique présente une **symétrie** quand on peut lui appliquer toute transformation (réflexion ou autre) qui la laisserait *inchangée*. Par exemple, en deux dimensions, un carré est symétrique sous *réflexion* par rapport à quatre axes passant par son centre, mais il est aussi symétrique sous *rotation* d'un angle de 90° par rapport à son centre. L'illustration de la figure 3.12, par contre, n'est symétrique que sous rotation : elle est moins symétrique que le carré, mais elle demeure symétrique.

Dans les cas de distribution de charge, la symétrie doit être considérée en trois dimensions. Par exemple, un fil rectiligne infini et uniformément chargé est symétrique sous inversion, sous rotation et même sous translation. En effet, il demeure identique si on l'inverse par rapport à tout plan qui lui est perpendiculaire ou qui contient son axe central. Il demeure aussi identique si on le fait tourner de tout angle par rapport à son axe central. Enfin, il demeure identique si on lui fait subir toute translation parallèle à son axe, puisqu'il n'a pas d'extrémités. On dit de tout objet qui possède l'ensemble de ces propriétés qu'il a une **symétrie cylindrique** (figure 3.13*a*).

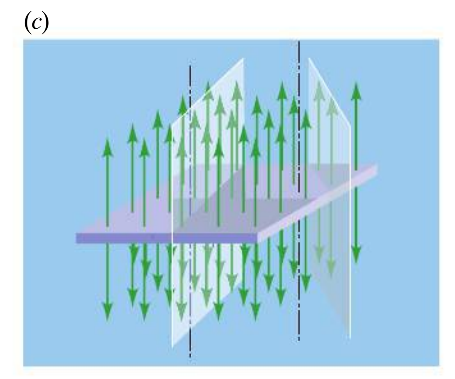
(*a*)



(*b*)



(*c*)



▲ **Figure 3.13**

De nombreux objets ont, du moins de façon approximative, l'un des ensembles de propriétés de symétrie suivants : (*a*) symétrie cylindrique, (*b*) symétrie sphérique, (*c*) symétrie planaire. Notons que le fil illustré en (*a*) et la plaque illustrée en (*c*) sont infinis.

De façon similaire, une sphère ou une coquille sphérique chargée demeure inchangée si on lui fait subir une inversion par rapport à tout plan qui passe par son centre ou si on lui fait subir une rotation autour de tout axe passant par son centre. Par contre, elle n'est jamais symétrique sous translation. Tout objet ayant l'ensemble de ces propriétés a une **symétrie sphérique** (figure 3.13*b*).

Enfin, un plan infini de charge a une **symétrie planaire** (figure 3.13*c*) : il demeure le même si on le fait tourner autour de tout axe qui lui est perpendiculaire, si on l'inverse par rapport à tout plan qui lui est perpendiculaire (ou par rapport à un plan avec lequel il se confond). De même, il demeure inchangé si on lui fait subir une translation selon toute direction parallèle à lui-même, puisqu'il n'a pas de bords.

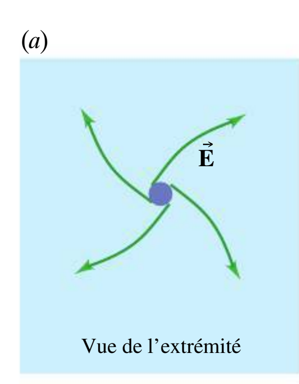
Beaucoup d'objets chargés peuvent être classés dans l'une des trois catégories illustrées à la figure 3.13 ou, du moins, s'en approcher. En pratique, on reconnaît les propriétés de symétrie d'un objet de façon plutôt instinctive et nous n'aurons jamais à faire la liste des transformations qu'un objet peut subir. Ce qui importe est le lien suivant :

Lien entre symétrie de la distribution de charge et symétrie du champ

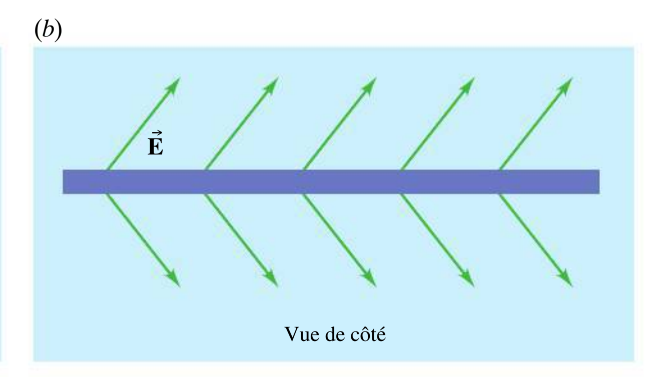
La symétrie du champ que produit une distribution de charge est forcément identique à la symétrie de la distribution de charge elle-même.

Ainsi, par exemple, les lignes de champ autour d'un fil infini chargé doivent forcément avoir une symétrie cylindrique. Pour le démontrer, il suffit de supposer que ce soit faux et nous aboutirons à une absurdité. Supposons, en effet, que les lignes de champ n'aient *pas* une symétrie cylindrique, comme l'illustre l'un ou l'autre des deux exemples de la figure 3.14. Alors, si on fait subir à l'image certaines des transformations de symétrie qui laissent le fil de charge

(*a*)



(*b*)

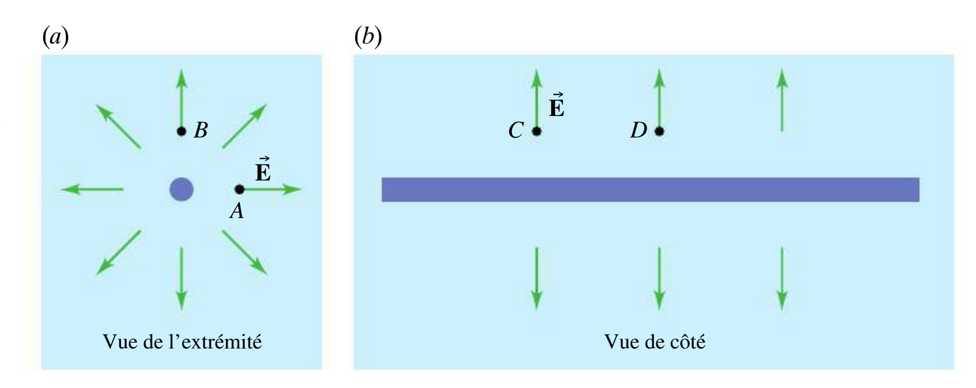


◀ **Figure 3.14**

Uniquement par des arguments fondés sur la symétrie, on peut déduire que le champ produit par un fil chargé infini *ne peut pas* être tel qu'illustré en (*a*) ou en (*b*). Si on fait une inversion horizontale de l'image (*a*) ou (*b*), la distribution de charge du fil demeure inchangée, alors que le champ change. Or, il serait absurde que deux fils identiques produisent des champs différents. La seule configuration de lignes de champ qui respecte la même symétrie que celle du fil qui est une configuration radiale (figure 3.13*a*).

Figure 3.15

L'orientation du champ produit par un fil chargé infini doit être radiale. Toutefois, la symétrie nous renseigne aussi sur le module du vecteur champ. (*a*) Le module du champ en *A* doit être identique à celui en *B*, puisqu'une rotation de toute l'image par 90° remplace un des vecteurs par l'autre, sans changer la distribution de charge. (*b*) Le module du champ en *C* et en *D* est identique, puisqu'une translation parallèle au fil remplace un des vecteurs par l'autre, sans changer la distribution de charge.

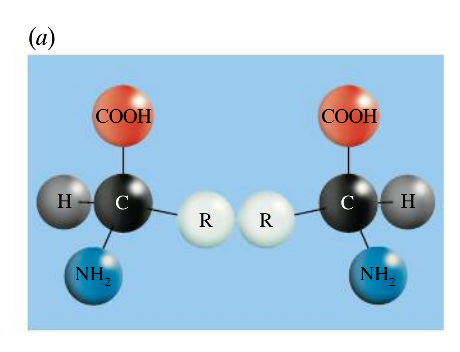


inchangé, par exemple une réflexion par rapport à un plan vertical, le champ, lui, change. Cela est évidemment impossible : comment deux fils identiques, avant et après la réflexion, pourraient-ils produire des champs différents ? L'orientation du champ est donc nécessairement celle illustrée à la figure 3.13*a*.

Mais la symétrie nous renseigne même sur le *module* du champ. À la figure 3.15*a*, les vecteurs champ sont illustrés selon une orientation qui est conforme à la symétrie. Supposons toutefois que les vecteurs aux points *A* et *B* aient des modules différents. En faisant tourner l'image de 90°, le vecteur champ situé en *B* passe en *A*. La distribution de charge reste inchangée, mais le champ aurait changé, ce qui est absurde. Ces deux vecteurs, situés sur un cercle ayant le fil pour centre, doivent donc être de module identique. Un même raisonnement s'applique à la figure 3.15*b* : l'invariance sous translation implique que les vecteurs champ en *C* et en *D* ont le même module. Tous les vecteurs situés à une même distance du fil doivent donc être de module identique. Il s'ensuit que le module du champ produit par un fil chargé infini ne peut dépendre *que* de la distance *r* par rapport au fil.

Sans jamais avoir eu recours à l'approche de la section 2.5 ou même à la loi de Coulomb, nous avons donc montré que le champ produit par un fil chargé était nécessairement orienté de façon radiale et que son module n'avait nécessairement qu'une dépendance radiale. Un raisonnement similaire aurait pu être fait pour une sphère chargée (champ nécessairement radial) ou pour un plan chargé (champ nécessairement perpendiculaire à la surface). De plus, ces conclusions s'appliqueront aussi aux situations où la distribution de charge a la forme de plusieurs coquilles sphériques concentriques, de plusieurs cylindres coaxiaux ou de plusieurs plans parallèles. La seule chose qui reste à déterminer est donc la façon exacte dont le module dépend de la position, ce qui nécessitera l'utilisation du théorème de Gauss.

(*a*)



(*b*)

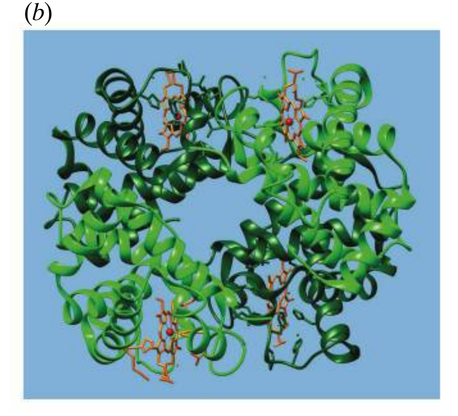


Figure 3.16

(*a*) Le reflet d'une molécule biologique (ici, un acide aminé) est une molécule distincte. On ne peut pas faire pivoter l'une pour qu'elle se confonde avec l'autre. (*b*) L'hémoglobine, la protéine qui transporte l'oxygène dans le sang, est symétrique sous rotation de 180°, mais pas sous réflexion.

Les situations biologiques ont rarement la symétrie nécessaire pour que le théorème de Gauss soit très révélateur. Certains êtres vivants simples ont une symétrie cylindrique, mais ils ne sont pas chargés. Quant aux corps microscopiques qui sont chargés, ils ne sont jamais symétriques, car la plupart des biomolécules sont *chirales*, ce qui signifie qu'on obtient par réflexion une molécule distincte (figure 3.16*a*). Toutefois, la symétrie d'une protéine facilite les calculs d'énergie (figure 3.16*b*). On peut aussi utiliser le théorème de Gauss pour des structures microscopiques ; par exemple, si on veut calculer la concentration d'ions en fonction de la distance à une membrane, on considère les charges de l'autre côté de la membrane comme ayant une symétrie planaire. On peut aussi utiliser le théorème de Gauss pour déterminer s'il y a une charge totale non nulle captive d'une surface.

En physique théorique, le concept de symétrie est fondamental. Notamment, nous avons déjà mentionné dans le tome 1 que le théorème de Noether prédit

qu'un principe de conservation découle de *chaque* propriété de symétrie des lois physiques. Ainsi, le principe de conservation de l'énergie découle de l'invariance des lois physiques sous translation dans le temps, le principe de conservation de la quantité de mouvement découle de leur invariance sous translation dans l'espace et le principe de conservation du moment cinétique, de leur invariance sous rotation dans l'espace. La conservation de la charge électrique découle aussi d'une propriété de symétrie des lois physiques (voir le chapitre 4), de même que plusieurs principes de conservation en physique des particules (voir le chapitre 13 du tome 3).

3.4 L'UTILISATION DU THÉORÈME DE GAUSS

Supposons que l'on veuille déterminer le champ électrique produit en un point P par une distribution symétrique de charge. Le théorème de Gauss ne nous renseigne que sur le flux produit par cette distribution, non sur le champ. Toutefois, si la distribution de charge est assez symétrique, la configuration du champ découle de la symétrie, et il est alors possible d'extraire E de l'intégrale de l'équation 3.3*a*. En somme, ce sont les informations déduites par symétrie, combinées à celles données par le théorème de Gauss, qui permettent de calculer E et non l'une ou l'autre de ces informations prise de façon isolée.

En pratique, il faut d'abord connaître (ou supposer) l'orientation des lignes de champ. Ensuite, il faut trouver une surface de Gauss *passant par le point P* et pour laquelle l'intégrale est facile à évaluer. Sur chaque portion de la surface, il faut (i) que le champ ait partout le même module et soit dans la même direction que $d\vec{\mathbf{A}}$ *ou* (ii) que le champ soit partout perpendiculaire à $d\vec{\mathbf{A}}$. Dans le cas (i), l'angle entre le champ et chaque $d\vec{\mathbf{A}}$ est de 0° (ou 180°), le terme cos θ dans le produit scalaire égale 1 (ou –1) et la valeur constante E (ou $-E$) peut être extraite de l'intégrale. L'intégrale est alors égale à la somme des éléments de la surface, donc à la surface elle-même. Dans le cas (ii), le facteur cos θ dans le produit scalaire est égal à 0 et l'intégrale est nulle (le flux électrique est nul, car les lignes de champ ne font que raser la surface, elles ne la traversent pas).

Le calcul du champ fondé sur le théorème de Gauss et sur la symétrie est un *substitut* au calcul fondé sur la loi de Coulomb et sur le théorème de superposition, utilisé à la section 2.5. Lorsque nous employons cette nouvelle méthode, la loi de Coulomb n'est donc *pas* utilisée*. Pour l'illustrer, dans les exemples qui suivent, nous utiliserons le théorème de Gauss pour démontrer à nouveau plusieurs résultats que nous avons obtenus au chapitre 2, notamment le champ produit par un fil rectiligne chargé, par une plaque chargée et par une coquille sphérique. Nous verrons que, dans ces cas où la distribution de charge est très symétrique, le théorème de Gauss permet de calculer le champ d'une façon beaucoup plus simple que celle de la section 2.5.

Surfaces de Gauss qui n'englobent qu'une fraction de la charge d'un objet

La grandeur $\sum Q$ dans le théorème de Gauss représente la charge totale qui se trouve *à l'intérieur* de la surface de Gauss. Or, dans plusieurs cas, la surface de Gauss choisie n'englobe *qu'une partie* d'un objet chargé. Si le volume de l'objet est chargé uniformément, on peut déterminer $\sum Q$ en multipliant la charge totale de l'objet par la fraction du volume de l'objet qui se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss. On peut aussi faire appel à la notion de densité de charge. Pour un fil uniformément chargé, on utilise la densité linéique de charge λ (voir l'équation 2.7). Pour une surface uniformément chargée, on définit la densité

* Une certaine confusion peut être causée par le fait que nous avons utilisé la loi de Coulomb pour démontrer le théorème de Gauss à la section 3.2 : la *démonstration* du théorème requiert la loi de Coulomb, mais pas son *utilisation* (voir la note en bas de page au début de la section 3.2).

surfacique de charge σ (voir l'équation 2.9). On rencontre aussi parfois des objets pleins chargés; on utilise alors la **densité volumique de charge**, définie comme la charge par unité de volume, mesurée en coulombs par mètre cube. Pour un objet qui n'est pas chargé uniformément, ρ dépend de l'endroit où l'on se trouve dans l'objet, mais pour une charge q uniformément distribuée dans un objet de volume V, elle est une constante donnée par

$$\rho = \frac{q}{V} \tag{3.4}$$

Cette approche sera mise en pratique à l'exemple 3.5, où nous étudierons un nouveau cas: le champ qu'une sphère pleine non conductrice uniformément chargée produit *dans* son volume. Nous y verrons que ce champ est donné par

$$(r < R) \qquad E = \frac{kQ_{\text{tot}}r}{R^3} \tag{3.5}$$

où Q_{tot} est la charge totale portée par la sphère de rayon R et $r < R$ est la distance au centre. Cette équation néglige la polarisation, car elle ne tient pas compte de l'éventuelle constante diélectrique κ du matériau de la sphère.

Notons que, dans les exemples ci-dessous nous utiliserons systématiquement la minuscule r pour désigner une variable et la majuscule R pour désigner des constantes, par exemple le rayon d'une sphère ou d'un cylindre.

Exemple 3.4

Une *sphère creuse de rayon R* porte une charge Q positive uniformément répartie sur sa surface. Trouver, en fonction de la distance r mesurée par rapport au centre de la sphère, le module du champ électrique en un point (a) à l'extérieur et (b) à l'intérieur de la sphère.

Solution

(*a*) *À l'extérieur*: Quelle que soit la forme de la surface de Gauss, le flux la traversant sera Q/ε_0, pourvu que cette surface enferme la charge Q. Notre but étant de calculer le champ et non le seul flux, il faut cependant choisir judicieusement la symétrie de cette surface.

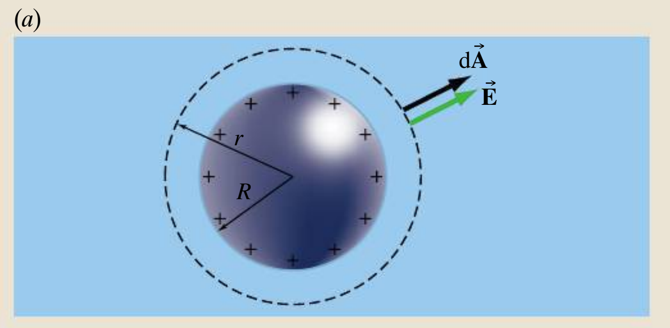
Puisque la distribution de charge est de symétrie sphérique, le champ est également de symétrie sphérique. Les lignes de champ sont donc radiales et orientées vers l'extérieur. Ainsi, le champ a la même valeur en tout point d'une surface sphérique imaginaire de même centre que la sphère chargée. Cette symétrie nous amène à choisir comme surface de Gauss une coquille sphérique de rayon $r > R$ (figure 3.17*a*). Le champ a un module constant sur la coquille et est partout parallèle à $d\vec{\mathbf{A}}$. On a donc $d\Phi_E = E\,dA\cos\theta = E\,dA$, où E est une constante qui pourra être extraite de l'intégrale:

$$\Phi_E = \oint d\Phi_E = \oint E\,dA = E\oint dA = E(4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

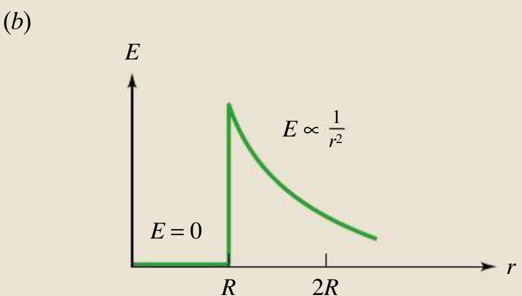
Par conséquent,

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{kQ}{r^2}$$

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 3.17**

(*a*) La surface de Gauss (trait pointillé) pour une distribution de charge de symétrie sphérique est une coquille sphérique. (*b*) Le champ électrique est nul à l'intérieur de la sphère. À l'extérieur de la sphère, le champ est le même que si la charge était ponctuelle et située au centre de la sphère.

À l'extérieur de la sphère creuse, le champ est le même que si la charge était ponctuelle et située au centre de la sphère*.

Ce calcul est nettement plus simple que l'intégration qui intervient dans une application directe de la loi de Coulomb. Le problème analogue dans le cas de la gravitation (théorème de la masse ponctuelle ; voir le chapitre 13 du tome 1) représentait un obstacle énorme pour Newton. Nous pouvons maintenant considérer qu'il a été démontré d'une nouvelle façon. ■

* Ce résultat implique que la représentation de charges ponctuelles par des petites sphères (que nous avons utilisée depuis le chapitre 1) est adéquate : le champ électrique autour de l'une ou de l'autre est identique.

(b) *À l'intérieur* : Là encore, le champ est de symétrie sphérique et nous choisissons à nouveau une surface de Gauss sphérique, mais cette fois de rayon r inférieur à R (non illustrée). La charge étant nulle à l'intérieur de la surface, l'équation 3.3*a* devient

$$E(4\pi r^2) = 0$$

Puisque r peut prendre n'importe quelle valeur, nous en concluons que $\vec{\mathbf{E}} = 0$ en *tout* point à l'intérieur d'une sphère creuse uniformément chargée. Ce résultat découle directement de la dépendance en $1/r^2$ de la loi de Coulomb (sans laquelle il n'y aurait pas de théorème de Gauss).

La figure 3.17*b* illustre le graphique du module du champ en fonction du rayon.

Exemple 3.5

Soit une *sphère pleine non conductrice uniformément chargée*, de rayon R et de charge totale Q_{tot} positive répartie uniformément dans le volume de la sphère. On suppose qu'elle ne se polarise pas. Trouver le module du champ électrique (a) à l'extérieur de la sphère ; (b) à l'intérieur.

Solution

(a) *À l'extérieur* : En un point situé à l'extérieur de la sphère, la situation est identique à celle de l'exemple précédent. Puisque la charge à l'intérieur de la surface de Gauss sphérique de rayon $r > R$ est égale à Q_{tot}, on a

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

d'où l'on déduit (avec $k = 1/4\pi\varepsilon_0$)

$$E = \frac{kQ_{tot}}{r^2}$$

Encore une fois, le champ à l'extérieur de la sphère est donc le même que le champ qui serait créé par une charge ponctuelle placée au centre de la sphère. Notons que ce résultat dépend uniquement de la symétrie sphérique de la distribution de charge et n'est pas lié au fait qu'elle est uniforme. ■

(b) *À l'intérieur* : On choisit comme surface de Gauss une coquille sphérique de rayon $r < R$ (figure 3.18*a*). Il y a deux façons de déterminer la charge $\Sigma Q = Q_{int}$ à l'intérieur de cette surface :

(i) On multiplie Q_{tot} par la fraction du volume total de la sphère de rayon R qui se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss de rayon r. Puisque le volume d'une sphère de rayon r est $\frac{4}{3}\pi r^3$, cette fraction est $(\frac{4}{3}\pi r^3)/(\frac{4}{3}\pi R^3) = r^3/R^3$. La charge à l'intérieur de la surface de Gauss est donc $Q_{int} = (r^3/R^3)Q_{tot}$.

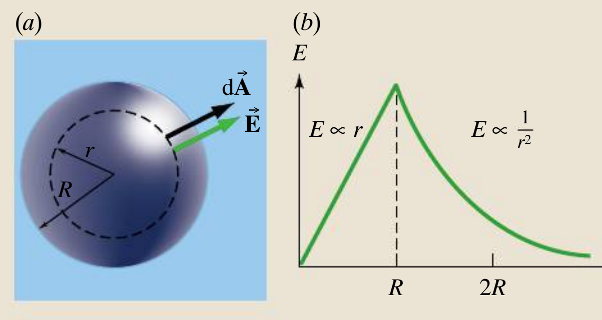
(ii) On calcule la densité volumique de charge, qui est constante pour toute la sphère : $\rho = Q_{tot}/V_{tot} = Q_{tot}/(\frac{4}{3}\pi R^3)$. Pour déterminer la charge à l'intérieur de la surface de Gauss, on multiplie ρ par le volume à l'intérieur de la surface de Gauss : $Q_{int} = \rho(\frac{4}{3}\pi r^3) = (r^3/R^3)Q_{tot}$. ■

Pour les mêmes raisons de symétrie que précédemment, le flux est $E(4\pi r^2)$. Le théorème de Gauss devient donc

$$E(4\pi r^2) = \frac{\left(\frac{r^3}{R^3}\right)Q_{tot}}{\varepsilon_0}$$

et donne (avec $k = 1/4\pi\varepsilon_0$)

$$E = \frac{kQ_{tot}r}{R^3}$$



▲ **Figure 3.18**

(*a*) La surface de Gauss (trait pointillé) à l'intérieur d'une sphère pleine non conductrice uniformément chargée est une coquille sphérique. (*b*) Le champ électrique à l'intérieur de la sphère croît proportionnellement à r. À l'extérieur de la sphère, le champ est le même que si la charge était ponctuelle et située au centre de la sphère.

Cela correspond au résultat annoncé (équation 3.5) : le champ électrique est proportionnel à la distance au centre. Le graphique du module du champ électrique en fonction de r est représenté à la figure 3.18*b*. On remarque que pour $r = R$ les deux expressions de E coïncident : il n'y a pas de discontinuité du champ au passage de la surface.

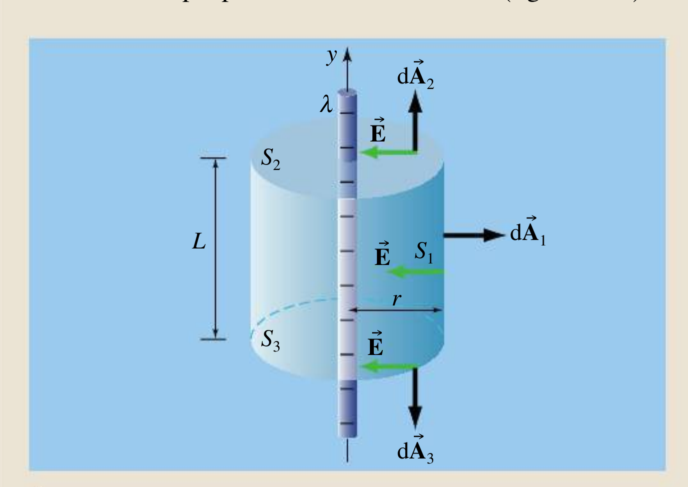
En pratique, il serait difficile de charger de façon uniforme le volume d'une sphère solide non conductrice. Par contre, cette situation peut tout de même servir de modèle simple pour représenter des cas concrets : un nuage ou encore un noyau atomique peuvent être quasi sphériques et chargés dans leur volume.

Exemple 3.6

Un *fil rectiligne infini chargé* porte une densité linéique de charge uniforme égale à λ. (a) Déterminer le module du champ électrique à la distance r du centre du fil. On suppose que λ est négatif. (b) Comparer le résultat à l'équation 2.13.

Solution

(a) À cause de la symétrie cylindrique, nous pouvons dire que le module du champ est le même pour tous les points situés à une distance r du centre du fil. De plus, il est orienté perpendiculairement au fil (figure 3.19).



▲ **Figure 3.19**

Surface de Gauss cylindrique entourant un fil infini chargé. Seul le flux traversant la surface latérale S_1 n'est pas nul.

Pour épouser la symétrie du champ, la surface de Gauss à choisir ici est un cylindre de rayon r et de longueur L ; on s'attend à ce que L n'apparaisse pas dans l'expression finale pour le champ électrique. Puisqu'il s'agit d'une surface fermée, elle est composée de la surface latérale du cylindre S_1 et des extrémités du cylindre S_2 et S_3. ■

L'équation 3.3*a* devient

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \int_{S_1} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} + \int_{S2} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} + \int_{S3} \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}}$$
$$= \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0} \qquad \text{(i)}$$

(Remarquez la notation : on ajoute un cercle sur le symbole de l'intégration quand la surface d'intégration est fermée, ce qui n'est le cas que de la première intégrale. Pour les trois autres, la notation désigne plutôt la *portion* de la surface fermée qui sert de surface d'intégration.)

Sur les surfaces S_2 et S_3, $\vec{\mathbf{E}}$ est partout perpendiculaire à $d\vec{\mathbf{A}}$, ce qui signifie que le flux est nul à travers ces faces. Sur la surface latérale S_1, $\vec{\mathbf{E}}$ est partout parallèle à $d\vec{\mathbf{A}}$ et son module est constant ; le facteur cos θ du produit scalaire est –1, et E peut être extrait de l'intégrale. L'équation (i) devient

$$-E\int_{S_1} dA + 0 + 0 = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0}$$

L'intégrale de dA sur la surface S_1 est égale à l'aire de la surface S_1 elle-même, soit $2\pi rL$. La portion du fil chargé qui se trouve à l'intérieur du cylindre de Gauss de longueur L ayant aussi une longueur L, la charge contenue dans la surface est $\Sigma Q = \lambda L$. Ainsi,

$$-E(2\pi rL) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0}$$

Comme les facteurs L s'annulent et que $k = 1/4\pi\varepsilon_0$,

$$E = \frac{-\lambda}{2\pi r\varepsilon_0} = \frac{2k(-\lambda)}{r} \qquad \text{(ii)}$$

Notons que les charges extérieures à la surface de Gauss (au-delà de chacune des extrémités de la surface cylindrique) ne contribuent pas au calcul du flux total traversant la surface, *mais qu'elles contribuent* toutefois au champ total ; sans leur présence, il n'y aurait pas de symétrie cylindrique. ■

Le signe négatif de l'équation (ii) peut paraître problématique puisque E est un module et donc doit nécessairement être positif. Toutefois, λ est négatif, ce qui signifie que $-\lambda$ est bel et bien positif.

(b) Puisque λ est négatif, on peut substituer $-\lambda = |\lambda|$ dans l'équation (ii) et on obtient alors un résultat identique à l'équation 2.13 (la variable r y était toutefois désignée par le symbole R pour qu'on puisse la distinguer du r dans la loi de Coulomb) :

$$E = \frac{2k|\lambda|}{r}$$

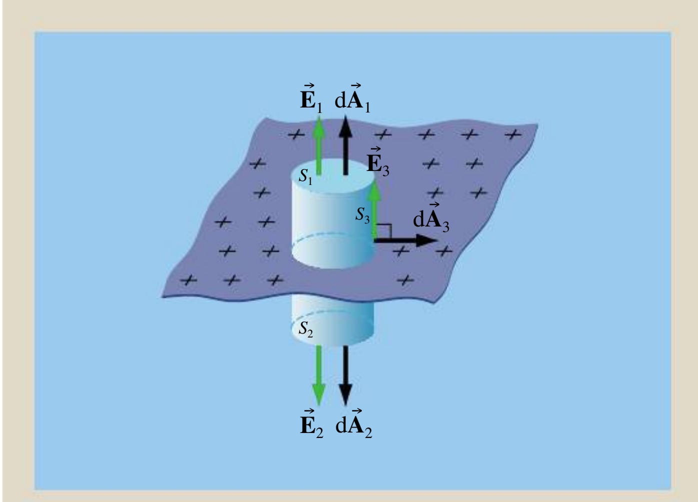
Si on avait plutôt étudié le cas où λ est positif, on serait tout de même parvenu à ce résultat : d'une part, les lignes de champ auraient été en sens inverse et le facteur $\cos\theta$ dans l'intégrale sur la surface S_1 aurait alors été 1 et non −1 et, d'autre part, la valeur positive de λ aurait fait que $+\lambda = |\lambda|$. En toute rigueur, c'est donc la combinaison de l'étude du cas positif et du cas négatif qui permet de vérifier en entier l'équation 2.13 démontrée au chapitre 2. ■

Exemple 3.7

Une *plaque plane infinie chargée* porte une densité surfacique de charge uniforme égale à σ. (a) Déterminer le module du champ électrique produit par cette plaque. On suppose que σ est positif. (b) Comparer le résultat à l'équation 2.18.

Solution

(a) La charge étant distribuée sur une plaque infinie, sa symétrie est planaire. On en déduit que le champ est perpendiculaire à la plaque et qu'il a un module constant sur tout plan parallèle à cette plaque. Cette symétrie indique aussi que le champ est de même module (mais de sens opposé) en deux points situés à même distance de part et d'autre de la plaque, mais ne permet *pas* de dire s'il dépend ou non de la distance à la plaque. On choisit donc comme surface de Gauss un cylindre dont les extrémités S_1 et S_2, parallèles à la plaque chargée, ont la même surface A et sont situées de part et d'autre et *à égale distance* de la plaque, comme le montre la figure 3.20. Ainsi, le flux traversant la surface latérale du cylindre est nul et le champ a le même module en chacun des points de l'une ou l'autre des extrémités : $E_1 = E_2 = E$.



▲ **Figure 3.20**

La surface de Gauss cylindrique dans le cas d'une plaque infinie chargée. Seul le flux électrique traversant les faces aux extrémités du cylindre n'est pas nul.

La portion de la plaque chargée qui se trouve à l'intérieur de la surface de Gauss a une surface A, la même que les extrémités du cylindre. La charge contenue dans la surface est donc σA. Le théorème de Gauss donne

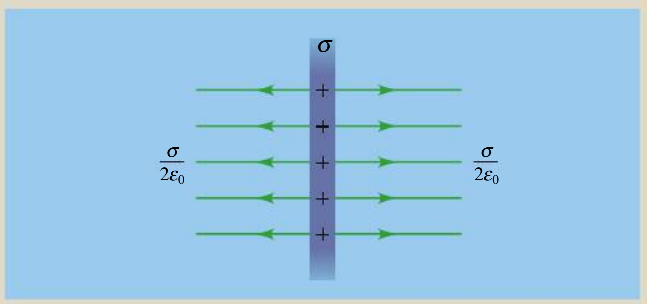
$$\begin{aligned}\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} &= \int_{S_1} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} + \int_{S_2} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} + \int_{S_3} \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \\ &= E_1 A_1 + E_2 A_2 + 0 \\ &= 2EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon}{}^{2}\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que les deux extrémités ont la même surface $A_1 = A_2 = A$ et que le champ sur ces deux extrémités a la même valeur $E_1 = E_2 = E$. Cette expression devient

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Notons que la distance entre la face du cylindre et la plaque chargée n'intervient pas dans ce résultat. La symétrie planaire de la distribution de charge ne pouvait pas nous dire comment E dépendait ou non de cette distance (seulement qu'elle ne dépendait certainement de rien d'autre), mais le théorème de Gauss montre qu'il n'en dépend pas. La figure 3.21 illustre ce résultat. ■

(b) Puisque σ a été choisi positif, on a $\sigma = |\sigma|$ et notre résultat est donc identique à l'équation 2.18 démontrée à la section 2.5. Si la plaque avait été négative, le flux aurait été négatif et on aurait eu $-\sigma = |\sigma|$, de sorte qu'on aurait quand même obtenu l'équation 2.18.



▲ **Figure 3.21**

Le champ d'une plaque infinie chargée est uniforme.

Application à des géométries réelles

Les exemples dont nous venons de traiter impliquent des plaques et des fils infinis, ce qui n'existe pas dans la réalité. La symétrie des objets réels n'est jamais parfaite. Toutefois, quand on est loin des bords, on peut considérer que la symétrie est respectée de façon approximative et on peut quand même appliquer le théorème de Gauss.

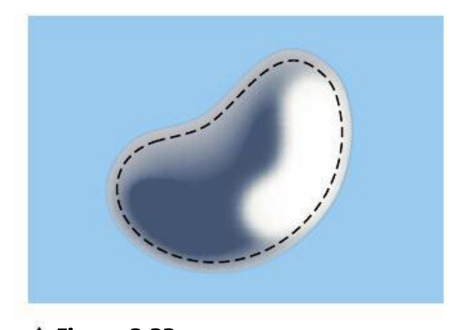
Par exemple, l'expression obtenue à l'exemple 3.6 pour un fil infini demeure valable approximativement quand la distance r est beaucoup plus petite que la distance à laquelle se trouve l'extrémité la plus proche (voir la figure 2.38, p. 63). Le champ demeure donc en $1/r$ tant qu'on ne s'éloigne pas excessivement du fil. De même, l'expression obtenue à l'exemple 3.7 pour une plaque infinie demeure valable tant que la distance entre le point et la plaque est négligeable par rapport à la distance à laquelle se trouvent les bords de la plaque. Dans le cas d'une plaque réelle, le module du champ ne demeure donc constant que sur une certaine distance, puis finit inévitablement par décroître quand on s'éloigne.

Si on compare entre eux les cas dont nous venons de traiter dans les derniers exemples, on remarque qu'une distribution de charge à symétrie sphérique produit un champ qui varie en $1/r^2$, une distribution de charge à symétrie cylindrique produit un champ en $1/r$ et une distribution de charge à symétrie planaire produit un champ uniforme.

Cela n'est pas sans rappeler la façon dont l'énergie qu'on reçoit d'une source d'éclairage décroît avec la distance : en $1/r^2$ pour une ampoule quasi ponctuelle, en $1/r$ près d'un tube fluorescent essentiellement cylindrique et presque pas près d'une grande plaque lumineuse murale. Les mêmes limites dues aux « effets de bord » s'appliquent aussi : si on s'éloigne trop d'un tube fluorescent, l'énergie reçue commence à décroître plus vite qu'en $1/r$. De même, si on s'éloigne trop d'une plaque lumineuse, l'énergie reçue commence à décroître. Ce n'est toutefois qu'une analogie : l'énergie et le champ électrique sont deux notions différentes.

3.5 LE THÉORÈME DE GAUSS ET LES CONDUCTEURS

Le théorème de Gauss peut fournir des renseignements supplémentaires concernant les charges et les champs associés aux conducteurs. D'abord, rappelons que lorsqu'on ajoute une charge à un conducteur, l'intérieur de celui-ci est le siège d'un champ *transitoire*, grâce auquel les électrons libres se répartissent différemment jusqu'à ce que le champ électrique intérieur disparaisse (voir la section 2.3). Pour un métal, ce processus transitoire ne dure qu'environ 10^{-12} s, de sorte qu'on peut considérer tout conducteur isolé comme étant en état d'équilibre électrostatique, le champ à l'intérieur du matériau qui le compose étant nul. C'est la propriété 1 énoncée à la section 2.3.



▲ **Figure 3.22**

Surface de Gauss située juste à l'intérieur d'un conducteur.

À la figure 3.22, on imagine une surface de Gauss à l'intérieur d'un quelconque conducteur isolé et située tout juste sous sa surface. Puisque $\vec{\mathbf{E}} = 0$ en tout point de cette surface de Gauss, le flux qui la traverse est nul. Cela est valable que le conducteur soit symétrique ou non, puisque le champ est nul en chaque point de la surface de Gauss quelle que soit sa forme. D'après l'équation 3.3*a*, la charge totale à l'intérieur de la surface de Gauss doit donc elle aussi être nulle. On en conclut à nouveau la propriété suivante, qui correspond à la propriété 3 énoncée à la section 2.3 : *à l'équilibre électrostatique, toute charge macroscopique*

portée par un conducteur est située à sa surface ou ses surfaces, qu'elle soit distribuée uniformément ou non*.

Le mot « macroscopique » est important : au niveau microscopique, le conducteur est fait d'atomes composés notamment d'électrons et de protons. Le résultat précédent *ne signifie pas* que chacune de ces particules chargées se déplace vers la surface du conducteur. Il ne concerne que la charge macroscopique, c'est-à-dire la charge à grande échelle causée par *l'excédent ou le manque* d'électrons.

La conclusion que nous venons d'obtenir n'exclut pas qu'un conducteur neutre subisse une séparation des charges quand il est plongé dans un champ électrique externe (voir la section 2.3). Seulement, les charges macroscopiques que porte alors chacune de ses extrémités sont situées à la surface du conducteur (comme le montrait d'ailleurs la figure 2.15, p. 46).

L'exemple suivant traite du cas d'une plaque infinie conductrice, qui comporte deux surfaces. Selon la présence ou non d'un champ extérieur, la charge macroscopique peut se répartir différemment sur chaque face, de sorte qu'il faut distinguer la densité surfacique de charge σ que porte *chaque* face. L'exemple montre notamment que le module du champ électrique uniforme, du même côté qu'une de ses faces qui porte la densité de charge σ, est donné par

$$E = \frac{|\sigma|}{\varepsilon_0} \qquad (3.6a)$$

Ici, soulignons que toute la charge (celle de chacune des deux faces et celle de toutes les plaques chargées causant le champ extérieur, s'il y a lieu) contribue au champ de module E, même si celui-ci peut s'exprimer uniquement en fonction de la charge portée par une seule face.

Exemple 3.8

Soit une *plaque conductrice infinie*. (a) En l'absence de champ extérieur, *chacune* des deux faces porte la même densité de charge σ, uniforme et positive. Déterminer le module du champ électrique produit. (b) Comparer le résultat à l'équation 3.6*a*. (c) En présence d'un champ extérieur uniforme perpendiculaire à la plaque, la densité surfacique de chacune des deux faces demeure uniforme, mais devient respectivement égale à σ_1 et à σ_2. Déterminer le champ *résultant* à l'extérieur de la plaque, du côté portant la densité de charge σ_1. Que peut-on déduire au sujet de l'équation 3.6*a* ?

Solution

(a) La charge étant répartie sur une plaque infinie, sa symétrie est planaire, comme à l'exemple 3.7. Donc le champ est perpendiculaire à la plaque et a un module constant sur tout plan parallèle à cette plaque.

On utilise une surface de Gauss cylindrique comme celle de l'exemple 3.7, sauf qu'on la modifie légèrement afin de profiter du fait que $E = 0$ entre les deux surfaces du conducteur ; ainsi, on choisit une des deux bases du cylindre à l'intérieur du matériau du conducteur. La figure 3.23*a* montre cette surface de Gauss vue de côté.

Comme le champ électrique est nul à l'intérieur du matériau du conducteur, le seul flux qui traverse le cylindre de Gauss est celui de la face plane du haut, située à l'*extérieur* du conducteur. Si l'aire de cette face est A, le théorème de Gauss donne

$$EA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0}$$

donc,

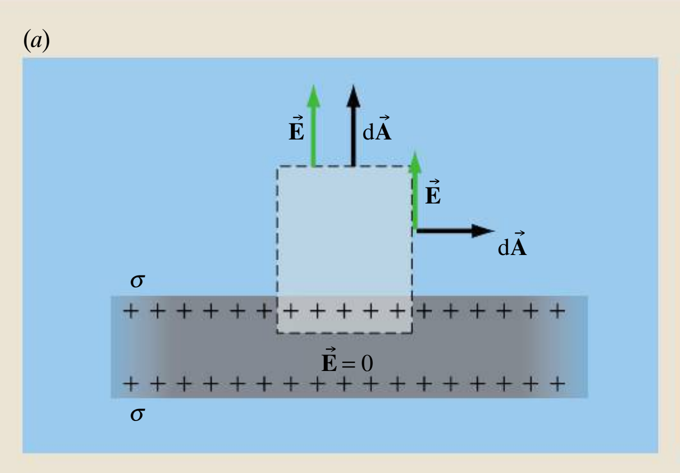
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Il faut souligner que nous n'avons pas seulement utilisé le théorème de Gauss et la symétrie pour obtenir ce résultat. Nous nous sommes également servis du fait que $E = 0$ dans le matériau d'un conducteur à l'équilibre.

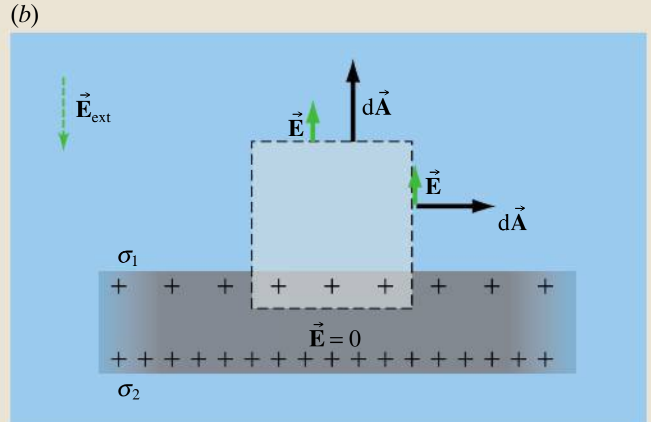
(b) Si on substitue $\sigma = |\sigma|$, l'équation obtenue devient identique à l'équation 3.6*a*. Vérifiez qu'un résultat identique aurait été obtenu si la charge avait été négative.

* Au niveau microscopique, si on considère la surface comme un plan d'atomes uniforme, la charge serait localisée à moins d'un rayon atomique à l'extérieur des noyaux de ce plan d'atomes.

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 3.23**

Plaque conductrice infinie chargée. Puisque le champ résultant $\vec{E}$ est nul à l'intérieur du conducteur, le seul flux électrique non nul est celui qui traverse la face supérieure du cylindre de Gauss. (*a*) En l'absence de champ extérieur, les charges portées par la plaque sont symétriques et sont les seules sources de champ. (*b*) En présence d'un champ extérieur, chaque face a une densité de charge différente, mais le champ *résultant* $\vec{E}$ devant une face peut être exprimé seulement en fonction de la densité de charge portée par cette face, bien qu'il soit causé par *toutes* les charges.

(c) Cette situation est légèrement moins symétrique que celle en (a), car l'opération de réflexion n'est plus une transformation de symétrie : les deux faces chargées et le champ extérieur deviennent différents si on les inverse. Par contre, on peut encore déduire que le champ résultant est forcément perpendiculaire à la plaque et que son module est constant sur tout plan parallèle à la plaque, donc on peut utiliser la même surface de Gauss (figure 3.23*b*). Notez que cette surface enferme une partie de la face qui porte la densité de charge σ_1.

Comme le champ électrique est nul à l'intérieur du matériau du conducteur, le seul flux qui traverse le cylindre de Gauss est celui de la face plane du haut, située à l'*extérieur* du conducteur. Si l'aire de cette face est A, le théorème de Gauss nous donne $EA = \sigma_1 A/\varepsilon_0$, d'où

$$E = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} = \frac{|\sigma_1|}{\varepsilon_0}$$

Notons que ce champ est le champ résultant, produit par *toutes les charges* y compris celles qui sont à l'origine du champ extérieur, et non uniquement par σ_1.

Appliquer le même raisonnement à l'autre face aurait plutôt donné un champ résultant de module $E = |\sigma_2|/\varepsilon_0$. Ici encore, il s'agit du champ résultant et non de la seule contribution de σ_2. Ce nouveau résultat montre bien que le facteur $|\sigma|$ de l'équation 3.6*a* ne représente que la densité de charge portée par une seule surface et que cette équation demeure valable même si la densité surfacique de charge est différente sur chaque face. ■

Exemple 3.9

(a) Reprendre la question (a) de l'exemple précédent en utilisant la même surface de Gauss qu'à l'exemple 3.7. Comparer le résultat avec celui de l'exemple 3.7. (b) Pourrait-on utiliser la même surface de Gauss pour répondre à la question (c) de l'exemple précédent ?

Solution

(a) Dans le cas où il n'y a aucun champ extérieur, la densité de charge est égale sur chacune des deux faces. Ainsi, la symétrie planaire est préservée et on aurait pu utiliser une surface de Gauss en forme de cylindre dont les deux extrémités sont placées à égale distance de part et d'autre de la plaque. En effet, le champ a alors le même module à distance égale de part et d'autre de la plaque, donc le flux au travers de cette surface aurait été $2EA$.

Contrairement à l'exemple 3.7, la charge située à l'intérieur de la surface aurait été $2\sigma A$, puisque *chaque* face porte la densité de charge σ. On aurait donc obtenu $E = \sigma/\varepsilon_0$, c'est-à-dire l'équation 3.6*a*.

À première vue, on pourrait penser que l'équation 3.6*a* contredit l'équation 2.18, redémontrée à l'exemple 3.7, soit $E = \sigma/2\varepsilon_0$. Toutefois, la densité de charge σ dans ces deux équations n'a pas la même signification : dans l'équation 3.6*a*, elle désigne la densité d'*une seule face* de la plaque conductrice, alors que dans l'équation $E = \sigma/2\varepsilon_0$, elle désigne la densité surfacique *totale* de l'objet (celle des deux faces dans le cas

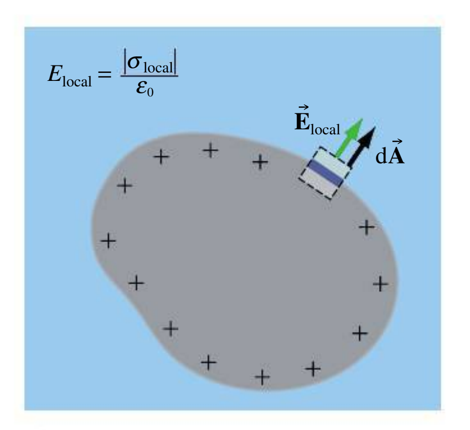
d'une plaque conductrice). Lorsqu'une plaque chargée est non conductrice, cette ambiguïté est inexistante, car la charge ne se divise pas entre les faces et la densité surfacique de charge demeure nécessairement celle de la plaque dans sa totalité. Toutefois, quand la plaque est *conductrice*, il faut toujours spécifier si on considère la charge d'une seule face ou de l'ensemble. ■

(b) En présence d'un champ extérieur, la symétrie sous réflexion est brisée et il devient inadéquat d'utiliser la même surface de Gauss qu'à l'exemple 3.7 : bien que le champ resterait constant sur chacune des deux extrémités de cette surface, sa valeur serait différente sur chaque extrémité. La seule option est donc de prendre une surface de Gauss qui passe par l'intérieur du matériau du conducteur, comme nous l'avons fait à l'exempe 3.8.

Le module du champ à proximité de la surface d'un conducteur

À l'exemple 3.8, nous avons démontré l'équation 3.6*a* dans le contexte d'une plaque conductrice infinie, mais nous allons maintenant montrer que cette équation peut aussi s'appliquer pour calculer de façon *approximative* le champ *local* à proximité de la surface de n'importe quel conducteur chargé, même si celui-ci n'est pas plan ou ne porte pas une charge uniforme.

En effet, le raisonnement qui a conduit à l'équation 3.6*a* n'impose aucune contrainte sur le rayon et la longueur de la surface de Gauss en forme de cylindre, pourvu que ses extrémités soient parallèles à la surface du conducteur, l'une à l'intérieur du matériau et l'autre à l'extérieur. À la figure 3.24, nous avons donc choisi une telle surface de Gauss, de forme cylindrique comme aux figures 3.20 (p. 107) et 3.23, qui enferme une portion de la surface d'un conducteur de forme quelconque. Si cette surface de Gauss est choisie suffisamment étroite (cylindre de petit rayon), la portion de surface conductrice qui se trouve dans le cylindre porte une densité *locale* de charge σ_{local} qui est approximativement constante. La charge dans la surface est donc $\sigma_{\text{local}}A$, où A est l'aire de la face du cylindre. De plus, si le cylindre est suffisamment court, le flux latéral peut être considéré comme négligeable (cela équivaut à ce que la face du cylindre soit suffisamment près de la surface chargée pour que le champ puisse localement être considéré comme perpendiculaire à cette surface chargée, la symétrie locale étant presque planaire). Le seul flux est donc celui que cause le champ local E_{local} au travers de l'extrémité du cylindre, soit $E_{\text{local}}A$. En appliquant le théorème de Gauss, on obtient



▲ **Figure 3.24**
À proximité d'un conducteur de forme quelconque, le champ local demeure très proche de $E = |\sigma|/\varepsilon_0$, où σ est la densité de charge locale.

$$E_{\text{local}} = \frac{|\sigma_{\text{local}}|}{\varepsilon_0} \qquad (3.6b)$$

Cette équation est identique à l'équation 3.6*a*, mais son application est strictement limitée au champ *immédiatement hors de la surface conductrice*. En effet, d'après cette équation, le champ E_{local} est constant et ne diminue pas en fonction de la distance au conducteur. Dans le cas d'un conducteur de dimensions finies, ce résultat ne peut être valable que dans les régions suffisamment proches de la surface pour qu'on puisse considérer celle-ci comme plane. L'équation 3.6*b* perd donc de sa validité quand on s'éloigne de la surface du conducteur, et en perd encore plus rapidement quand on s'éloigne de la surface d'une *aspérité* du conducteur.

Notez que le champ $\vec{\mathbf{E}}_{\text{local}}$ est produit par l'ensemble des charges en présence et non par la seule charge locale. En particulier, si le conducteur est plongé dans le champ extérieur causé par d'autres objets chargés, les charges de ceux-ci contribuent *aussi* à $\vec{\mathbf{E}}_{\text{local}}$ puisqu'il s'agit du champ *résultant*.

Exemple 3.10

Vérifier que l'équation 3.6*b* permet correctement d'obtenir le champ électrique produit à la surface d'une sphère métallique isolée de rayon R portant la charge Q.

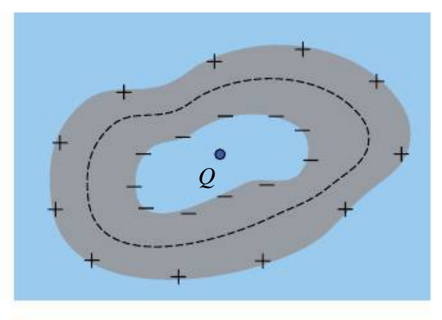
Solution

Bien que la surface de la sphère ne soit pas plane, elle porte une densité de charge uniforme, donc σ_{local} est ici une constante. Elle est donnée par $\sigma_{local} = \sigma = Q/A = Q/4\pi R^2$. L'équation 3.6*b* donne donc

$$E_{local} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{kQ}{R^2}$$

Cela correspond bien au résultat attendu. Notons que R est ici une constante égale au rayon de la sphère. Le champ ne possède le module kQ/R^2 qu'à la surface de la sphère : dès qu'on considère un point un peu plus éloigné, ce résultat cesse rapidement d'être valable, car le module du champ décroît très vite, en $1/r^2$. ■

Le cas d'une cavité à l'intérieur d'un conducteur



▲ **Figure 3.25**
Une charge ponctuelle Q à l'intérieur d'une cavité dans un conducteur induit des charges de même grandeur et de signes opposés sur la surface de la cavité et sur la surface extérieure du conducteur. Ici, Q est positif.

La figure 3.25 représente un conducteur avec une cavité dans laquelle se trouve une charge ponctuelle Q. On a tracé, en pointillés, une surface de Gauss quelconque qui entoure entièrement la cavité. Puisqu'elle se situe entièrement dans le matériau conducteur, $E = 0$ en chaque point de cette surface de Gauss, quelle que soit sa forme exacte. Le flux la traversant est donc nul. D'après le théorème de Gauss, il s'ensuit que la charge totale dans cette surface doit également être nulle. Ainsi, il ne peut y avoir seulement la charge Q : il doit y avoir aussi une charge induite $-Q$ sur la paroi intérieure de la cavité. Si le conducteur dans son ensemble est neutre, alors sa surface extérieure acquiert une charge $+Q$.

À la section 2.3, nous avons affirmé qu'une charge de même grandeur que la charge centrale mais de signe opposé était induite sur la face interne d'une telle cavité. Ce raisonnement n'était alors basé que sur le nombre égal de lignes de champ qui débutaient à la charge centrale et aboutissaient à la charge induite. La démonstration que nous venons de donner, fondée sur le théorème de Gauss, est plus rigoureuse.

Notons à nouveau que la séparation des charges dans un tel conducteur, due au champ externe produit par la charge centrale Q, est identique au phénomène de séparation des charges que nous avons décrit à la figure 1.7*a* (p. 12) et à la section 2.3.

Exemple 3.11

Soit une charge ponctuelle positive Q_1 placée au centre d'une coquille métallique sphérique de rayon R portant une charge totale négative $-Q_2$, telle que $Q_1 > Q_2$. (a) Trouver le module du champ à l'intérieur de la coquille et à l'extérieur de la coquille. (b) Préciser comment se distribuent les charges entre les deux surfaces de la coquille.

Solution

Le système formé par Q_1 et par les charges des deux surfaces de la coquille a la symétrie sphérique. On choisit donc comme surface de Gauss une sphère de rayon r centrée sur Q_1.

(a) Pour $r < R$, la charge à l'intérieur de la surface de Gauss est Q_1, et ainsi

$$E(4\pi r^2) = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

ce qui donne $E = kQ_1/r^2$.

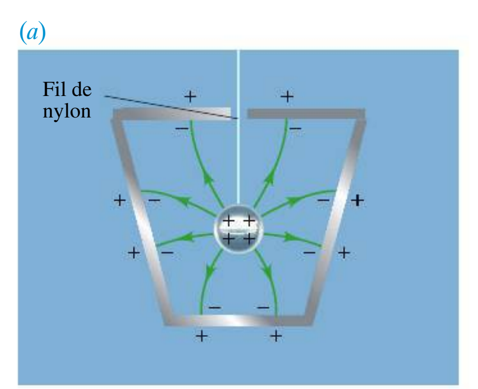
Pour $r > R$, la charge totale située à l'intérieur de la surface de Gauss est égale à $(Q_1) + (-Q_2)$ et est positive. Le flux est donc encore positif et le module du champ à l'extérieur de la coquille est $E = k(Q_1 - Q_2)/r^2$.

(b) Même si la coquille est suffisamment mince pour qu'on ne distingue pas son rayon interne de son rayon externe, il faut comprendre qu'elle a nécessairement une petite épaisseur et deux surfaces distinctes. Quand la surface de Gauss a un rayon $r = R$ (dans l'épaisseur du matériau conducteur), le flux est nul. Puisque cette surface de Gauss ne contient que Q_1 et la surface interne de la coquille, on déduit que la surface intérieure porte une charge $-Q_1$. Les deux surfaces de la coquille devant porter une charge totale $-Q_2$, la charge sur la surface extérieure est $Q_1 - Q_2$. ■

L'expérience du seau à glace de Faraday

Pour vérifier les valeurs des charges induites sur le conducteur, on peut refaire l'*expérience du seau à glace* de Faraday. On place une boule métallique chargée à l'intérieur d'un récipient creux en métal. On place ensuite un couvercle en métal sur le récipient. La boule induit des charges totales de même grandeur et de signes opposés sur les parois intérieure et extérieure du récipient (figure 3.26*a*). On peut tester avec un électroscope que la charge sur la surface externe n'est pas influencée par la position de la boule dans le seau. En fait, elle ne change pas davantage si la boule entre en contact avec la paroi intérieure : la charge de la boule et celle de la face intérieure se neutralisent mutuellement, ce qui ne change pas la charge sur la paroi extérieure, qui demeure égale à la charge initiale de la boule (figure 3.26*b*).

(*a*)



(*b*)

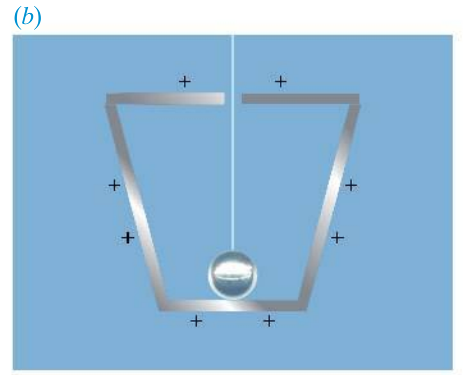


Figure 3.26

Dans l'expérience du seau à glace de Faraday, la charge d'une boule métallique est totalement transmise à la surface extérieure du seau métallique.

L'expérience de Cavendish

À l'exemple 3.4, nous avons montré que le champ électrique est parfaitement nul à l'intérieur d'une coquille sphérique chargée, et souligné que ce résultat pouvait aussi s'obtenir par intégration directe de la loi de Coulomb. Si cette loi n'avait pas une dépendance parfaite en $1/r^2$, un tel résultat théorique ne serait pas valable.

En 1771, plusieurs années avant les travaux de Coulomb, Henry Cavendish (1731-1810) a conçu une expérience simple qui corrobore la validité de ce facteur $1/r^2$: il plaça une coquille métallique B à l'intérieur d'une autre coquille métallique A composée de deux hémisphères (figure 3.27), les deux coquilles étant reliées entre elles par un fil métallique, puis il chargea la coquille A. Si les charges de A produisaient un champ dans la coquille A, ce champ aurait pour effet de déplacer des charges le long du fil et de charger B. Après avoir supprimé la connexion entre les deux coquilles et enlevé la coquille A, Cavendish ne put détecter aucune charge sur B ; il en conclut que la loi de Coulomb était valable. En tenant compte de l'incertitude de ses mesures, il pouvait affirmer

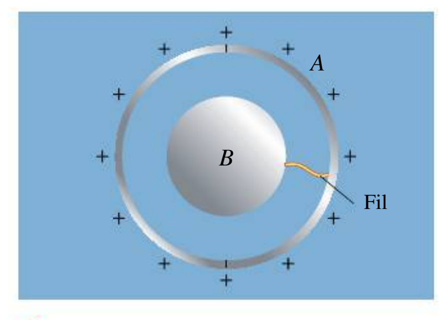


Figure 3.27

Une sphère métallique *B* est reliée par un fil à une sphère creuse *A*. Lorsque *A* est chargée, on ne détecte aucune charge sur *B*, ce qui est en accord avec le théorème de Gauss.

que la force est de la forme $1/r^n$, avec $n = 2 \pm 1/60$. Les versions modernes de cette technique ont permis de réduire l'incertitude à 10^{-16}.

Bien que Cavendish obtint ce résultat longtemps avant Coulomb, il ne le publia malheureusement pas, si bien que l'Histoire a retenu Coulomb à sa place.

3.6 LE THÉORÈME DE GAUSS ET LES DIÉLECTRIQUES

Nous allons maintenant préciser comment s'applique le théorème de Gauss en présence d'un diélectrique qu'on immerge dans un champ électrique extérieur $\vec{\mathbf{E}}_0$.

Quand le diélectrique se polarise, il devient la source d'un champ $\vec{\mathbf{E}}_p$ qu'on peut obtenir en remplaçant le diélectrique par des charges apparentes distribuées là où se trouvent les surfaces du diélectrique. Le champ résultant est $\vec{\mathbf{E}}_D = \vec{\mathbf{E}}_0 + \vec{\mathbf{E}}_p$ (voir la section 2.7). Rappelons que les charges sources à l'origine de $\vec{\mathbf{E}}_0$ sont appelées charges *libres*, alors que les charges apparentes à l'origine de $\vec{\mathbf{E}}_p$ sont appelées charges *liées* ou charges *de polarisation*. On les identifiera avec l'indice « p ».

Si on applique le théorème de Gauss sous la forme $\oint \vec{\mathbf{E}}_D \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\Sigma Q$ (équation 3.3*a*), alors le membre de droite doit tenir compte à la fois des charges liées et des charges libres. Si on l'applique plutôt sous la forme $\oint \kappa\varepsilon_0\vec{\mathbf{E}}_D \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \Sigma Q$ (équation 3.3*b*), alors le membre de droite ne tient compte que des charges libres. Dans les *deux* cas, on trouve dans l'intégrale le champ résultant $\vec{\mathbf{E}}_D$. On remarque que le membre de gauche de l'équation 3.3*a* est le flux du champ électrique $\vec{\mathbf{E}}_D$, alors que le membre de gauche de l'équation 3.3*b* est le flux de la quantité $\vec{\mathbf{D}} \equiv \kappa\varepsilon_0\vec{\mathbf{E}}_D$. Puisque κ peut varier sur l'intégrale, ces deux flux ne diffèrent *pas* en général d'un simple facteur constant.

Exemple 3.12

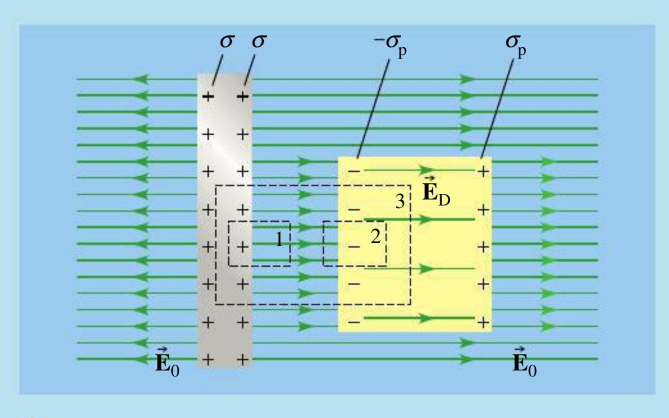
Une plaque conductrice infinie porte la densité de charge $\sigma = 2$ nC/m^2 sur chaque face. Parallèlement à l'une de ses faces, on place un bloc de diélectrique pour lequel $\kappa = 10$. Trouver (a) le module du champ hors du diélectrique, (b) le module du champ dans le diélectrique et (c) la densité de charge apparente σ_p sur les surfaces du diélectrique.

Solution

La figure 3.28 illustre trois surfaces de Gauss pertinentes, numérotées de 1 à 3, toutes en forme de cylindres dont les bases ont respectivement les surfaces A_1, A_2 et A_3, et sont situées à gauche et à droite sur la figure. Dans les trois cas, le flux qui traverse la face latérale courbe est nul.

(a) On utilise la surface de Gauss 1 avec l'équation 3.3*a*. Le flux est nul pour la face qui passe dans le conducteur et vaut E_0A_1 sur la face de droite. La charge intérieure est σA_1, donc l'équation 3.3*a* donne $E_0 = \sigma/\varepsilon_0 = 226$ N/C. L'équation 3.3*b* donne le même résultat puisque $\kappa = 1$ sur la face de droite.

(b) On utilise la surface de Gauss 2 avec l'équation 3.3*b*. Le flux du vecteur $\vec{\mathbf{D}}$ est respectivement $10\varepsilon_0E_DA_2$ et $-\varepsilon_0E_0A_2$ pour les faces de droite et de gauche, puisque $\kappa = 10$ à la face de droite et que $\kappa = 1$ à celle de gauche. Comme il n'y a aucune charge libre dans la surface 2, l'équation 3.3*b* devient $10\varepsilon_0E_DA_2 - \varepsilon_0E_0A_2 = 0$, d'où



▲ **Figure 3.28**

Ces trois surfaces de Gauss permettent d'obtenir et de confirmer chaque grandeur illustrée.

$E_D = E_0/10 = 22{,}6$ N/C. On obtient le même résultat en utilisant la surface de Gauss 3 avec l'équation 3.3*b* : le flux du vecteur $\vec{\mathbf{D}}$ est $\kappa\varepsilon_0 E_D A_3$ et il y a cette fois la charge intérieure libre σA_3. On a donc $E_D = \sigma/\kappa\varepsilon_0 = 22{,}6$ N/C.

(c) Maintenant qu'on connaît tous les champs, on peut utiliser la surface de Gauss 2 avec l'équation 3.3*a*. Le flux du vecteur $\vec{\mathbf{E}}$ sur les deux faces est $E_D A_2$ et $-E_0 A_2$ et la surface contient la charge liée $-\sigma_p A_2$. On a donc $E_D - E_0 = -\sigma_p/\varepsilon_0$, d'où $\sigma_p = 1{,}8$ nC/m^2. On peut vérifier que la surface 3 donne un résultat cohérent avec l'équation 3.3*a* : le flux est $E_D A_3$, et la charge intérieure, $[\sigma + (-\sigma_p)]A_3$, ce qui vérifie l'équation.

RÉSUMÉ



La notion de flux électrique Φ_E permet de traduire l'image d'une aire interceptée par les lignes de champ en une relation quantitative. Par définition, le flux traversant une surface plane d'aire $\vec{\mathbf{A}}$ située dans un champ électrique uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ est

$$\Phi_E = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = EA\cos\theta \qquad (3.1)$$

le vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ étant perpendiculaire au plan de la surface. Si le champ n'est pas uniforme ou si la surface n'est pas plane, il faut subdiviser la surface en éléments infinitésimaux $\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$, calculer le flux infinitésimal traversant l'un d'eux, soit $\mathrm{d}\Phi_E = \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$, puis intégrer. Le flux est alors défini par l'expression plus générale

$$\Phi_E = \int \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} \qquad (3.2)$$

Si la surface est fermée, on ajoute un cercle sur le symbole d'intégration et on dirige, par convention, les vecteurs $\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$ vers l'extérieur de la surface.

La symétrie d'une configuration de charge donnée détermine la symétrie du champ qu'elle produit : si une transformation (réflexion, rotation ou translation) laisse les charges inchangées, elle doit nécessairement laisser le champ inchangé.

Le théorème de Gauss est une loi générale qui s'applique aux champs électriques. Il met en relation le flux électrique traversant une surface fermée avec la charge totale Q située à l'intérieur de la surface :

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0} \qquad (3.3a)$$

Il convient de souligner que le champ $\vec{\mathbf{E}}$ doit inclure les contributions des charges qui *ne sont pas* situées à l'intérieur de la surface fermée, même si le flux total produit par ces charges est nul. Le théorème de Gauss permet de déterminer facilement le champ électrique si la distribution de charge est suffisamment symétrique pour que l'intégration soit simple. Dans ce cas, on peut choisir une surface de Gauss pour laquelle $\vec{\mathbf{E}}$ en un point donné est soit parallèle, soit perpendiculaire à l'élément $\mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$ en ce point.

Les propriétés suivantes caractérisent le champ électrique associé à un conducteur homogène en état d'équilibre électrostatique.

(a) $\vec{\mathbf{E}} = 0$ en tout point à l'intérieur d'un conducteur.

(b) Toute charge macroscopique portée par un conducteur est située sur la surface de celui-ci.

(c) $\vec{\mathbf{E}}$ est perpendiculaire à la surface d'un conducteur chargé (à proximité de la surface).

TERMES IMPORTANTS

densité volumique de charge (p. 104)
flux électrique (p. 92)
symétrie (p. 100)
symétrie cylindrique (p. 100)
symétrie planaire (p. 101)
symétrie sphérique (p. 101)
théorème de Gauss (p. 98)

RÉVISION

R1. Dans l'équation $\Phi = EA \cos \theta$, quelle est la valeur de θ si les lignes de champ ne font que raser la surface, sans la traverser ?

R2. Vrai ou faux ? Le flux sortant d'une surface fermée est toujours positif.

R3. Définissez chacun des symboles qui apparaissent dans l'énoncé du théorème de Gauss :

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

R4. Pourquoi faut-il connaître l'orientation des lignes de champ avant de commencer à appliquer le théorème de Gauss ?

R5. Lorsqu'on utilise le théorème de Gauss pour déterminer l'expression du champ électrique, quelles contraintes limitent le choix d'une surface de Gauss utile ?

R6. Vrai ou faux ? Pour obtenir la valeur du champ électrique en un point P à l'aide du théorème de Gauss, on doit calculer le flux électrique à travers une surface passant par le point P.

R7. Vrai ou faux ? Lorsqu'on utilise l'équation 3.3*a* pour établir le champ électrique *à l'intérieur* d'une sphère uniformément chargée, Q correspond à la charge totale de la sphère.

R8. Utilisez le théorème de Gauss pour démontrer que la charge nette sur un conducteur à l'équilibre électrostatique est située à la surface.

R9. Illustrez la disposition des charges et des lignes de champ dans les situations suivantes : (a) Une sphère conductrice de rayon a portant une charge $-Q$ située à l'intérieur d'une coquille conductrice de rayons intérieur b et extérieur c portant une charge $+2Q$. (b) Une sphère isolante de rayon a uniformément chargée portant une charge $+2Q$ située à l'intérieur d'une coquille conductrice de rayons intérieur b et extérieur c portant une charge $-Q$ ($Q > 0$).

QUESTIONS

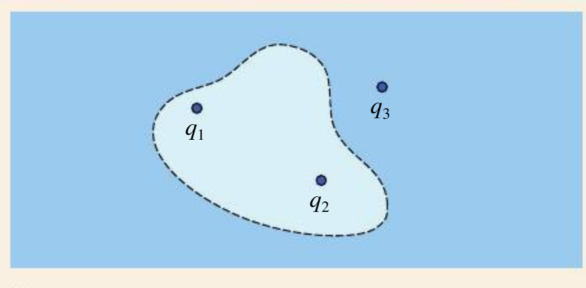
(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

Q1. Une charge ponctuelle positive est placée au centre d'un cube métallique non chargé. Dessinez les lignes de champ électrique à l'intérieur du cube. La charge induite sur le cube est-elle répartie uniformément ?

Q2. Soit une charge Q à l'intérieur d'une surface de Gauss cubique. Quels renseignements peut-on tirer du théorème de Gauss en ce qui concerne : (a) la position de la charge ; (b) le flux total traversant la surface ; (c) le champ électrique en un point quelconque de la surface ?

Q3. Le flux total traversant une surface de Gauss est nul. (a) Quelle est la charge à l'intérieur ? (b) Peut-on dire que $E = 0$ en tout point de la surface ?

Q4. Soit les trois charges et la surface de Gauss représentées à la figure 3.29. (a) Quelles sont les charges qui contribuent au flux total traversant la surface de Gauss ? (b) Quelles sont les charges qui contribuent au champ en un point donné de la surface ? (c) Écrivez le théorème de Gauss pour la surface.



▲ **Figure 3.29**
Question 4.

Q5. Soit une charge répartie uniformément sur la circonférence d'un cercle. Peut-on utiliser le théorème de Gauss pour calculer le champ ? Si oui, en quels points ?

Q6. Soit une charge ponctuelle Q située à l'intérieur d'une sphère métallique creuse ailleurs qu'au centre. (a) Le champ à l'intérieur de la sphère est-il déterminé uniquement par la charge à l'intérieur de la sphère ? (b) Quel est le flux total traversant une surface fermée située à l'intérieur

de la sphère et entourant la charge ? (c) Peut-on utiliser le théorème de Gauss pour calculer le champ à la surface ?

Q7. (a) Si la charge à l'intérieur d'une surface est nulle, peut-on en déduire que le champ est nul en tout point de la surface ? (b) Si le champ est nul en tout point de la surface, peut-on en déduire que la charge à l'intérieur est nulle ?

Q8. Laquelle des affirmations suivantes est la bonne ? D'après le théorème de Gauss, le champ électrique est déterminé par (a) la charge à l'intérieur de la surface de Gauss ; (b) la charge sur la surface de Gauss ; (c) toutes les charges qui contribuent au champ en un point quelconque de la surface de Gauss.

Q9. Vrai ou faux ? Pour pouvoir utiliser le théorème de Gauss afin de déterminer le champ électrique, on doit connaître les positions de toutes les charges qui contribuent au champ.

Q10. À l'aide du théorème de Gauss, montrez que les lignes du champ électrique doivent partir de charges ponctuelles ou y aboutir.

Q11. Quel renseignement nous donne le théorème de Gauss en ce qui concerne le champ créé par un dipôle ?

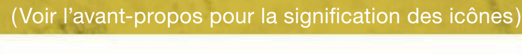
Q12. Une coquille métallique isolée a une charge $+Q$ sur sa surface intérieure de rayon a et une charge $-Q$ sur sa surface extérieure de rayon b. Que pouvez-vous en déduire ?

Q13. Une coquille métallique a une charge de densité surfacique uniforme égale à $-\sigma$ sur sa surface intérieure de rayon a et une charge de densité surfacique uniforme $+\sigma$ sur sa surface extérieure de rayon b. Que pouvez-vous en déduire ?

Q14. Soit une charge ponctuelle Q située au centre d'une sphère creuse conductrice et une charge ponctuelle q à l'extérieur de la sphère. (a) La charge q est-elle soumise à une force ? (b) La charge Q est-elle soumise à une force ? (c) S'il y a une différence entre les forces agissant sur les charges, conciliez votre réponse avec la troisième loi de Newton.

Q15. À l'aide d'une recherche appropriée sur Internet, nommez un être vivant qui (a) est symétrique sous réflexion, (b) est symétrique sous rotation de 72°, (c) a une symétrie cylindrique et (d) a une symétrie sphérique.

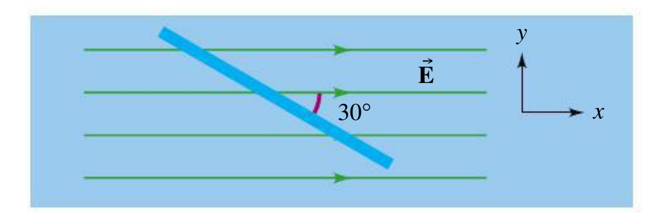
EXERCICES



Dans les exercices suivants, lorsque le sens du vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ est ambigu, on le choisit pour que Φ_E soit positif. De plus, sauf mention du contraire, on suppose que les situations décrites se déroulent dans le vide.

3.1 Flux électrique

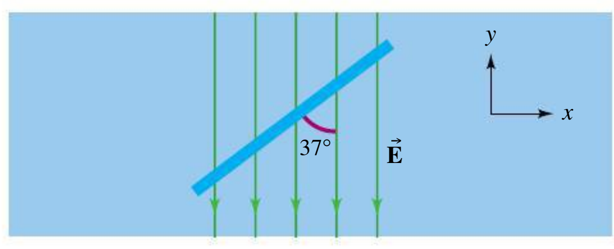
E1. (I) Soit une plaque circulaire de rayon 12 cm. Son plan fait un angle de 30° avec un champ uniforme $\vec{\mathbf{E}} = 450\vec{\mathbf{i}}$ N/C (figure 3.30). Quel est le flux électrique traversant la plaque ?



▲ **Figure 3.30**

Exercice 1.

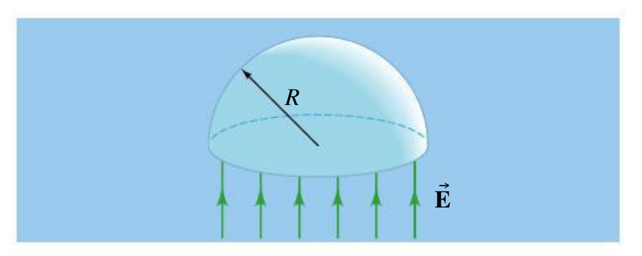
E2. (I) Une plaque rectangulaire plane de dimensions 4 cm × 6 cm fait un angle de 37° avec un champ électrique uniforme $\vec{\mathbf{E}} = -600\vec{\mathbf{j}}$ N/C (figure 3.31). Quel est le flux électrique traversant la plaque ?



▲ **Figure 3.31**

Exercice 2.

E3. MonLab (I) Soit un champ électrique uniforme E parallèle à l'axe central d'un hémisphère de rayon R (figure 3.32). Quel est le flux électrique traversant l'hémisphère ?



▲ **Figure 3.32**

Exercice 3.

E4. (I) Soit une plaque carrée de 12 cm de côté située dans le plan xy. Quel est le flux électrique traversant la plaque dans un champ électrique uniforme $\vec{\mathbf{E}} = (70\vec{\mathbf{i}} + 90\vec{\mathbf{k}})$ N/C ?

3.2 à 3.5 Théorème de Gauss, symétrie, conducteurs

E5. MonLab (I) Soit deux charges, $q_1 = 6$ μC et $q_2 = -8$ μC, à l'intérieur d'une surface de Gauss sphérique de rayon 5 cm. Quel est le flux électrique total traversant la surface ?

E6. MonLab (I) Le flux à travers chaque face d'une surface de Gauss cubique d'arête 10 cm est égal à 3×10^4 N·m²/C. (a) Quelle est la charge à l'intérieur ? (b) Le flux traversant le cube ne dépendant que de cette charge, pourquoi est-il impossible qu'elle ne soit pas au centre du cube ?

E7. (I) Soit une charge de 60 μC située au centre d'une surface de Gauss cubique d'arête 10 cm. (a) Quel est le flux total traversant la surface totale du cube ? (b) Quel est le flux électrique à travers une face du cube ? (c) Vos réponses aux questions (a) ou (b) seraient-elles différentes si la charge n'était pas située au centre ?

E8. (I) On donne une charge ponctuelle Q positive située à l'un des sommets d'une surface de Gauss ayant la forme d'un cube d'arête L. Quel est le flux électrique à travers chaque face ?

E9. MonLab (I) Un conducteur sphérique de rayon 8 cm a une densité surfacique de charge uniforme égale à 0,1 nC/m². Déterminez le champ électrique : (a) sur la surface du conducteur ; (b) à une distance de 10 cm du centre du conducteur.

E10. MonLab (I) Une charge ponctuelle de 16 μC est placée au centre d'une coquille conductrice portant une charge de −8 μC. (a) Déterminez le champ électrique à l'intérieur et à l'extérieur de la coquille. (b) Quelles sont les charges sur les surfaces intérieure et extérieure de la coquille ? (c) Dessinez les lignes de champ.

E11. (I) Montrez que le module du champ à la surface d'une coquille sphérique uniformément chargée est $E = |\sigma|/\varepsilon_0$, $|\sigma|$ étant la densité surfacique de charge.

E12. (I) Le champ électrique en tout point d'une surface sphérique de rayon 2 cm a un module de 800 N/C et il est radial et orienté vers l'intérieur. (a) Quelle est la charge à l'intérieur ? (b) La charge doit-elle être ponctuelle et située au centre ? Sinon, quelles sont les autres possibilités ?

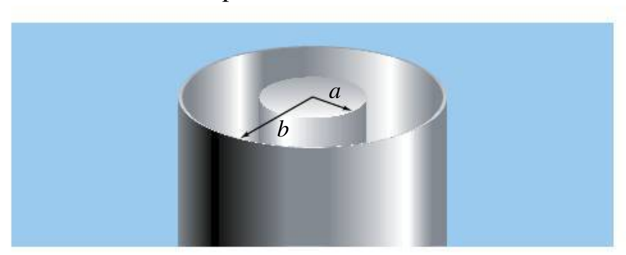
E13. (I) Soit deux plaques chargées, infinies et parallèles, ayant une même densité surfacique de charge égale à σ. Quel est le module du champ électrique (a) dans la région comprise entre les plaques, et (b) dans les régions non comprises entre les plaques ?

E14. (I) Une plaque infinie non conductrice a une densité surfacique de charge positive égale à σ sur chaque face. Elle est parallèle à une plaque analogue de densité $-\sigma$ sur chaque face. Déterminez le module du champ électrique (a) dans la région comprise entre les plaques, et (b) à l'intérieur de la plaque positive. Négligez la polarisation du matériau de la plaque.

E15. (I) Deux plaques conductrices infinies sont parallèles entre elles. Elles portent des densités surfaciques de charge $+\sigma$ et $-\sigma$. Quel est le module du champ électrique résultant (a) entre les plaques ; (b) dans les régions non comprises entre les plaques ($\sigma > 0$) ?

E16. (II) Un cube d'arête L a l'un de ses sommets à l'origine et trois de ses arêtes sur les axes x, y et z, respectivement. Il est placé dans un champ $\vec{\mathbf{E}} = (a + bx)\vec{\mathbf{i}}$. (a) Quel est le flux total traversant le cube ? (b) Quelle est la charge à l'intérieur du cube ?

E17. (I) On considère le long câble coaxial linéaire de la figure 3.33 ; le conducteur intérieur de rayon a a une densité surfacique de charge σ_1 et l'enveloppe extérieure cylindrique de rayon b a une densité surfacique de charge σ_2. Trouvez la relation entre σ_1 et σ_2 pour que le champ électrique soit nul à l'extérieur du câble, c'est-à-dire pour $r > b$.



▲ **Figure 3.33**
Exercices 17, 18, 19, 20 et 26.

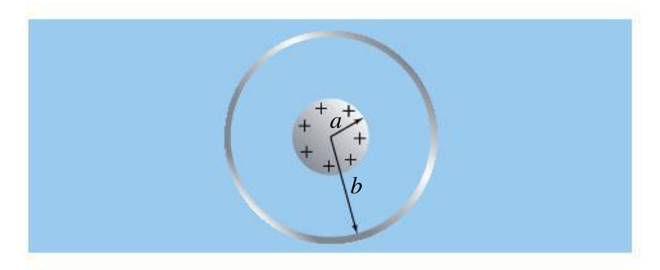
E18. MonLab (I) On considère le long câble coaxial linéaire de la figure 3.33 ; le conducteur intérieur de rayon a a une densité surfacique de charge σ positive et l'enveloppe extérieure cylindrique de rayon b a une densité $-\sigma$. Trouvez l'expression du module du champ électrique résultant dans les régions (a) $a < r < b$; (b) $r > b$.

E19. (I) On considère le long câble coaxial linéaire de la figure 3.33 ; le conducteur intérieur de rayon a porte une densité linéique de charge λ_1 et l'enveloppe extérieure cylindrique de rayon b porte λ_2. Quelle est la relation entre λ_1 et λ_2 pour que le champ électrique soit nul à l'extérieur du câble ($r > b$) ?

E20. (I) Soit le long câble coaxial linéaire de la figure 3.33 ; le conducteur intérieur de rayon a porte une densité

linéique de charge λ positive et l'enveloppe extérieure cylindrique de rayon b porte une densité linéaire $-\lambda$. Trouvez l'expression du module du champ électrique dans les régions (a) $a < r < b$; (b) $r > b$.

E21. (I) Une sphère métallique de charge Q positive et de rayon a est placée au centre d'une coquille sphérique métallique de rayon b portant une charge $-Q$ (figure 3.34). Trouvez l'expression du module du champ électrique résultant en fonction de la distance r au centre commun des sphères, pour (a) $a < r < b$; (b) $r > b$.



▲ **Figure 3.34**

Exercices 21, 22 et 23.

E22. (I) Une sphère métallique de charge positive et de rayon a est placée au centre d'une coquille sphérique métallique de rayon b (figure 3.34). La sphère et la coquille portent des densités surfaciques de charges $+\sigma$ et $-\sigma$. Trouvez l'expression du module du champ électrique résultant en fonction de la distance r au centre commun des sphères, pour (a) $a < r < b$; (b) $r > b$. (c) Donnez une valeur plausible à σ, a et b et tracez le graphe montrant la composante radiale du champ électrique résultant en fonction de r, pour r allant de 0 à $2b$.

E23. MonLab (I) Une sphère métallique de charge positive et de rayon a est placée au centre d'une coquille sphérique métallique de rayon b (figure 3.34). Quelle doit être la relation entre les densités surfaciques de charge pour que le champ électrique résultant soit nul pour $r > b$?

E24. (II) Une charge ponctuelle Q positive est placée au centre d'une coquille sphérique conductrice non chargée de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2. (a) Quelles sont les densités surfaciques de charge sur les surfaces intérieure et extérieure de la coquille ? (b) Quel est le module du champ électrique résultant pour $r < R_1$? (c) Trouvez le module du champ pour $r > R_2$? (d) Si on éloigne la charge Q du centre, peut-on utiliser le théorème de Gauss pour trouver le champ à l'extérieur de la sphère ?

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

3.2 à 3.5 Théorème de Gauss, symétrie, conducteurs

E25. (I) Un cylindre conducteur de rayon 12 cm et de longueur infinie porte une charge de densité linéique $\lambda = 3$ nC/m. Quel est le module du champ électrique à 10 cm de la surface directement vers l'extérieur ?

E26. (I) Un câble coaxial tel que décrit à la figure 3.33 porte une charge de densité linéique 3 nC/m sur son cylindre intérieur de rayon $a = 2$ cm et de -7 nC/m sur son cylindre extérieur de rayon $b = 5$ cm. Trouvez le module du champ électrique résultant à (a) 4 cm du centre ; (b) 8 cm du centre.

E27. (I) À 12 cm, dans la direction radiale, d'une sphère conductrice de rayon 10 cm, le champ électrique est de 1800 N/C et son orientation pointe vers l'intérieur de la sphère. Trouvez la densité surfacique de charge sur la sphère.

E28. (I) Deux minces coquilles métalliques, sphériques et concentriques ont des rayons de 6 cm et 8 cm. La coquille intérieure porte une charge de 7 nC et la coquille extérieure, une charge de 4 nC. Trouvez le champ électrique résultant à (a) 7 cm du centre ; (b) 10 cm du centre.

E29. (II) Le centre d'un cube est à l'origine d'un système de coordonnées. Les arêtes du cube sont de 40 cm et ses côtés sont parallèles aux axes du système. Une charge ponctuelle de 2,2 nC est à l'origine et un champ électrique extérieur valant $-500\vec{\mathbf{j}}$ N/C est présent. Quelle est l'intensité du flux électrique à travers les deux faces du cube parallèles au plan xz et situées à (a) $y = -20$ cm ; (b) $y = +20$ cm ?

E30. (I) Une sphère métallique de charge positive $2Q$ et de rayon R est placée au centre d'une mince coquille sphérique métallique de rayon $2R$ et de charge $-3Q$. Trouvez l'expression du module du champ électrique résultant dans la région (a) entre la sphère et la coquille ; (b) à l'extérieur de la coquille.

E31. (II) Une sphère non conductrice de rayon 10 cm porte une charge uniformément distribuée dans tout son volume. À 5 cm du centre de la sphère, le champ électrique est de 2000 N/C et son orientation pointe vers l'extérieur. Trouvez (a) la densité volumique de charge de la sphère ; (b) le module du champ électrique à 20 cm du centre. Négligez la polarisation du matériau de la sphère.

E32. (I) La base d'une pyramide est un carré de côté L. La hauteur de la pyramide est H. Un champ électrique E est perpendiculaire à la base de la pyramide. Quel est le flux électrique à travers chacune des faces de la pyramide ?

3.6 Théorème de Gauss et diélectriques

E33. (II) On considère la membrane d'une cellule vivante comme un mur plan et lisse d'épaisseur d. De chaque côté, il y a de l'eau (de constante diélectrique κ), où la concentration d'ions en solution dépend de la distance r à la surface (voir les figures 2.51*b*, p. 70 et 5.27, p. 196), de sorte que la charge volumique du milieu aqueux est $\rho = Ce^{-r/\lambda}$, où λ et C sont des constantes. (a) Quelle est la charge totale par unité de surface de chaque côté de la membrane ? (b) Du côté positif, quel est le module du champ électrique en fonction de r ?

PROBLÈMES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

P1. (I) Une sphère non conductrice de rayon R a une densité volumique de charge uniforme ρ positive. En négligeant la polarisation du matériau de la sphère, déterminez le champ électrique à une distance r du centre pour (a) $r < R$; (b) $r > R$. Vos résultats concordent-ils pour $r = R$? (c) Donnez une valeur plausible à ρ et à R, et tracez le graphe montrant la composante radiale du champ électrique résultant en fonction de r, pour r allant de 0 à $2R$.

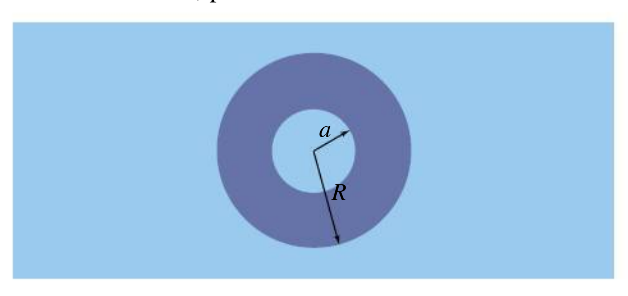
P2. (II) (a) Refaites le problème P1 pour une densité non uniforme $\rho(r) = Ar$, A étant une constante positive. Exprimez vos réponses en fonction de la charge totale Q. (b) Donnez une valeur plausible à ce paramètre afin de réaliser le graphe de la question (c) du problème P1. (*Indice* : La charge à l'intérieur d'une coquille d'épaisseur dr est d$q = \rho$ d$V = \rho(4\pi r^2)$ dr.)

P3. (I) Une coquille conductrice de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 porte une densité surfacique de charge σ positive à l'intérieur et $-\sigma$ à l'extérieur. (a) Que pouvez-vous dire au sujet de la charge à l'intérieur de la coquille ? (b) Que pouvez-vous dire au sujet de la charge sur la coquille ? (c) Déterminez le champ électrique à l'extérieur de la coquille.

P4. (I) Un conducteur a une densité surfacique de charge σ positive. Montrez que la force par unité d'aire agissant sur la surface est $\sigma^2/2\varepsilon_0$. (*Indice* : Le champ électrique à la surface est composé de deux contributions. De plus, une charge statique n'est pas soumise à une force due à son propre champ.)

P5. MonLab (I) Une charge est uniformément répartie dans un cylindre infiniment long de rayon R. La densité volumique de charge positive est ρ. Déterminez le champ électrique à la distance r du centre pour (a) $r < R$; (b) $r > R$. Vos résultats concordent-ils pour $r = R$?

P6. (I) Soit une cavité de rayon a au centre d'une sphère non conductrice de rayon R. Le reste de la sphère possède une densité volumique de charge uniforme ρ positive (figure 3.35). On néglige la polarisation du matériau. Quel est le champ électrique dans les régions suivantes : (a) $r > R$; (b) $a < r < R$? (*Indice* : La charge à l'intérieur d'une coquille d'épaisseur dr est d$q = \rho$ d$V = \rho(4\pi r^2)$ dr.) (c) Donnez une valeur plausible à ρ, à a et à R, et tracez le graphe montrant la composante radiale du champ électrique résultant en fonction de r, pour r allant de 0 à $2R$.



▲ **Figure 3.35**
Problèmes 6 et 10.

P7. (II) Considérons un modèle de l'atome d'hydrogène dans lequel le noyau est une charge ponctuelle de valeur $+e$ entouré d'une charge négative $-e$ distribuée uniformément dans le volume d'une sphère de rayon R. (a) Montrez que le module du champ électrique résultant dans la région pour laquelle $r < R$ est donné par

$$E(r) = ke\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{R^3}\right)$$

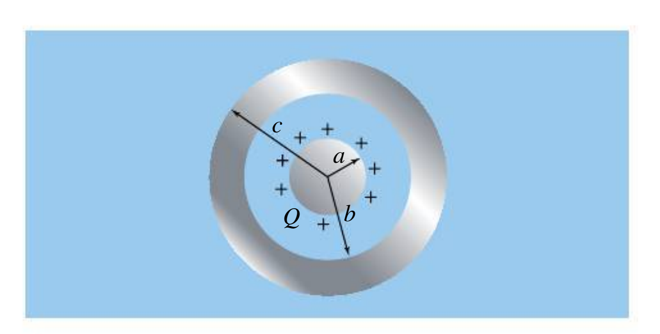
(b) Pour quelle valeur de r le module du champ électrique est-il maximal ? (c) Supposez que $R = 10^{-10}$ m. Tracez le graphe de $E(r)$ en fonction de r, pour r allant de 0 à R.

P8. (I) Le théorème de Gauss pour le champ gravitationnel s'écrit

$$\oint \vec{\mathbf{g}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}} = -4\pi G m$$

$\vec{\mathbf{g}}$ étant le champ gravitationnel, G la constante de gravitation universelle et m la masse à l'intérieur de la surface de Gauss. Montrez que l'on peut établir la loi de la gravitation universelle de Newton à partir de cette expression. Quelle est la signification du signe négatif ?

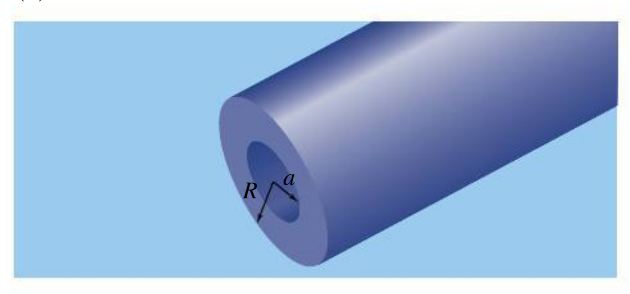
P9. (I) Une sphère métallique de rayon a portant une charge Q positive est située au centre d'une épaisse coquille métallique non chargée de rayon intérieur b et de rayon extérieur c (figure 3.36). Déterminez le champ électrique résultant dans les régions suivantes : (a) $a < r < b$; (b) $r > c$.



▲ **Figure 3.36**
Problème 9.

P10. (II) Soit une cavité sphérique de rayon a au centre d'une sphère non conductrice de rayon R (figure 3.35). La densité volumique de charge dans le reste de la sphère varie selon $\rho = A/r$, où A est une constante positive. Déterminez le champ électrique pour $a < r < R$, en négligeant la polarisation du matériau. (*Indice*: La charge à l'intérieur d'une coquille d'épaisseur dr est d$q = \rho$ d$V = \rho(4\pi r^2)$ dr.)

P11. (I) Soit un cylindre infini de rayon R ayant un trou de rayon a le long de son axe central (figure 3.37). Le reste du cylindre possède une densité volumique de charge uniforme ρ positive. Déterminez le champ électrique dans les régions suivantes: (a) $a < r < R$; (b) $r > R$.

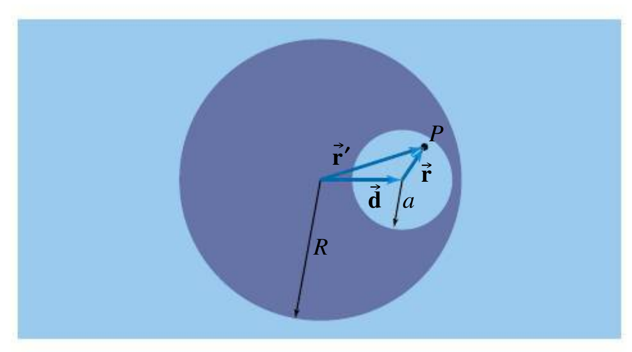


▲ **Figure 3.37**
Problème 11.

P12. (I) La densité de charge à l'intérieur d'une sphère non conductrice de rayon R varie selon $\rho = \rho_0(1 - r/R)$, ρ_0 étant une constante positive et r étant la distance à partir du centre. En négligeant la polarisation du matériau, déterminez le champ électrique dans la région où $r < R$. (*Indice*: La charge à l'intérieur d'une coquille d'épaisseur dr est d$q = \rho$ d$V = \rho(4\pi r^2)$ dr.)

P13. (I) Soit une plaque non conductrice infinie d'épaisseur t possédant une densité volumique de charge uniforme ρ positive. Déterminez le module du champ électrique en fonction de la distance au plan central de symétrie de la plaque. Négligez la polarisation du matériau.

P14. (II) Une sphère de rayon R possède une densité volumique de charge uniforme ρ positive, sauf dans la cavité sphérique de rayon a (figure 3.38). (a) Montrez que le champ électrique est uniforme à l'intérieur de la cavité. (*Indice*: Le champ en tout point P à l'intérieur d'une cavité est égal à la somme des champs créés par une sphère pleine de rayon R portant une densité de charge e et par une sphère de rayon a remplissant la cavité et de densité de charge $-\rho$.) (b) Établissez une expression pour le champ électrique à l'intérieur de la cavité.



▲ **Figure 3.38**
Problème 14.

CHAPITRE 4

LE POTENTIEL ÉLECTRIQUE



SOMMAIRE



La vie quotidienne regorge d'exemples dans lesquels intervient le *volt*, unité de mesure de la *différence de potentiel*, aussi appelée « voltage » ou « tension ». Dans ce chapitre, nous verrons que cette notion de potentiel électrique est reliée à celle d'énergie, mais aussi à celle de champ électrique.

Dans les chapitres précédents, nous avons souligné l'analogie entre les forces électrique et gravitationnelle. Dans ce chapitre, nous utiliserons cette analogie dans le contexte du principe de conservation de l'énergie mécanique. Nous verrons que, tout comme une masse libre de se déplacer a tendance à diminuer son énergie potentielle gravitationnelle, une charge libre a tendance à diminuer son *énergie potentielle électrique*.

Pour décrire cette nouvelle forme d'énergie potentielle, nous ferons appel au *potentiel électrique*, une propriété que les charges sources permettent d'attribuer aux points de l'espace. L'énergie potentielle d'une charge positive est proportionnelle au potentiel de l'endroit où la charge se trouve, un peu comme l'énergie potentielle d'une masse est proportionnelle à l'altitude de l'endroit où la masse se trouve. Dans la section 4.1, nous aurons souvent recours à cette analogie entre potentiel et altitude pour présenter d'un point de vue qualitatif les nouveaux concepts de ce chapitre.

Au terme de ce chapitre, une même situation pourra être décrite soit au moyen du champ et de la force, qui sont des *vecteurs*, soit au moyen du potentiel et de l'énergie, qui sont des *scalaires*.

4.1 LE POTENTIEL ÉLECTRIQUE

Puisque la force électrique entre deux charges dans le vide $F = k|qQ|/r^2$ est analogue à la force gravitationnelle entre deux masses $F = G|mM|/r^2$, il semble évident qu'on pourra définir une énergie potentielle électrique, tout comme nous avons pu définir une énergie potentielle gravitationnelle au tome 1. Plus loin, nous justifierons cette hypothèse de façon formelle.

Au chapitre 2, nous avons vu comment décrire la force électrique que subit une charge cible q à l'aide d'un modèle *en deux étapes* : 1) les charges sources produisent un champ $\vec{\mathbf{E}}$ dans l'espace qui les entoure ; 2) ce champ exerce sur q une force $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}$. Nous allons maintenant voir que l'énergie potentielle électrique « de la charge q* » peut aussi être décrite à l'aide d'un modèle *en deux étapes* : 1) les charges sources permettent d'attribuer un potentiel V à l'espace qui les entoure ; 2) l'énergie potentielle électrique de la charge q est $U_E = qV$.

Comme le champ, le potentiel ne dépend que des charges sources.

Au chapitre 2, nous avons donné une définition opérationnelle du champ où on utilisait une charge d'essai q_{ess} pour déterminer le rapport $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{F}}/q_{ess}$, une grandeur qui ne dépend *pas* de q_{ess} mais seulement des charges sources. De façon similaire, le **potentiel électrique** V est défini comme « l'énergie potentielle électrique U_E par unité de charge » que possède q_{ess}, rapport qui ne dépend *pas* de q_{ess} mais seulement des charges sources :

$$V = \frac{U_E}{q_{ess}}$$

Selon cette définition, l'**énergie potentielle électrique** d'une charge q, quand celle-ci est placée en un point dont le potentiel est V, est donnée par

Énergie potentielle électrique d'une charge en fonction du potentiel de l'endroit où elle se trouve

$$U_E = qV \qquad (4.1)$$

Cette équation est toujours valable, que la charge q soit dans le vide, dans un conducteur ou dans un diélectrique. L'unité SI du potentiel électrique est le **volt** (V), appelée ainsi en hommage à Alessandro Volta (1745-1827), inventeur de la pile voltaïque (la première pile électrique). Selon l'équation 4.1,

$$1\ \text{V} = 1\ \text{J/C}$$

Sa définition montre que le potentiel V est relié à l'énergie U_E, mais on note aussi que V et $\vec{\mathbf{E}}$ sont deux grandeurs qui ne dépendent que des charges sources, ce qui laisse deviner qu'elles ne sont pas indépendantes l'une de l'autre. La section 4.2 explorera la relation entre V et U_E, en appliquant le principe de conservation de l'énergie mécanique, alors que la section 4.3 explorera la

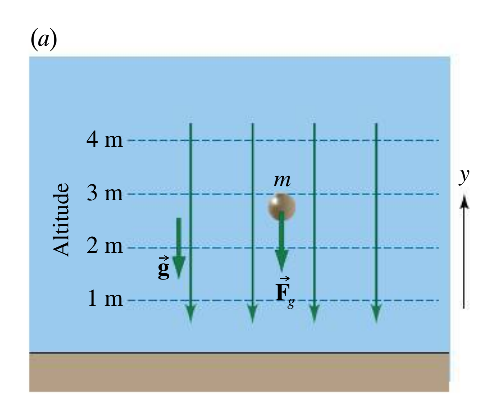
* En fait, U_E est l'énergie potentielle *du système* formé à la fois des charges sources et de la charge cible q. Mais quand les charges sources sont considérées comme immobiles, comme c'est le cas dans ce chapitre, on dit souvent que U_E est l'énergie potentielle « de la charge q ». De façon semblable, on disait au tome 1 que $U_g = mgy$ était l'énergie potentielle gravitationnelle « de la masse m », alors qu'il s'agissait de l'énergie potentielle *du système* formé par la Terre et la masse.

relation entre V et $\vec{\mathbf{E}}$, montrant comment calculer l'un en fonction de l'autre. D'ici là, le reste de cette section présentera un survol qualitatif complet de ces deux liens importants à l'aide de quelques situations concrètes.

Cas d'une charge positive dans un champ uniforme

Considérons d'abord l'analogie entre le champ gravitationnel uniforme $\vec{\mathbf{g}}$ qui règne à proximité de la surface terrestre et celui du champ électrique uniforme $\vec{\mathbf{E}}$ qui règne entre deux plaques chargées (figure 4.1). Si on lance une masse m dans le champ $\vec{\mathbf{g}}$, elle subit la force $m\vec{\mathbf{g}}$, et si on lance une charge q dans le champ $\vec{\mathbf{E}}$, elle subit la force $q\vec{\mathbf{E}}$. Toutes deux décrivent une trajectoire parabolique sous l'effet de ces forces constantes, mais l'analogie est meilleure si q est positive (puisque m est forcément positive).

(*a*)



(*b*)

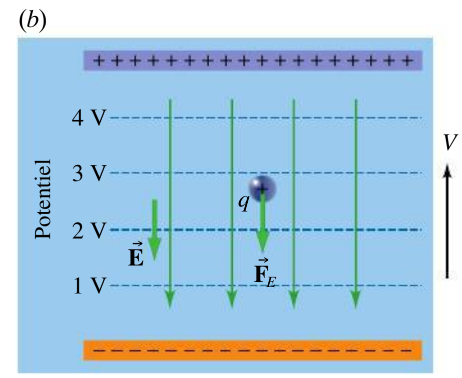


Figure 4.1

(*a*) La force sur la masse m est parallèle au champ $\vec{\mathbf{g}}$. Il s'ensuit que l'énergie potentielle décroît quand m tombe le long d'une ligne de champ, c'est-à-dire vers des points dont l'altitude y est plus faible. (*b*) La force sur la charge q *positive* est parallèle au champ $\vec{\mathbf{E}}$. Il s'ensuit que l'énergie potentielle décroît quand q « tombe » le long d'une ligne de champ, c'est-à-dire vers des points dont le potentiel électrique V est plus faible.

Quand on lâche la masse m ou la charge q sans vitesse initiale dans leur champ respectif, elles accélèrent en suivant le sens des lignes de champ rectilignes, c'est-à-dire qu'elles gagnent de l'énergie cinétique tout en perdant de l'énergie potentielle. Or, m tombe vers les points dont l'altitude y est plus faible, puisque son énergie potentielle $U_g = mgy$ est proportionnelle à l'altitude y. De même, q « tombe » vers les points dont le potentiel V est plus faible, puisque son énergie potentielle $U_E = qV$ est proportionnelle au potentiel V. On en déduit que *le potentiel est analogue à l'altitude.*

Une charge positive « tombe » vers les endroits de potentiel plus faible.

Mais qu'est-ce que l'altitude ? C'est simplement une grandeur y, constante dans le temps, associée à chaque point de l'espace (que la masse m soit présente ou non) et dont la valeur diminue quand on s'approche de la Terre, c'est-à-dire quand on longe une ligne de champ $\vec{\mathbf{g}}$. En l'absence de la Terre, il n'y aurait ni champ $\vec{\mathbf{g}}$ ni altitude ; c'est donc la présence de la Terre qui permet d'associer une altitude aux points. Il en va de même du potentiel électrique : c'est une grandeur V, constante dans le temps, que la présence des charges sources permet d'associer à chaque point de l'espace, et qui diminue quand on longe une ligne de champ $\vec{\mathbf{E}}$. Cette conclusion est valable *même si le champ* $\vec{\mathbf{E}}$ *n'est pas orienté vers le bas comme sur la figure 4.1.* Tout comme l'altitude est mesurée par rapport au niveau du sol où on prend $y = 0$, le potentiel électrique est lui aussi mesuré par rapport à une **position de référence**. Par exemple, à la figure 4.1*b*, on a considéré que $V = 0$ à la plaque négative.



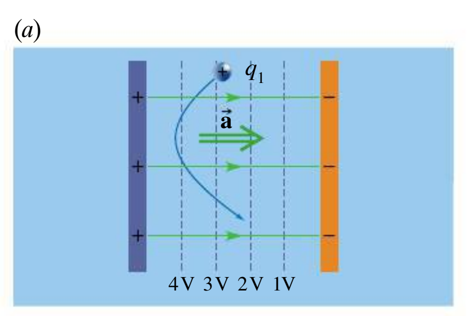
Ce parachutiste perd de l'énergie potentielle en tombant, tout comme une charge *positive* perd de l'énergie potentielle lorsqu'elle « tombe » en suivant les lignes de champ électrique. Le potentiel électrique est l'équivalent de l'« altitude » de la charge le long d'une ligne de champ électrique.

Soulignons que le potentiel V ne dépend que des charges sources, tout comme l'altitude y ne dépend que de la distance par rapport à la Terre. On peut certes dire qu'un avion « a » une altitude $y = 10$ km ou qu'une charge q « a » un potentiel de $V = 200$ V, mais l'altitude et le potentiel sont en fait des propriétés *de l'endroit* où ces objets sont situés et non des objets eux-mêmes.

Cas d'une charge négative dans un champ uniforme

Comparons maintenant la trajectoire d'une charge q_1 positive et d'une charge q_2 négative quand on les lance dans un champ électrique uniforme (figure 4.2). Le potentiel en chaque point est le même dans les deux cas, car il ne dépend que des charges sources. Pourtant, on observe que l'accélération de la charge q est en sens inverse de celle observée pour une charge positive. On en déduit qu'une charge négative «tombe» vers les potentiels *croissants*. Pour qu'on puisse poursuivre l'analogie, il faudrait qu'il existe des «masses négatives» qui seraient repoussées par la Terre au lieu d'être attirées: effectivement, elles «tomberaient vers le haut».

(*a*)



(*b*)

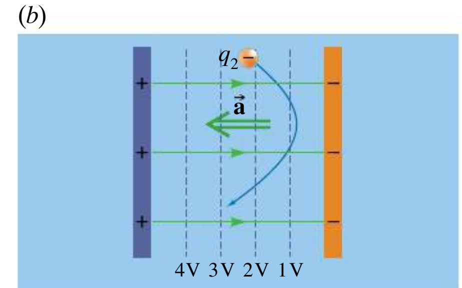


Figure 4.2

(*a*) Une charge q_1 positive tombe vers les potentiels décroissants. (*b*) Une charge q_2 négative «tombe» vers les potentiels croissants. Le potentiel en chaque point de l'espace est le même dans les deux cas, car il ne dépend que des charges sources situées sur les plaques.

Pendant la chute de la charge négative vers les potentiels croissants, l'énergie potentielle électrique de cette charge décroît quand même: si q est négatif, l'énergie $U_E = qV$ diminue quand V augmente, car elle devient de plus en plus négative.

En terminant, précisons que l'analogie entre altitude et potentiel est d'une validité limitée, même dans un champ uniforme: par exemple, à altitude égale, une masse a plus d'énergie potentielle sur la Terre que sur la Lune. On pourrait améliorer l'analogie en définissant un *potentiel gravitationnel* qui vaudrait $V_g = gy$ près de la surface d'une planète. On aurait alors $U_g = mV_g$, une équation parfaitement analogue à $U_E = qV$. D'ailleurs, par analogie avec $U_g = mgy$, on devine que l'énergie potentielle d'une charge q dans un champ électrique uniforme est $U_E = qEy$ et que le potentiel électrique dans ce champ est donc

$$V = Ey \tag{4.2}$$

où la position y est donnée par rapport à un axe antiparallèle à $\vec{\mathbf{E}}$ et dont l'origine $y = 0$ est arbitraire. Ainsi, le potentiel gravitationnel $V_g = gy$, mesuré en joules par kilogramme (J/kg), serait l'analogue parfait du potentiel électrique $V = Ey$, mesuré en joules par coulomb (J/C), c'est-à-dire en volts (V). (Du moins, l'analogie serait parfaite pour le cas où les champs sont uniformes.) Mais comme le potentiel gravitationnel n'a pas été présenté au tome 1, nous n'aurons pas recours à cette notion davantage et poursuivrons avec l'analogie, bien qu'imparfaite, entre potentiel et altitude.

Cas des champs non uniformes

Nous avons discuté jusqu'à présent du potentiel dans un champ électrique uniforme, mais nous allons aussi nous intéresser dans ce chapitre à deux autres cas: le potentiel dans un champ à symétrie sphérique (notamment celui produit par une charge ponctuelle) et le potentiel dans un champ quelconque (celui produit par un *système* de charges ponctuelles). De la discussion qui précède, on peut tirer trois constats généraux à propos du lien entre le potentiel et le champ, lesquels s'appliquent même si le champ n'est pas uniforme.

À la figure 4.1*a*, tous les points qui ont la même altitude sont situés sur un même plan horizontal. Il en va de même, à la figure 4.1*b*, des points qui ont le

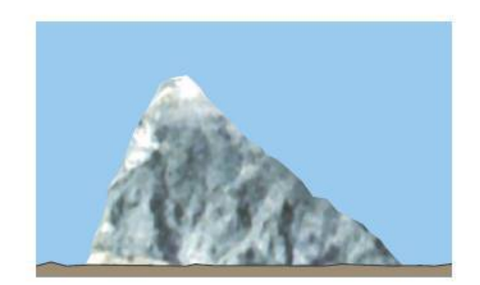
même potentiel. Une surface qui relie des points qui possèdent tous le même potentiel s'appelle une **équipotentielle**. On note que les plans équipotentiels sont *perpendiculaires au champ*. C'est un premier lien général entre le champ et le potentiel :

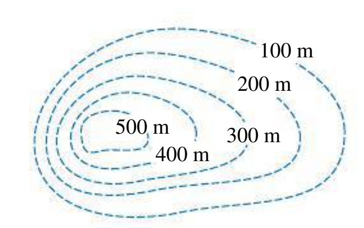
Propriété 1 du lien entre le champ et le potentiel

1. Dans un champ quelconque, les surfaces équipotentielles ont des formes quelconques, mais *demeurent perpendiculaires au champ* en chaque point de l'espace.

À la section 4.3, nous démontrerons pourquoi chaque segment d'une équipotentielle est nécessairement perpendiculaire au champ électrique local.

On peut faire une certaine analogie entre les équipotentielles et les courbes de niveau d'une carte topographique (figure 4.3). Une telle carte est une projection (sur un plan) de la surface terrestre et les lignes de niveau y joignent les points de cette surface terrestre qui ont la même altitude. En général, elles représentent des niveaux d'altitude équidistants, un intervalle de 100 m par exemple. De la même façon, on trace souvent les équipotentielles qui représentent des niveaux de potentiels équidistants, un intervalle de 100 V par exemple. Sur une carte, plus les lignes de niveau sont rapprochées, plus la pente de la surface terrestre est raide. Par analogie* :





▲ **Figure 4.3**

Sur une carte topographique, les courbes de niveau joignent les points de même altitude.

Propriété 2 du lien entre le champ et le potentiel

2. Plus les surfaces équipotentielles sont rapprochées, plus le champ électrique a un module élevé.

À la section 4.3, l'énoncé qui précède deviendra une équation. D'ailleurs, on peut déjà la deviner : l'équation 4.2, $V = Ey$, montre que le module du champ uniforme est égal à la pente de $V(y)$, l'équation qui donne le potentiel en fonction de la position. Nous verrons que dans le cas d'un champ non uniforme, c'est la dérivée du potentiel en fonction de la position qui nous informe sur le champ électrique.

La figure 4.1*b* représente des plans équipotentiels et on voit que le champ pointe *vers les potentiels décroissants*. C'est un troisième constat général : dans un champ électrique quelconque, les équipotentielles ne sont plus équidistantes, mais la propriété suivante demeure valable :

Propriété 3 du lien entre le champ et le potentiel

3. Le champ pointe toujours des potentiels élevés vers les potentiels plus faibles.

On peut se rendre compte de la validité de cet énoncé en imaginant ce qui arriverait à une charge positive libérée dans un tel champ : elle subirait une force

* Sur une carte à deux dimensions, on peut faire une analogie entre champ électrique et inclinaison, non une analogie entre champ électrique et champ gravitationnel. En effet, ce sont les plans horizontaux qui sont réellement analogues aux surfaces équipotentielles. Les courbes de niveau représentent les endroits où ces plans croisent la surface terrestre, ce qui n'a pas d'équivalent électrique.



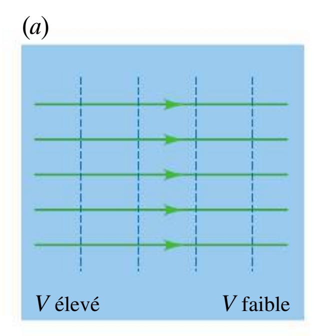
À chaque mètre qu'il tombe, ce météore perd de l'énergie potentielle ; le champ gravitationnel étant de plus en plus fort, il perd de plus en plus d'énergie potentielle par mètre parcouru. Il en va de même d'une charge qui « tombe » dans un champ électrique non uniforme.

dans le sens du champ, donc elle accélérerait. En d'autres termes, elle gagnerait de l'énergie cinétique et perdrait de l'énergie potentielle. Selon l'équation $U_E = qV$, cela signifie effectivement qu'elle se déplacerait vers des points dont le potentiel est de plus en plus faible.

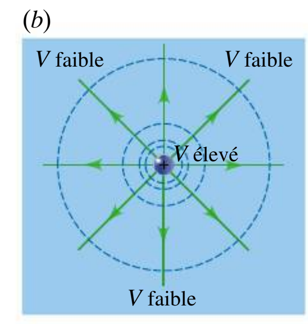
Quand le champ n'est plus uniforme, la validité de l'analogie entre altitude et potentiel devient plus faible. Par contre, il sera toujours possible de l'utiliser sur le plan du vocabulaire : quand une charge positive se déplace en suivant une ligne de champ électrique, nous pourrons dire qu'elle « descend » ou encore qu'elle « tombe » dans le champ. À l'inverse, lorsqu'une charge positive se déplace à l'encontre des lignes du champ électrique, nous pourrons dire qu'elle « monte » ou qu'elle « est soulevée ».

Ces constats généraux nous permettent de décrire qualitativement des situations qui importeront d'ici la fin du chapitre. Quand le champ électrique est uniforme, les points de même potentiel sont situés sur des plans parallèles équidistants (figure 4.4*a*). Si le champ a une symétrie sphérique, les points de même potentiel sont situés sur des sphères concentriques ; à mesure que le module du champ décroît, ces sphères équipotentielles s'espacent (figure 4.4*b*). Enfin, pour un champ de forme quelconque, les points de même potentiel sont situés sur des surfaces de formes quelconques qui sont elles aussi perpendiculaires au champ en chaque point de l'espace ; ici encore, plus le champ est intense et plus les équipotentielles sont rapprochées (figure 4.4*c*).

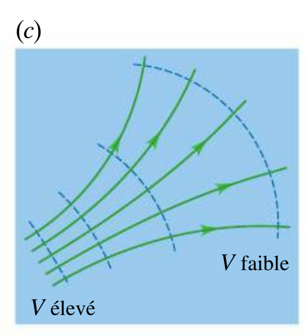
(*a*)



(*b*)



(*c*)



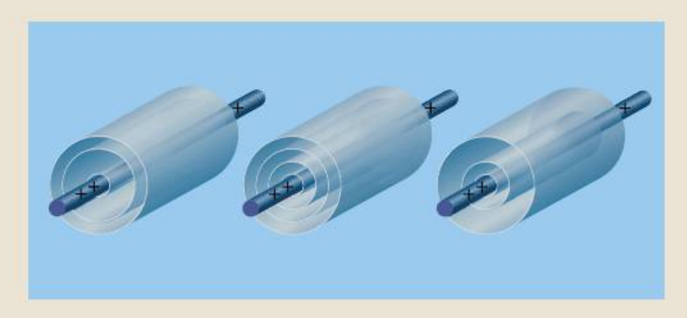
▶ Figure 4.4

Les surfaces équipotentielles relient les points qui ont le même potentiel, c'est-à-dire la même « altitude le long d'une ligne de champ ». Elles sont toujours *perpendiculaires* au champ. (*a*) Dans un champ uniforme, ces équipotentielles sont des plans équidistants. (*b*) Dans un champ radial, elles ont la forme de sphères. (*c*) Dans un plan de forme quelconque, elles ont des formes quelconques.

Les notions présentées dans cette section suffisent déjà en grande partie pour comprendre de nombreuses applications sur lesquelles nous reviendrons. En particulier, dans un circuit électrique, la charge longe les fils en « tombant » vers les points dont le potentiel est plus faible. De même, dans une cellule musculaire ou nerveuse qui répond à un stimulus, des ions Na^+ traversent la membrane notamment en « tombant » vers les points dont le potentiel est plus faible.

Exemple 4.1

Un fil infini uniformément chargé positivement permet d'attribuer un potentiel $V(r)$ aux points situés à une distance r du fil. (a) Parmi les trois choix illustrés à la figure 4.5, lequel représente correctement des surfaces équipotentielles entre lesquelles l'intervalle ΔV est constant ? (b) La fonction $V(r)$ est-elle croissante ou décroissante ? (c) Soit des points A et B situés à $r_A = 10$ cm et à $r_B = 20$ cm du fil. Une charge positive aura-t-elle davantage d'énergie potentielle en A ou en B ? (d) Répondre à la même question pour une charge négative.



▲ Figure 4.5

Quelles sont les bonnes équipotentielles ?

Solution

(a) Comme on l'a vu dans les chapitres précédents, le champ produit par un fil infini décroît en module quand on s'éloigne du fil, donc les équipotentielles doivent devenir de plus en plus espacées : le schéma approprié est le troisième.

(b) Le champ indique le sens décroissant du potentiel. Puisque le fil est positivement chargé, le champ pointe dans le sens opposé au fil et la fonction $V(r)$ est donc décroissante.

(c) Pour une charge q positive, l'énergie $U = qV$ est la plus grande au point où V est le plus grand, soit le point A. D'ailleurs, cette charge q « tomberait » en s'éloignant du fil, c'est-à-dire de A vers B.

(d) Pour une charge q négative, $U = qV$ est plus grande au point où V est le plus petit, B. D'ailleurs, q « tomberait » vers le fil, donc de B vers A.

4.2 LA RELATION ENTRE LE POTENTIEL, L'ÉNERGIE ET LE TRAVAIL

L'analogue d'une masse qui se déplace d'une altitude y_i à une altitude y_f est une charge qui se déplace d'un endroit de potentiel V_i à un endroit de potentiel V_f. On dit qu'elle traverse une **différence de potentiel**. Une masse peut changer d'altitude sous l'effet du seul poids (chute libre) ou d'une force extérieure (agent qui soulève, descend ou retient la masse). De même, une charge peut traverser une différence de potentiel en « chute » libre (voir la figure 4.1*b*, p. 125) ou sous la contrainte d'un moyen extérieur (voir la figure 4.9*b*, p. 133). Dans cette section, nous utiliserons le principe de conservation de l'énergie mécanique pour décrire quantitativement ces deux cas. Auparavant, nous allons faire un rappel des concepts pertinents, tirés du tome 1.

Rappel de mécanique : travail d'une force conservative et énergie potentielle

À la section précédente, nous avons obtenu par analogie que le potentiel dans un champ électrique uniforme est donné par $V = Ey$ (équation 4.2). Quand le champ n'est pas uniforme, on ne peut procéder par analogie, et il nous faudra avoir recours à la définition du concept d'énergie potentielle, fondée sur le concept de travail, deux notions étudiées respectivement dans les chapitres 8 et 7 du tome 1.

Travail fait par une force

Quand une force ou plusieurs forces agissent sur un objet qui subit un *déplacement* $\vec{\mathbf{s}}$, on dit qu'elles effectuent un *travail* sur cet objet. Les forces qui favorisent le déplacement font un travail positif, et celles qui lui nuisent, un travail négatif. Le travail d'une force constante sur un déplacement rectiligne est par définition $W = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{s}} = Fs \cos \theta$. Dans les autres cas, on doit diviser le déplacement en segments suffisamment courts pour que cette définition soit valable sur chacun d'eux, puis additionner ou intégrer.

Théorème de l'énergie cinétique

Quand la somme des travaux effectués sur un objet pendant un déplacement est non nulle, l'*énergie cinétique* $K = \frac{1}{2}mv^2$ de l'objet change. Par exemple, le travail du poids augmente l'énergie cinétique des objets en chute libre. Le théorème de l'énergie cinétique $\Delta K = \sum W$ exprime cette idée (voir la section 7.3 du tome 1).

En général, le travail effectué par une force dépend de la trajectoire suivie pour effectuer le déplacement. Par exemple, si on glisse une caisse sur le sol entre deux endroits, le travail (négatif) effectué par la force de frottement sera plus faible si on a suivi la trajectoire en ligne droite entre ces deux endroits que si on a emprunté une trajectoire courbe, plus longue. Mais certaines forces, appelées

Force conservative et énergie potentielle

forces conservatives, sont particulières : leur travail ne dépend *que* de la position initiale et de la position finale, quelle que soit la trajectoire suivie pour effectuer le déplacement. Pour chaque force conservative, on peut définir et lui associer une *énergie potentielle* U qui ne dépend que de la position de l'objet : $\Delta U = U_f - U_i \equiv -W_c$. Quand plusieurs forces conservatives sont présentes, le symbole U désigne la somme des énergies potentielles associées à toutes ces forces.

À la section 7.1 du tome 1, nous avons montré que le travail de la force gravitationnelle $F_g = GMm/r^2$ ne dépend pas du trajet, ce qui est valable que le champ gravitationnel soit uniforme ou non. Comme la force électrique $F_E = k|Qq|/r^2$ a la même forme, il s'ensuit que *la force électrique est conservative** elle aussi. Nous pouvons donc effectivement lui associer l'énergie potentielle électrique.

Effet des forces non conservatives

En général, le travail total effectué sur l'objet peut être exprimé comme la somme des travaux effectués par des forces conservatives (W_c) et de ceux effectués par des forces non conservatives (W_{nc}). Le théorème de l'énergie cinétique peut donc s'écrire $\Delta K = W_c + W_{nc}$.

En substituant la définition de l'énergie potentielle, on obtient $\Delta K = -\Delta U + W_{nc}$ ou encore les équations équivalentes suivantes, identiques aux équations 8.16*a* et 8.16*b* du tome 1 :

Conservation de l'énergie mécanique et forces non conservatives

$$\Delta K + \Delta U = W_{nc} \qquad (4.3a)$$

$$K_i + U_i + W_{nc} = K_f + U_f \qquad (4.3b)$$

Ainsi, en l'absence de travail non conservatif ($W_{nc} = 0$), l'énergie mécanique totale** $K + U$ que contient un système demeure constante. Les forces non conservatives ont donc pour effet de *retirer* ou d'*ajouter* de l'énergie mécanique au système pendant le déplacement du point initial au point final. Par exemple, une machine qui soulève une boîte fait sur celle-ci un travail non conservatif positif : elle fournit de l'énergie mécanique au système, puisque celui-ci gagne de l'énergie potentielle sans avoir réduit son énergie cinétique. Il en va de même d'une personne qui éloigne l'une de l'autre deux charges de signes opposés.

Charges libres accélérées par une différence de potentiel

Nous allons d'abord appliquer le principe de conservation de l'énergie mécanique (équation 4.3*a* ou 4.3*b*) au cas d'une charge cible q qui est *libre* de se déplacer dans le potentiel qui correspond à un champ électrique quelconque. Cette situation est analogue à une masse en chute libre dans un champ gravitationnel.

La seule force qui fait un travail sur la charge q est la force électrique, d'où $\Delta U = \Delta U_E = q\Delta V$. Il n'y a pas de forces non conservatives, d'où $W_{nc} = 0$, ce qui

* Au chapitre 10, nous verrons qu'un champ magnétique variable peut induire un champ électrique, même en l'absence de charges sources. Ce champ électrique induit produit une force $\vec{\mathbf{F}}_E = q\vec{\mathbf{E}}$ qui n'est pas donnée par la loi de Coulomb $F_E = k|Qq|/r^2$. Elle n'est donc *pas* conservative. Dans ce chapitre, nous ne considérerons que des cas électrostatiques, où les charges sources sont immobiles et où il n'y a aucun champ magnétique. Dans toute situation électrostatique, la force électrique est conservative.

** Dans le tome 1, nous avons utilisé le symbole E pour représenter la somme $K + U$. Nous réserverons ici ce symbole pour désigner le champ électrique.

implique souvent que la charge q est dans le vide. Les deux formes du principe de conservation de l'énergie mécanique (équation 4.3*a* ou 4.3*b*) deviennent donc

Gain ou perte d'énergie cinétique par une charge libre qui traverse une différence de potentiel

$$(W_{nc} = 0) \qquad \Delta K + q\Delta V = 0 \qquad (4.4a)$$

$$K_A + qV_A = K_B + qV_B \qquad (4.4b)$$

où on a considéré que la charge passe d'un point A à un point B. Quand la charge q subit une telle «chute libre» au travers d'une différence de potentiel, son énergie mécanique $K + qV$ est constante : à mesure qu'elle perd de l'énergie potentielle qV, elle gagne de l'énergie cinétique K (ou vice versa, si elle est projetée afin de traverser la différence de potentiel en sens inverse).

L'équation 4.4*a* montre que ce sont les *variations* de potentiel qui ont de l'importance, et non les valeurs de V_A et de V_B. Cela confirme donc qu'on peut choisir n'importe quel point commode comme référence $V = 0$. Quand la charge q est placée là où $V = 0$, son énergie potentielle $U = qV$ sera aussi nulle. Dans plusieurs cas, en électrostatique, on considère que $V = 0$ aux endroits situés infiniment loin des charges sources. Dans les circuits électroniques, on convient plutôt de considérer la prise de terre comme point de potentiel nul.

Quand on veut accélérer une particule élémentaire de charge q, on la fait typiquement traverser une différence de potentiel ΔV connue. Une pile électrique, entre autres, est un dispositif qui peut permettre d'établir une telle différence de potentiel (voir la section 7.1). Même si le champ électrique correspondant n'est pas uniforme, l'équation 4.4*a* permet de calculer le gain d'énergie cinétique ΔK qui correspond à la diminution $q\Delta V$. (Occasionnellement, on souhaite plutôt ralentir une particule élémentaire* : il suffit alors de lui faire traverser la différence de potentiel en sens inverse, celui où $q\Delta V$ est positif, et ΔK, négatif.) Pour mesurer l'énergie cinétique gagnée par une telle particule élémentaire, il est peu commode d'utiliser le joule en raison de la petitesse de q. On utilise plutôt une unité appelée l'**électronvolt** (eV), qui n'est pas une unité SI. Par définition, quand une particule portant une charge e traverse une différence de potentiel de x volts, son énergie cinétique croît de x électronvolts. Pour convertir 1 eV en joules, on peut utiliser l'équation 4.4*a*, d'où

$$|\Delta K| = e|\Delta V| = (1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{C})(1\ \text{V})$$

Donc,

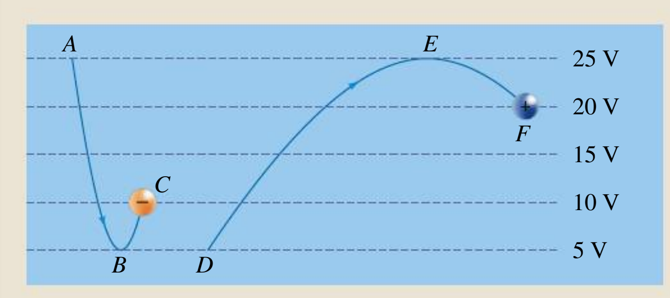
$$1\ \text{eV} = 1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{J} \qquad (4.5)$$

Comme l'illustre l'exemple 4.3 ci-dessous, dans un canon à électrons, les électrons du faisceau gagnent une énergie cinétique de 10^4 eV environ. L'électronvolt est aussi pratique pour exprimer de très petites quantités d'énergie, comme celles requises pour rompre des liaisons chimiques ou détruire la forme tridimensionnelle d'une protéine. Ces énergies sont de l'ordre de quelques électronvolts.

* Par exemple, pour mesurer la vitesse d'une particule chargée, on peut lui faire traverser une différence de potentiel qui la ralentit. Quand on trouve la différence de potentiel qui l'arrête tout juste, on peut déterminer l'énergie cinétique qu'elle avait avant de la traverser. Ce procédé a été utilisé historiquement pour étudier le comportement des électrons éjectés d'une surface métallique par effet photoélectrique (voir la section 9.3 du tome 3).

Exemple 4.2

Un champ électrique uniforme donné correspond au potentiel illustré à la figure 4.6. (a) Un objet ($m = 10^{-9}$ kg, $q_1 = -10$ nC) est projeté dans ce potentiel. Au point B, son énergie cinétique est de 10 nJ. Quelle est-elle en A et en C ? (b) On lance un autre objet de masse identique, mais de charge $q_2 = +10$ nC, selon le trajet DEF, avec une énergie cinétique initiale $K_D = 270$ nJ. Que devient cette énergie en E et en F ?



▲ **Figure 4.6**

Deux charges sont projetées dans un champ uniforme.

Solution

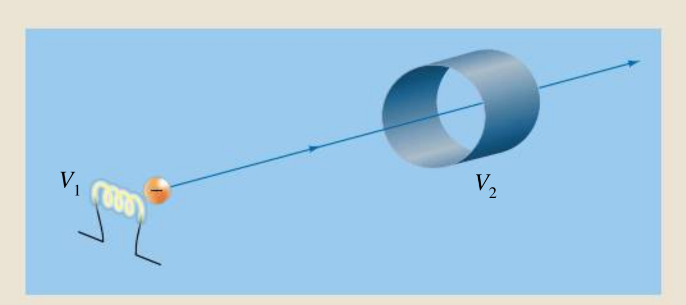
(a) On applique directement l'équation 4.4*b*. Entre les points A et B, on a $K_A + qV_A = K_B + qV_B$, soit $K_A + (-10 \text{ nC})(25 \text{ V}) = (10 \text{ nJ}) + (-10 \text{ nC})(5 \text{ V})$. Donc $K_A = 210$ nJ. Entre B et C, $K_B + qV_B = K_C + qV_C$ devient $(10 \text{ nJ}) + (-10 \text{ nC})(5 \text{ V}) = K_C + (-10 \text{ nC})(10 \text{ V})$. Donc $K_C = 60$ nJ.

(b) La démarche est la même, sauf que la charge a changé de signe. L'énergie mécanique initiale est $K_D + qV_D = (270 \text{ nJ}) + (10 \text{ nC})(5 \text{ V}) = 320$ nJ. En E, cette énergie est devenue $320 \text{ nJ} = K_E + qV_E = K_E + (10 \text{ nC})(25 \text{ V})$, donc $K_E = 70$ nJ. En F, elle est devenue $320 \text{ nJ} = K_F + qV_F = K_F + (10 \text{ nC})(20 \text{ V})$, donc $K_F = 120$ nJ.

Notons qu'il est important de tenir compte du signe de q_1 et de q_2 : alors que les équations du chapitre 2 comportaient des valeurs absolues, ce n'est pas le cas ici. ■

Exemple 4.3

Pour produire des rayons X en cabinet médical, on utilise d'abord un jet d'électrons dont la vitesse doit avoir été précisément contrôlée. On obtient un tel jet en chauffant un filament au point où des électrons en sont expulsés, en plaçant un anneau métallique à proximité du filament et en maintenant une différence de potentiel ΔV entre le filament et l'anneau (figure 4.7). (a) Est-ce le filament ou l'anneau qui est au potentiel le plus élevé ? (b) Si le technicien a choisi $\Delta V = 25\,000$ V, estimer l'énergie cinétique et la vitesse des électrons qui quittent l'anneau. Négliger leur énergie au moment où ils sont émis par le filament et le fait qu'ils n'atteignent pas la surface de l'anneau. (c) Ces résultats auraient-ils pu être obtenus grâce aux équations de la cinématique utilisées à la section 2.4 ?



▲ **Figure 4.7**

On peut accélérer un jet d'électrons issus d'un filament en le faisant passer par un anneau qu'on maintient à un potentiel différent de celui du filament.

Solution

(a) Les électrons ayant une charge négative, ils « tombent » vers les points dont le potentiel est plus *élevé* : c'est l'anneau qu'on doit maintenir à un potentiel supérieur à celui du filament.

(b) On a $K_i \approx 0$ et $\Delta V \approx +25\,000$ V. L'équation 4.4*a* donne $K_f = 4{,}01 \times 10^{-15}$ J. On aurait aussi pu utiliser la définition de l'électronvolt, qui permet d'écrire directement $K_f = 25\,000$ eV. En utilisant l'équation 4.5, on vérifie que ce résultat est équivalent. Au tome 3, nous verrons comment cette énergie cinétique permet ensuite de produire les rayons X.

La vitesse correspondante peut être obtenue avec la définition de l'énergie cinétique $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2$. Pour obtenir v_f en mètres par seconde, il faut que K_f soit exprimée en joules :

$$\begin{aligned} v_f &= \sqrt{2K_f/m} \\ &= \sqrt{2(4{,}01 \times 10^{-15} \text{ J})/(9{,}11 \times 10^{-31} \text{ kg})} \\ &= 9{,}38 \times 10^7 \text{ m/s} \end{aligned}$$

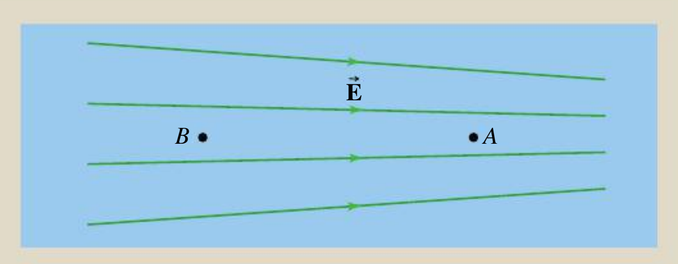
En tenant compte des effets relativistes (voir le chapitre 8 du tome 3), on obtient une vitesse légèrement plus faible.

(c) Non. Les équations de la cinématique utilisées au chapitre 2 ne sont valables que dans le cas d'une accélération *constante*, qui se produit dans un champ uniforme, ce qui n'est clairement pas le cas ici.

L'approche fondée sur le potentiel et sur la conservation de l'énergie permet de déterminer le gain d'énergie d'une particule élémentaire qui traverse un champ même si la forme de ce champ n'est pas forcément connue. ■

Exemple 4.4

La figure 4.8 représente deux points A et B dans un champ électrique non uniforme. En « chute » libre, une charge q se déplace de A vers B. En considérant d'abord le cas où q est négative, ensuite celui où elle est positive, déterminer : (a) si elle va dans le sens des potentiels électriques croissants ou décroissants, (b) si son énergie potentielle électrique augmente ou diminue, (c) si son énergie cinétique augmente ou diminue.



▲ **Figure 4.8**

Comment se compare le potentiel du point A à celui du point B ? Et lorsqu'une charge se déplace de A vers B, que devient son énergie potentielle ?

Solution

Puisque le potentiel augmente dans la direction opposée aux lignes de champ, on a $V_B > V_A$. Le signe de q (ou même la présence de q) n'a aucun effet sur cela.

Pour q négative : (a) Puisque la charge va de A vers B, elle se déplace dans le sens des potentiels électriques croissants ($\Delta V > 0$). (b) Puisque $\Delta U = q\Delta V$, que $q < 0$ et que $\Delta V > 0$, l'énergie potentielle électrique de q diminue. (c) En « chute » libre, aucune force extérieure n'agit sur la charge, de sorte que l'équation 4.4*a* s'applique. Donc, comme $\Delta K = -q\Delta V = -\Delta U$, l'énergie cinétique de la charge augmente.

Pour q positive : (a) On a toujours $V_B > V_A$, c'est-à-dire $\Delta V > 0$. (b) Cette fois, $q > 0$ et $\Delta V > 0$, de sorte que $\Delta U = q\Delta V$ est positif : l'énergie potentielle augmente. (c) Si la charge gagne de l'énergie potentielle, elle doit perdre de l'énergie cinétique puisqu'elle est libre.

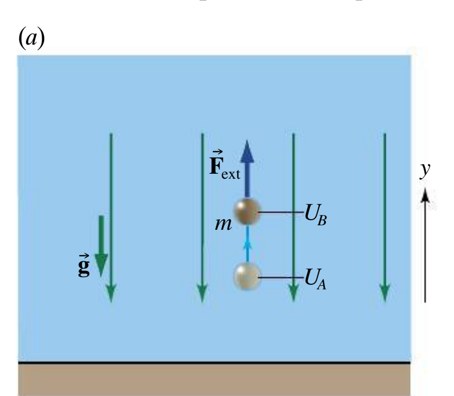
Comme son énergie cinétique diminue, il est *impossible* qu'une charge positive libre se déplace de A vers B si elle ne possédait pas de l'énergie cinétique au départ. Le cas d'une charge négative est différent : lâchée sans vitesse initiale au point A, elle peut se déplacer vers B spontanément. (Une charge positive libre initialement immobile au point A se dirigerait vers la droite.) ■

Charges sous la contrainte d'un agent extérieur

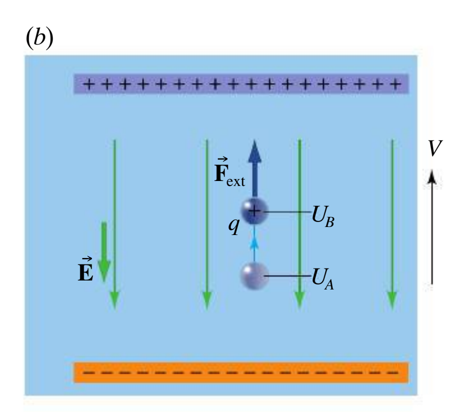
Nous allons maintenant considérer le cas où la charge q se déplace dans le potentiel qui correspond à un champ électrique quelconque et subit aussi l'effet d'un agent extérieur (figure 4.9). Cette situation est analogue à une masse qu'une machine soulève ou descend dans un champ gravitationnel.

Dans une telle situation, deux forces effectuent un travail : la force externe et la force électrique. Seule la première est non conservative, d'où $W_{nc} = W_{ext}$,

(*a*)



(*b*)



◀ **Figure 4.9**

Quand un agent extérieur exerce une force sur la particule, l'énergie mécanique du système n'est pas conservée. Si la particule est immobile au début et à la fin du déplacement (ou si sa vitesse est la même), alors tout le travail que fait l'agent extérieur est emmagasiné sous forme d'énergie potentielle du système : $W_{ext} = +\Delta U$.

et seule la seconde est conservative, d'où $\Delta U = \Delta U_E = q\Delta V$. Les deux formes du principe de conservation de l'énergie mécanique deviennent donc

$$\Delta K + q\Delta V = W_{ext} \quad (4.6a)$$

$$K_A + qV_A + W_{ext} = K_B + qV_B \quad (4.6b)$$

De plus, il y a deux situations fréquentes où on pourra considérer que $\Delta K = 0$. La première est celle où la force de l'agent extérieur équilibre la force électrique et où le déplacement est une portion d'un mouvement à vitesse constante ($K_A = K_B$). La seconde est celle où on prend la charge q à un endroit pour la placer en un autre, ce qui *sous-entend* qu'elle est au repos au début et à la fin ($K_A = K_B = 0$). Dans ces deux cas, les équations 4.6*a* et 4.6*b* deviennent

$$(\Delta K = 0) \qquad W_{ext} = q\Delta V = q(V_B - V_A) \quad (4.7)$$

où V_A et V_B sont respectivement les potentiels des points initial et final où se trouve la charge cible q. En d'autres termes, quand $\Delta K = 0$, *tout* le travail que fournit un agent extérieur entraîne une variation de l'énergie potentielle qV du système.

Pour interpréter l'équation 4.7, considérons une charge q positive. Si W_{ext} est positif, on «soulève» la charge d'un point de potentiel V_A à un point où le potentiel V_B est plus élevé. Le système emmagasine de l'énergie potentielle qV : son énergie mécanique $(K + qV)$ augmente. À l'inverse, si W_{ext} est négatif, on «descend» la charge, sans la laisser «tomber», d'un point de potentiel V_A à un point où le potentiel V_B est plus faible, donc l'énergie mécanique du système diminue. Le cas frontière est celui où on déplace q le long d'une surface équipotentielle; puisque $V_A = V_B$, le travail requis est donc $W_{ext} = 0$. La situation analogue est de déplacer une masse horizontalement. Enfin, toute la situation est inversée dans le cas d'une charge q négative: un travail W_{ext} positif déplace une charge négative vers des potentiels *décroissants*, et un travail W_{ext} négatif, vers les potentiels *croissants*.

Exemple 4.5

Considérer à nouveau la situation décrite dans l'exemple précédent. Toutefois, la charge réalise maintenant son déplacement de A vers B sous l'effet d'une force extérieure qui assure que sa vitesse demeure constante. (a) Les réponses de l'exemple précédent changent-elles ? (b) Quel signe a le travail que doit fournir la force extérieure ? Considérer le cas où q est positif et celui où q est négatif.

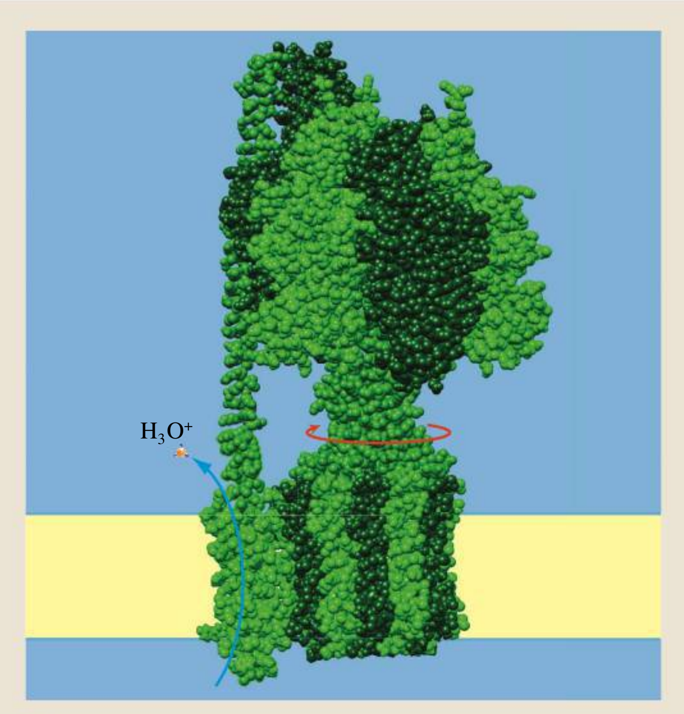
Solution

(a) Seule la variation d'énergie cinétique est différente: $\Delta K = 0$. En effet, $\Delta V = V_B - V_A$ ne dépend que des charges sources et ne change donc pas et ΔU ne dépend que du produit qV et non de la présence ou non d'une force extérieure, donc ne change pas non plus.

(b) Si $q > 0$, la charge accroît son énergie potentielle (on la «soulève» contre la force exercée par le champ). Donc la force externe fournit de l'énergie: elle fait un travail positif. Si $q < 0$, la charge diminue son énergie potentielle en faisant le même trajet. La force extérieure lui *retire* de l'énergie: pour maintenir la vitesse constante, elle doit empêcher la charge d'accélérer en «tombant». Elle fait donc un travail négatif. ■

Exemple 4.6

Au cours du long processus de la *respiration cellulaire*, les cellules extraient l'énergie chimique des nutriments pour la stocker sous forme d'adénosine triphosphate (ATP). La dernière étape de ce processus utilise un flot d'ions H^+ (c'est-à-dire d'ions H_3O^+) qui traverse une différence de potentiel de 100 mV, faisant agir au passage une protéine qui joue le rôle d'une turbine microscopique (figure 4.10). (a) Sachant qu'une dizaine



▲ **Figure 4.10**

L'ATP-synthase est une protéine qui joue le rôle d'une turbine microscopique : un flot d'ions H^+, entraînés par une différence de potentiel, traverse la membrane où cette protéine est enchâssée, causant la rotation d'une partie mobile de la protéine. Les molécules requises pour synthétiser l'ATP sont liées à des sites qui changent de forme lorsque la partie mobile bouge, ce qui entraîne l'action catalytique qui produit l'ATP.

d'ions H^+ doivent passer pour que cette « turbine » synthétise trois molécules d'ATP, estimer l'énergie stockée par molécule d'ATP. (b) Comparer ce résultat à la valeur expérimentale de 30,5 kJ/mol libérée par des molécules d'ATP.

Solution

(a) La situation est analogue à un barrage hydroélectrique où l'eau traverse à vitesse constante une turbine, celle-ci étant un agent extérieur qui retire à l'eau son énergie potentielle gravitationnelle pour la convertir en une autre forme. Ici, c'est l'énergie potentielle électrique des ions H^+ que la « turbine » retire au système, pour la convertir en énergie chimique stockée dans l'ATP. Puisque $\Delta K = 0$, le principe de conservation de l'énergie donne $W_{ext} = \Delta U = q\Delta V$. Les ions H^+ ayant une charge positive, ils « tombent » vers les potentiels décroissants : $\Delta V = -100$ mV. Donc $W_{ext} = -1{,}60 \times 10^{-20}$ J par ion. La protéine fait un travail négatif *sur l'ion*, car elle lui *retire* de l'énergie. Après 10 ions, l'énergie qui a servi à produire 3 molécules d'ATP est $1{,}60 \times 10^{-19}$ J, ce qui signifie que $5{,}33 \times 10^{-20}$ J sont stockées dans chaque molécule d'ATP.

(b) Une mole d'ATP contient $6{,}02 \times 10^{23}$ molécules. L'énergie expérimentale est donc $(30\,500\text{ J})/(6{,}02 \times 10^{23}) = 5{,}07 \times 10^{-20}$ J par molécule. Les résultats sont du même ordre de grandeur. En pratique, il faut aussi tenir compte d'autres formes d'énergie que l'énergie potentielle électrique.

On note que l'équation 4.7 demeure valable même si ce processus biologique se déroule dans un diélectrique (milieu aqueux). Les charges sources requises pour produire le champ qui correspond à la différence de potentiel de 100 mV sont différentes dans l'eau et dans le vide, mais l'équation $\Delta U = q\Delta V$ demeure valable dans les deux cas. ■

4.3 LA RELATION ENTRE LE POTENTIEL ET LE CHAMP ÉLECTRIQUE

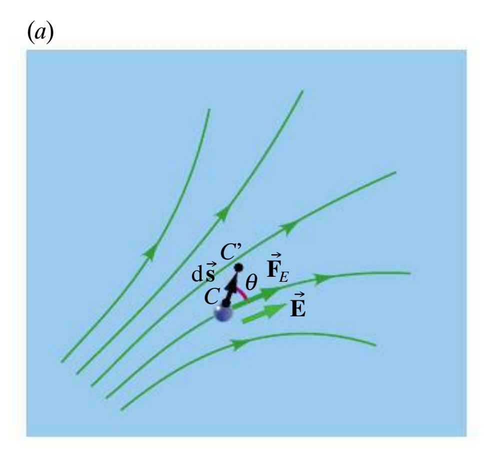
À la section 4.1, nous avons présenté le lien entre le champ et le potentiel sous forme de trois propriétés qualitatives. Nous allons maintenant étudier ce lien d'une façon quantitative.

Si on connaît la fonction qui donne le champ $\vec{\mathbf{E}}$ en chaque point de l'espace, on peut s'en servir pour déterminer une fonction qui donne (à une constante près) le potentiel V en chaque point de l'espace, et vice versa. Considérons d'abord une telle relation dans le voisinage immédiat d'un point. La figure 4.11*a* illustre ce point, appelé C, ainsi qu'un quelconque point C' séparé de C par une distance infinitésimale ds (figure 4.11*a*). Comme les points C et C' sont séparés par une distance infinitésimale, la différence de potentiel entre ces deux points est elle aussi infinitésimale ($\Delta V = V_{C'} - V_C \rightarrow \mathrm{d}V$), et on peut considérer que le champ ne varie pas de façon significative entre ces deux points. Aux fins du calcul qui suit, on considère qu'en chaque point entre C et C', $\vec{\mathbf{E}}$ a la même valeur qu'en C. On cherche à exprimer dV en fonction de ce champ.

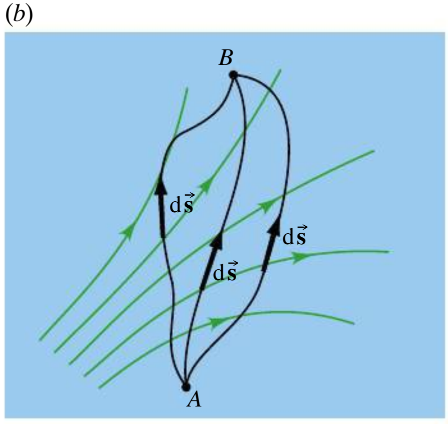
▶ Figure 4.11

(*a*) La différence de potentiel dV entre les points C et C', séparés par une distance infinitésimale ds, est d$V = -\vec{\mathbf{E}}$ ds cos θ, où $\vec{\mathbf{E}}$ est le champ au point C. Cette relation permet aussi de calculer $\vec{\mathbf{E}}$ en fonction de V. (*b*) Pour calculer la différence de potentiel $V_B - V_A$, on imagine n'importe quelle trajectoire de A à B, on la subdivise en segments assez courts pour appliquer la relation décrite en (*a*), puis on intègre. Le résultat est le même, quelle que soit la trajectoire choisie, l'une des trois illustrées par exemple.

(*a*)



(*b*)



Pour calculer la différence de potentiel dV, il est utile de considérer une charge q qui se déplace de C à C', bien que le résultat attendu ne dépende pas de q. Quand la charge q décrit ce parcours, la force électrique fait un travail infinitésimal dW_c et l'énergie potentielle de la charge q varie d'une quantité infinitésimale dU. Ces deux quantités sont reliées par la définition de l'énergie potentielle ($\Delta U = -W_c$) qui, pour un changement infinitésimal, s'écrit

$$dU = -dW_c \qquad \text{(i)}$$

Selon l'équation 4.1, le membre de gauche de l'équation (i) est d$U = q$ dV ; selon la définition du travail, son membre de droite est $-dW_c = -\vec{\mathbf{F}}_E \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -q\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$. L'équation (i) devient donc

$$q\, dV = -q\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} \qquad \text{(ii)}$$

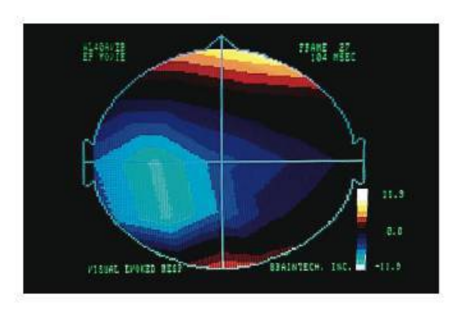
Relation entre le champ en un point et le potentiel dans son voisinage

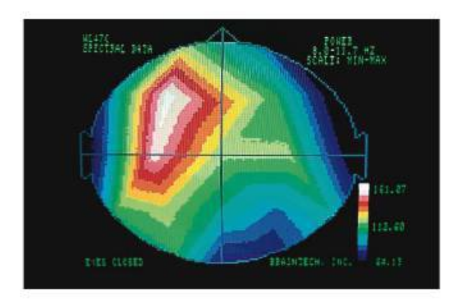
Tel que prévu, le facteur q s'annule* et on obtient

$$dV = -\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -E\, ds \cos\theta \qquad (4.8)$$

où θ est l'angle local entre $\vec{\mathbf{E}}$ et d$\vec{\mathbf{s}}$. On note que l'équation 4.8 s'applique au champ électrostatique $\vec{\mathbf{E}}$ résultant, qu'il soit dans le vide, dans un diélectrique ou autre.

Cette relation générale permet de vérifier la propriété 1 énoncée à la section 4.1. Si on choisit C et C' sur une équipotentielle, on doit avoir dV = 0. Or, on n'a dV = 0 que si θ = 90° (pour un champ non nul). En somme, l'équation 4.8 confirme que chaque segment d'une équipotentielle est perpendiculaire au champ local, résultat que nous n'avions initialement déduit que par analogie.





Les équipotentielles du cerveau représentées par des couleurs différentes. Il s'agit de potentiels «évoqués», mesurés 0,1 s environ après un stimulus (flash ou déclic). L'image de gauche révèle la présence d'une tumeur; celle de droite appartient à un patient atteint d'épilepsie. Dans le sujet connexe du chapitre 5, nous reviendrons sur le rôle du potentiel dans l'influx nerveux, et, dans le sujet connexe de la section 7.3, sur son rôle dans le fonctionnement des muscles et du cœur.

Détermination du potentiel à partir du champ

Nous allons maintenant calculer, à partir du champ, la différence de potentiel $V_B - V_A$ entre deux points A et B qui ne sont pas à proximité l'un de l'autre

* Notez que le raisonnement ayant conduit à l'équation (ii) demeure valable même si q est négative. Vérifiez-le. (L'angle entre $\vec{\mathbf{F}}_E$ et d$\vec{\mathbf{s}}$ ne correspond alors plus à l'angle θ entre $\vec{\mathbf{E}}$ et d$\vec{\mathbf{s}}$.)

(figure 4.11*b*). L'équation 4.8 ne permet que de calculer la différence de potentiel dV entre deux points infiniment rapprochés. Toutefois, on peut choisir une trajectoire du point A au point B, la subdiviser en déplacements infinitésimaux successifs pour chacun desquels l'équation 4.8 est applicable, puis additionner (intégrer) les variations infinitésimales de potentiel obtenues. Ce calcul s'appelle l'**intégrale de ligne** du champ électrique :

Différence de potentiel électrique en fonction du champ

$$V_B - V_A = \int_A^B \mathrm{d}V = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} \qquad (4.9)$$

Le signe de la différence de potentiel donnée par l'équation 4.9 est déterminé par l'angle entre $\vec{\mathbf{E}}$ et la trajectoire, lequel dépend du sens du chemin emprunté, indiqué par les bornes d'intégration. L'analogie avec la gravité permet de déduire que toute trajectoire qui « monte » les lignes de champ donne une différence de potentiel positive et vice versa. De même, toute trajectoire qui débute et se termine sur une même équipotentielle donne $\Delta V = 0$.

Le potentiel étant une grandeur relative, seules les *différences* de potentiel peuvent être calculées avec l'équation 4.9. Toutefois, si on fixe par exemple la référence $V_A = 0$, la différence de potentiel $V_B - V_A$ devient égale au potentiel V_B.

Dans tout contexte électrostatique, la force électrique est conservative, donc le travail qu'elle fait ne dépend que de la position initiale A et de la position finale B et non du trajet d'intégration suivi. Il en va donc de même de l'intégrale de ligne dans l'équation ci-dessus, puisqu'elle ne diffère du travail fait par la force électrique que d'un facteur q. On exprime souvent cette idée en disant que le *champ* est conservatif. Par conséquent, *toutes les trajectoires* entre A et B, par exemple les trois trajectoires illustrées à la figure 4.11*b*, donneront le même résultat d'intégration. On a donc intérêt à choisir une trajectoire qui simplifie l'intégrale de l'équation 4.9.

Si on applique l'équation 4.9 au cas simple d'un champ uniforme, elle se simplifie considérablement. Pour déterminer la différence de potentiel $V_B - V_A$ entre deux points quelconques A et B situés dans un tel champ, on peut imaginer une trajectoire $\vec{\mathbf{s}}$ en ligne droite de A vers B (figure 4.12*a*). L'intégrale de ligne de l'équation 4.9 devient alors $\int \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{E}} \cdot \int \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{s}}$, donc

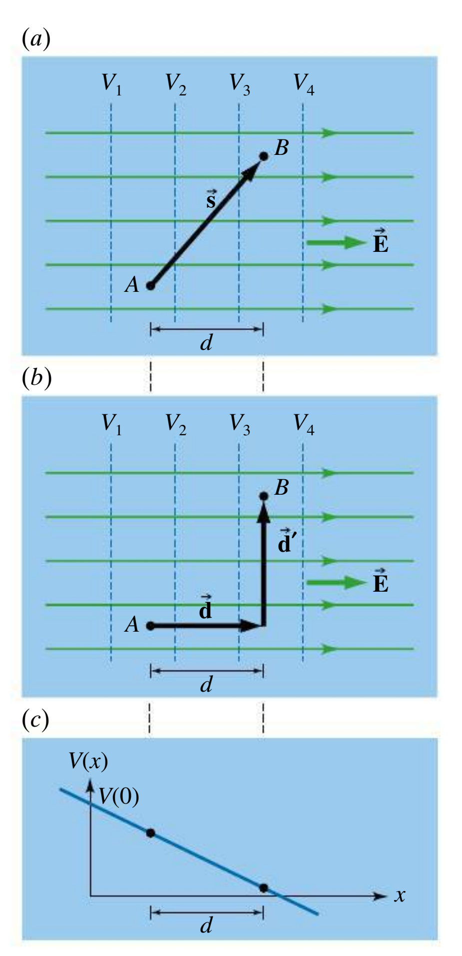
$$(\vec{\mathbf{E}} \text{ uniforme}) \qquad \Delta V = -\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{s}} \qquad (4.10a)$$

Pour montrer que ΔV ne dépend que de la position initiale et finale et non du chemin suivi, imaginons qu'on subdivise le déplacement $\vec{\mathbf{s}}$ en deux déplacements $\vec{\mathbf{d}}$ et $\vec{\mathbf{d}}'$, respectivement parallèle et perpendiculaire au champ (figure 4.12*b*). Le produit scalaire de vecteurs perpendiculaires entre eux étant nul, l'équation 4.10*a* devient $\Delta V = -(\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{d}} + \vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{d}}') = -\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{d}}$, qu'on peut écrire

Différence de potentiel dans un champ électrique uniforme

$$\Delta V = \pm Ed \qquad (4.10b)$$

où d est le module de la composante du déplacement parallèle ou antiparallèle au champ. Le signe est positif lorsque le déplacement est orienté dans le sens *opposé* au champ (vers le « haut » d'une ligne de champ).



▲ **Figure 4.12**

(*a*) Dans un champ uniforme, la variation de potentiel lorsqu'on se déplace du point A au point B est égale à $\Delta V = -\vec{\mathbf{E}} \cdot \vec{\mathbf{s}}$. (b) Le ΔV obtenu ne dépend pas de la trajectoire. (*c*) Dans un champ uniforme, le potentiel décroît *linéairement* avec la distance le long des lignes de champ.

L'une ou l'autre des équations précédentes permet d'obtenir V comme une fonction de la position. À la figure 4.12*c*, on a choisi un axe des x parallèle au champ et dont l'origine coïncide avec le point A. Puisque le champ électrique a seulement une composante selon x, l'équation 4.10*a* se réduit à $\Delta V = -E_x \Delta x$. En remplaçant E_x par E et Δx par $+x$, on obtient

$$V(x) = V(0) - Ex$$

On aurait obtenu le même résultat avec l'équation 4.10*b* : le déplacement étant vers le « bas » des lignes de champ, on aurait choisi le signe négatif dans l'équation qui serait devenue $\Delta V = V_B - V_A = -Ed$. Puisque le point A coïncide avec l'origine du système d'axes, on a $x = d$, $V_B = V(x)$ et $V_A = V(0)$. On obtient donc à nouveau $V(x) = V(0) - Ex$.

Comme le montre la figure 4.12*c*, cette dernière équation a la forme d'une droite dont la pente est $-E$ et l'ordonnée à l'origine est $V(0)$: le potentiel décroît linéairement quand on « descend » une ligne de champ. D'ailleurs, si on inversait le sens de l'axe des x, on obtiendrait une pente $+E$, ce qui confirme l'équation 4.2 que nous n'avions obtenue que par analogie entre le potentiel et l'altitude. On constate aussi qu'à chaque valeur de x correspond une valeur particulière de V, ce qui signifie que les surfaces équipotentielles sont des plans. Cela correspond à la figure 4.4*a* (p. 128), qui n'avait été déduite que par analogie.

Exemple 4.7

Le champ électrique dans une région de l'espace, produit par des charges sources non spécifiées, est donné par $\vec{\mathbf{E}} = (10^4/x)\vec{\mathbf{i}}$, où E est en newtons par coulomb (N/C) et x est en mètres (m). Calculer la différence de potentiel $V_B - V_A$, sachant que les points A et B sont respectivement situés à $x = 0{,}30$ m et à $x = 0{,}80$ m sur l'axe des x.

Solution

Le champ étant non uniforme, on utilise l'équation 4.9. On considère un parcours en ligne droite de A vers B, le long de l'axe des x, qu'on subdivise en portions infinitésimales. Soit l'une de ces portions, $d\vec{\mathbf{s}}$, située entre les points C et C', lesquels sont situés respectivement aux coordonnées x et $x + dx$. Puisque le parcours est orienté vers les x positifs, on a $dx > 0$, donc $ds = dx$. La différence de potentiel entre les points C et C' est

$$\begin{aligned} dV &= -E\, ds \cos\theta = -(10^4/x)\, dx \cos 0 \\ &= -10^4\, dx/x \end{aligned}$$

où $\theta = 0$, car $\vec{\mathbf{E}}$ et $d\vec{\mathbf{s}}$ pointent tous deux dans le sens des x positifs. Cette équation exprime la différence de potentiel entre deux points voisins, où qu'ils soient situés, le long du parcours entre A et B. Pour additionner ces variations infinitésimales et obtenir la différence de potentiel entre les points A et B, on intègre :

$$\begin{aligned} V_B - V_A &= \int_A^B dV = -10^4 \int_{0{,}30\text{ m}}^{0{,}80\text{ m}} \frac{dx}{x} = -10^4 \ln x \Big|_{0{,}30\text{ m}}^{0{,}80\text{ m}} \\ &= -10^4 \ln \frac{0{,}80}{0{,}30} = -9{,}81 \times 10^3\text{ V} \end{aligned}$$

Tel qu'attendu, $V_B - V_A$ est négatif. En effet, le potentiel décroît puisque le point B est situé plus « bas » le long d'une ligne de champ que le point A. ■

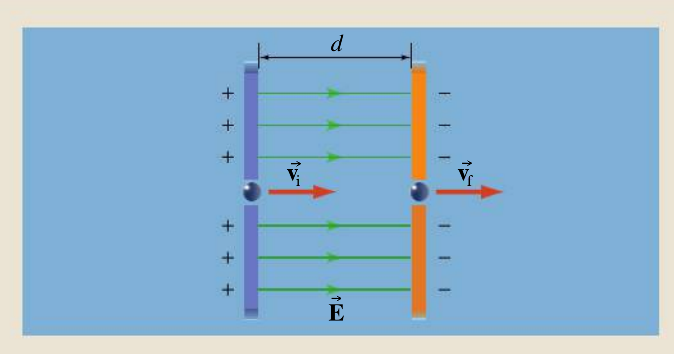
Exemple 4.8

Soit deux plaques parallèles distantes de 20 cm l'une de l'autre, entre lesquelles existe un champ électrique uniforme de 3×10^5 N/C. (a) Un proton, de masse $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg, pénètre avec une vitesse initiale de 5×10^6 m/s dans la région entre ces deux plaques (figure 4.13). Si tout se déroule dans le vide, quelle est sa vitesse finale ? (b) On veut utiliser le même dispositif pour faire subir la même variation d'énergie cinétique à un électron. Que faut-il faire ?

Solution

(a) Le champ étant uniforme, on pourrait déterminer la force sur le proton et utiliser l'approche de la section 2.4, mais on utilisera plutôt la conservation de l'énergie. Dans le vide, il n'y a aucun travail extérieur dû au frottement, donc l'équation 4.4*a* s'applique :

$$\tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 = -q\Delta V \qquad \text{(i)}$$



▲ **Figure 4.13**

Lorsqu'un proton se déplace le long des lignes de champ électrique, son énergie potentielle électrique diminue et son énergie cinétique augmente.

Pour obtenir ΔV, on peut utiliser l'équation 4.10*b* au lieu de l'équation 4.9, car le champ est uniforme. Comme le proton « descend » le long d'une ligne de champ, il se dirige vers des potentiels décroissants. On prend donc le signe négatif dans l'équation :

$$\Delta V = -Ed = -6 \times 10^4 \text{ V}$$

De l'équation (i), on tire

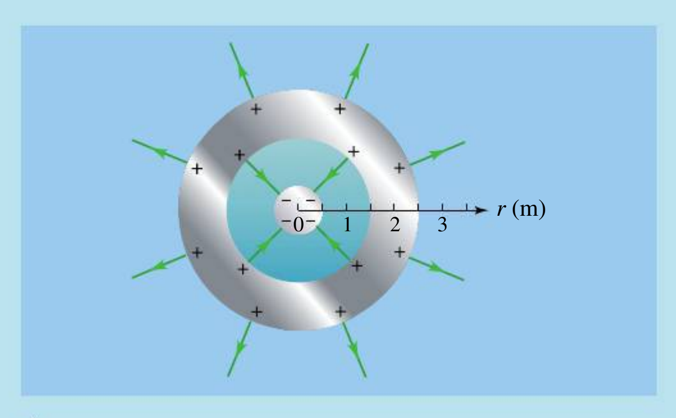
$$v_f^2 = v_i^2 - \frac{2q\Delta V}{m}$$
$$= (5 \times 10^6 \text{ m/s})^2 - \frac{2(1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C})(-6 \times 10^4 \text{ V})}{1{,}67 \times 10^{-27} \text{ kg}}$$
$$= 36{,}5 \times 10^{12} \text{ m}^2/\text{s}^2$$

Donc, $v_f = 6 \times 10^6$ m/s.

(b) Un électron « tombe » vers le haut des lignes de champ. Il faut donc lui faire traverser le dispositif en sens inverse (vers la gauche sur la figure). Puisque la charge de l'électron a la même grandeur que celle du proton, la variation d'énergie cinétique aura aussi la même grandeur. Si on avait voulu produire le même gain de vitesse, toutefois, il aurait fallu réduire le champ afin de tenir compte de la masse plus petite de l'électron. ■

Exemple 4.9

La figure 4.14 montre une combinaison sphère-coquille sphérique où la sphère conductrice centrale a un rayon de 50 cm et porte une charge de −4 μC. La coquille conductrice de 2,5 m de rayon, dont la cavité a un rayon de 1,5 m, porte une charge excédentaire de +12 μC. En utilisant les résultats de l'exemple 2.5, où on a obtenu $E_r(r)$ pour la même situation, déterminer cette fois le potentiel $V(r)$.



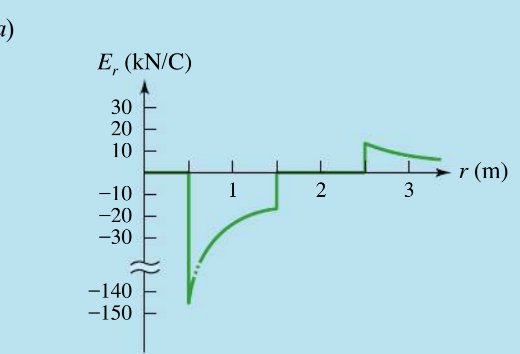
▲ **Figure 4.14**

Distribution des charges et lignes de champ d'une petite sphère conductrice chargée placée à l'intérieur d'une sphère conductrice creuse chargée.

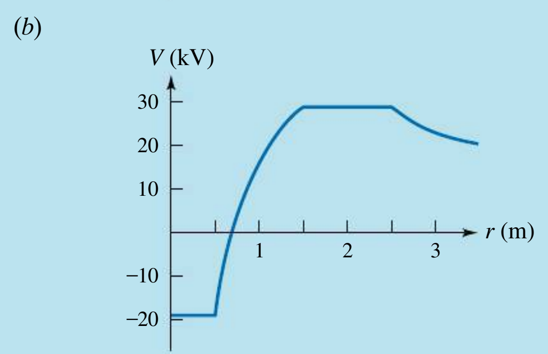
Solution

La figure 4.15*a* représente la composante de champ telle qu'obtenue à l'exemple 2.5 : elle vaut $-k(4\ \mu\text{C})/r^2$ si 0,5 m < r < 1,5 m et $+k(8\ \mu\text{C})/r^2$ si r > 2,5 m. Pour déterminer le potentiel, on commence là où V = 0 (à l'infini) et on s'approche. À l'extérieur et jusqu'à la

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 4.15**

(*a*) Graphique de la composante E_r du champ produit par les charges distribuées sur la combinaison sphère-coquille sphérique représentée à la figure 4.14. (*b*) Graphique de V correspondant.

paroi, le champ est le même que pour une charge ponctuelle de 8 μC. Le potentiel est donc $V = k(8\ \mu C)/r$. À l'intérieur du matériau de la coquille, le champ est nul donc le potentiel ne change pas et correspond à $k(8\ \mu C)/(2{,}5\ m) = 28{,}8$ kV.

Dans la zone située entre la sphère centrale et la paroi intérieure de la coquille, le champ est le même que pour une charge ponctuelle de 4 μC, mais pas le potentiel, qui doit avoir la valeur de 28,8 kN/C à $r = 1{,}5$ m. On peut obtenir le potentiel en un point quelconque de cette zone si on choisit une trajectoire qui part de ce point ($r = r_A$) et se termine en un endroit où le potentiel est connu, c'est-à-dire en $r = r_B = 1{,}5$ m. Sur un déplacement infinitésimal dr qui fait partie du trajet entre ces deux points, on a $dV = -E_r\,dr = +kQ/r^2\,dr$, où $Q = 4\ \mu C$. Ainsi,

$$\begin{aligned} V_B - V_A &= \int dV = kQ\int_{r_A}^{1,5\ m} \frac{dr}{r^2} \\ &= kQ\left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{(1{,}5\ m)}\right] \end{aligned} \qquad \text{(i)}$$

où $V_B = k(8\ \mu C)/(2{,}5\ m) = 28{,}8$ kV. Puisque r_A peut prendre n'importe quelle valeur entre 0,5 m et 1,5 m, on peut l'appeler r et appeler V son potentiel V_A. En isolant V_A dans l'équation (i), on obtient donc que $V = kQ'/(2{,}5\ m) - kQ/r + kQ/(1{,}5\ m)$, où Q' correspond à 8 μC.

On aurait pu écrire ce résultat directement en réalisant que l'intégrale de l'équation (i) donne le potentiel habituel kQ/r, mais où on a simplement décalé la valeur de référence $V = 0$ pour fixer plutôt $V = kQ'/r^2 = 28{,}8$ kV à $r = 1{,}5$ m. ■

Le potentiel décroît et atteint 0 V pour $r = 0{,}68$ m (vérifiez-le) ; il atteint sa valeur finale à la paroi de la sphère intérieure, donnée par $kQ'/(2{,}5\ m) - kQ/(0{,}5\ m) + kQ/(1{,}5\ m)$. Le graphe de $V(r)$ correspondant est illustré à la figure 4.15*b*. On note que le graphique de E_r correspond en tous points à moins la pente de la tangente (dérivée) de celui de V.

À la section 4.7, nous allons voir que le potentiel est toujours constant dans le matériau d'un conducteur à l'équilibre électrostatique.

Détermination du champ à partir du potentiel

En pratique, il est plus difficile de produire un champ ayant un module voulu que d'établir une différence de potentiel avec une pile électrique. De même, il est plus difficile de mesurer un champ que de mesurer une différence de potentiel avec un voltmètre (voir le chapitre 7). Nous allons donc voir comment calculer le champ à partir du potentiel, plutôt que l'inverse.

Selon la figure 4.11*a* (p. 136), où nous avons illustré $\vec{\mathbf{E}}$ et $d\vec{\mathbf{s}}$, la composante de $\vec{\mathbf{E}}$ parallèle à $d\vec{\mathbf{s}}$ est $E_s = E\cos\theta$. Par une substitution dans l'équation 4.8, cette équation devient

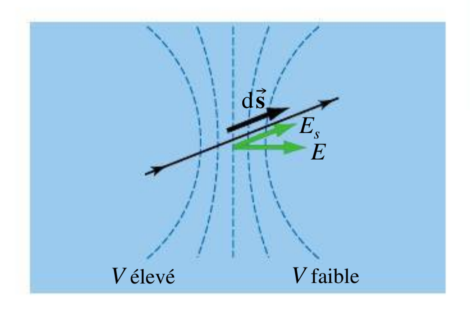
Composante du champ en fonction du potentiel

$$E_s = -\frac{dV}{ds} \qquad (4.11a)$$

Si le potentiel est connu en chaque point selon un axe, par exemple l'axe des x, l'équation 4.11*a* peut s'écrire $E_x = -dV/dx$. Si le champ est radial, cette équation peut devenir $E_r = -dV/dr$. Si on l'applique le long d'une ligne de champ, en supposant que la direction de celle-ci soit connue, on peut obtenir le *module* du champ :

$$(d\vec{\mathbf{s}} \mathbin{//} \vec{\mathbf{E}}) \qquad E = \left|\frac{dV}{ds}\right|_{max} \qquad (4.11b)$$

où l'indice « max » indique que la direction d'une ligne de champ, normale aux équipotentielles, est celle où V varie le plus rapidement avec la position. La figure 4.16 montre la différence entre la direction quelconque employée dans



▲ **Figure 4.16**

La composante du champ le long d'un déplacement $d\vec{\mathbf{s}}$ est $E_s = -dV/ds$. Le champ est normal aux équipotentielles. Si $d\vec{\mathbf{s}}$ est parallèle au champ, alors la valeur absolue de dV/ds est maximum et correspond au module du champ.

l'équation 4.11a et la direction normale aux équipotentielles employée dans l'équation 4.11b.

Quand on applique les deux équations ci-dessus, il arrive que V soit exprimé en fonction de plusieurs coordonnées, cartésiennes ou non, et qu'on veuille dériver seulement par rapport à l'une de ces coordonnées. Aux fins de la dérivée, on s'imagine alors que les autres coordonnées prennent des valeurs constantes, comme l'illustrera l'exemple 4.10.

Plus formellement, en fonction des composantes cartésiennes, le champ électrique s'écrit $\vec{\mathbf{E}} = E_x\vec{\mathbf{i}} + E_y\vec{\mathbf{j}} + E_z\vec{\mathbf{k}}$ et le déplacement infinitésimal est $d\vec{\mathbf{s}} = dx\vec{\mathbf{i}} + dy\vec{\mathbf{j}} + dz\vec{\mathbf{k}}$. On a donc

$$dV = -\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -(E_x\, dx + E_y\, dy + E_z\, dz)$$

Pour un déplacement dans la direction des x, $dy = dz = 0$, ce qui donne $dV = -E_x\, dx$. Par conséquent,

$$E_x = -\left(\frac{dV}{dx}\right)_{y,z \text{ constantes}} \equiv -\frac{\partial V}{\partial x}$$

où nous avons utilisé le fait qu'une dérivée dans laquelle toutes les variables sauf une sont maintenues constantes, appelée dérivée *partielle*, se note « ∂ » au lieu de « d ». On obtient une équation semblable pour les deux autres composantes. On peut grouper ces trois équations en utilisant la notation vectorielle suivante :

$$\vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial V}{\partial x}\vec{\mathbf{i}} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\mathbf{j}} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{\mathbf{k}} \equiv -\vec{\nabla} V \qquad (4.11c)$$

Le symbole $\vec{\nabla} V$ est appelé *gradient* de V. Il s'agit d'un vecteur qui pointe dans la direction où V augmente le plus vite.

L'équation 4.11c montre que le champ électrique ne dépend que du taux de variation de V, le choix de la référence $V = 0$ étant arbitraire. En d'autres termes, les lois physiques sont invariantes sous translation de la référence $V = 0$. Le théorème de Noether, dont il a été question à la section 8.10 du tome 1, permet de montrer que le principe de conservation de la *charge* découle de cette invariance, tout comme les principes de conservation présentés dans le tome 1 découlaient eux aussi de propriétés de symétrie des lois physiques.

Si la fonction qui donne le potentiel V en chaque point de l'espace est inconnue, on ne peut la dériver pour appliquer les équations 4.11a ou 4.11b. Par contre, dès qu'on connaît la forme de deux équipotentielles V_1 et V_2 dans une petite région de l'espace, on peut estimer le module du champ en un quelconque point C situé entre ces équipotentielles (figure 4.17) : si la distance $\Delta\ell$ entre ces équipotentielles, mesurée le long de la ligne de champ qui passe par le point C, est suffisamment petite, l'équation 4.11b devient

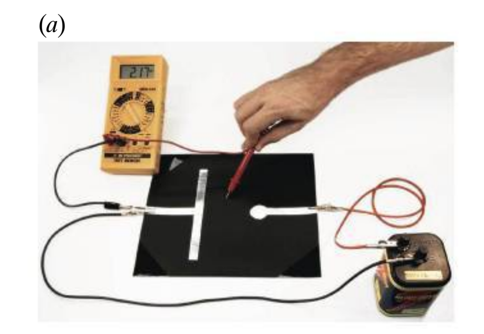
$$E = \left|\frac{dV}{ds}\right| \approx \left|\frac{V_2 - V_1}{\Delta\ell}\right|$$

Notez que, d'après les dernières équations, le champ électrique peut aussi bien s'exprimer en volts par mètre qu'en newtons par coulomb :

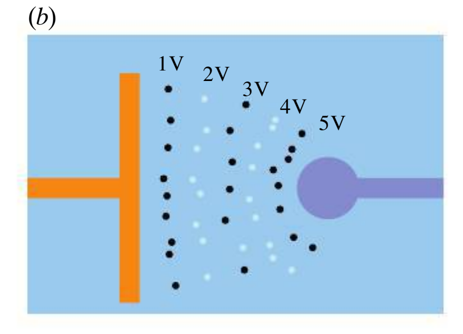
$$1 \text{ V/m} = 1 \text{ N/C}$$

Comme il est facile de mesurer ou d'établir une différence de potentiel, *c'est le volt par mètre qui est utilisé le plus souvent comme unité du champ électrique*, et nous l'adopterons à partir de maintenant.

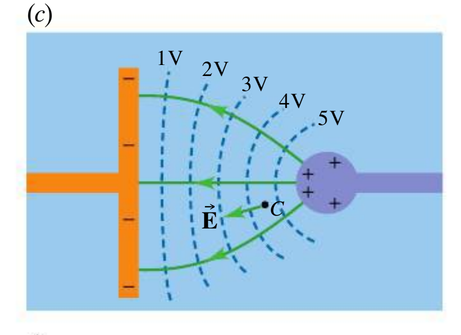
(*a*)



(*b*)

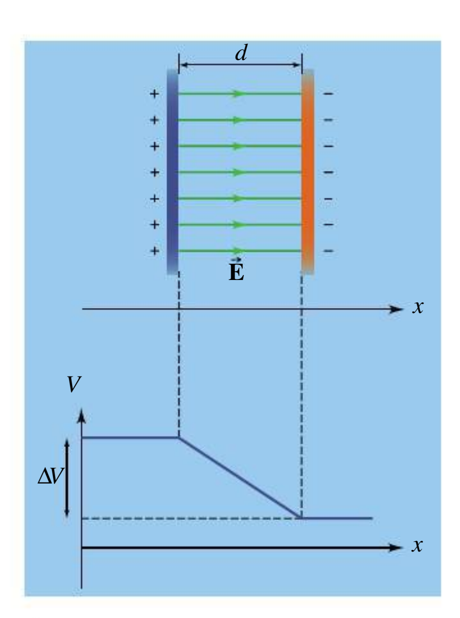


(*c*)



▲ **Figure 4.17**

(*a*) Ce montage expérimental permet de mesurer le potentiel de points situés entre deux électrodes chargées. La situation n'est pas tout à fait électrostatique (une légère quantité de charge peut traverser le papier carbone entre les électrodes), ce qui permet à un simple voltmètre de fonctionner. (*b*) On peut relier tous les points ayant le même potentiel et déduire la forme des équipotentielles. (*c*) Le module du champ en un quelconque point C est $E = \Delta V/\Delta\ell$.



▲ **Figure 4.18**

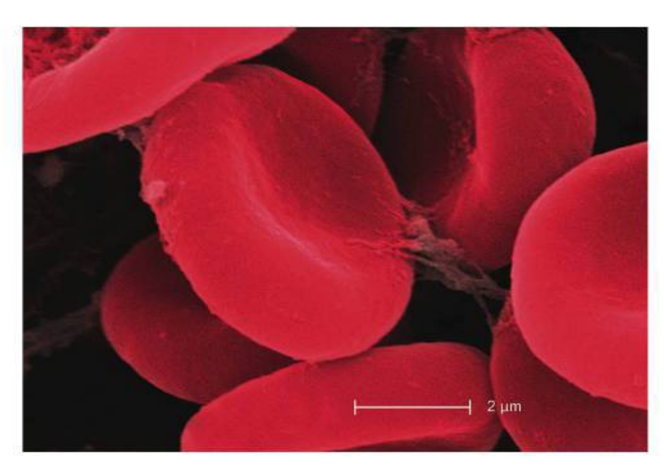
Le champ uniforme dans un condensateur plan est perpendiculaire aux plaques et son module est donné par $E = \Delta V/d$, où d est la distance entre les plaques.

Comme c'était le cas de l'équation 4.9, l'équation 4.11*b* se simplifie considérablement si on l'applique au cas d'un champ uniforme. Pour produire un champ électrique uniforme, on utilise typiquement les deux plaques parallèles d'un condensateur plan (figure 4.18), qu'on charge en établissant entre elles une différence de potentiel. Cela peut se faire facilement en reliant les plaques aux bornes d'une pile électrique (voir le chapitre 7). Pour obtenir le module du champ en fonction de cette différence de potentiel, on utilise l'équation 4.11*b*, selon laquelle le champ est le taux de variation du potentiel par rapport à la position. Puisque le champ est constant, le taux de variation du potentiel est constant, tel qu'illustré sur le graphique au bas de la figure 4.18, et le taux de variation local dV/ds est égal au taux de variation moyen $\Delta V/\Delta s$. Si on prend ΔV comme étant la différence de potentiel *entre les plaques* et $\Delta s = d$, la distance *entre les plaques*, alors le module du champ est

Module du champ dans un condensateur plan

$$E = \frac{\Delta V}{d} \qquad (4.12)$$

À la section 5.1, nous utiliserons le résultat ci-dessus pour montrer comment la différence de potentiel aux bornes du condensateur se relie aux charges que portent ses plaques.



Dans les membres cellulaires, comme celles de ces globules rouges, se trouvent des protéines qui « pompent » certains ions afin de les accumuler d'un côté ou de l'autre de la membrane. Sachant que ces charges accumulées causent typiquement une différence de potentiel de 70 mV, pouvez-vous estimer le champ électrique qui règne dans la membrane ? Le sujet connexe du chapitre 5 revient sur la question.

Exemple 4.10

On mesure que le potentiel dans une région tridimensionnelle de l'espace est donné, en fonction des coordonnées d'un système d'axes, par $V = 100/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, où les positions sont en mètres (m) et V est en volts (V). Calculer (a) les composantes E_x, E_y et E_z du champ électrique, ainsi que (b) son module E, en fonction de la position (x, y, z).

Solution

(a) On applique l'équation 4.11*a* selon chaque axe. Selon x, on obtient

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = -100\frac{d}{dx}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

Quand on dérive par rapport à x, les points C et C' sont situés sur un axe parallèle à l'axe des x, donc on peut considérer y et z comme des constantes. Cette dernière équation devient donc

$$E_x = -100(-\tfrac{1}{2})(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2 + y^2 + z^2)$$
$$= -100(-\tfrac{1}{2})(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}2x$$
$$= \frac{100x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Selon y, on utilise $E_y = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}y$. Si on considère x et z comme des constantes, cette dérivée donne

$$E_y = \frac{100y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

Et selon z, on utilise $E_z = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}z$, qui donne, si on considère x et y comme des constantes,

$$E_z = \frac{100z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$$

(b) Le module est donné par $E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$. En substituant les trois expressions obtenues pour les composantes, on a

$$E = \frac{100\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{100}{x^2 + y^2 + z^2}$$

L'expression fournie dans l'énoncé et celle qu'on vient d'obtenir correspondent au potentiel et au champ produit par une charge ponctuelle, respectivement en $1/r$ et en $1/r^2$ (voir la section 4.4). On aurait pu obtenir le résultat beaucoup plus directement en dérivant par rapport à r. ■

4.4 LE POTENTIEL ET L'ÉNERGIE POTENTIELLE DANS LE CHAMP D'UNE CHARGE PONCTUELLE

Dans la section précédente, nous avons présenté deux outils généraux qui expriment le lien entre le champ et le potentiel : si on connaît le potentiel, on peut le dériver pour obtenir chaque composante du champ $E_s = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}s$; de même, si on connaît le champ, on peut l'intégrer pour obtenir la différence de potentiel $\Delta V = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$. Nous avons vu que ces deux équations deviennent très simples si on les applique à un champ uniforme. Dans cette section, nous allons les appliquer au cas d'une charge ponctuelle, ce qui permettra à nouveau d'obtenir des équations plus simples.

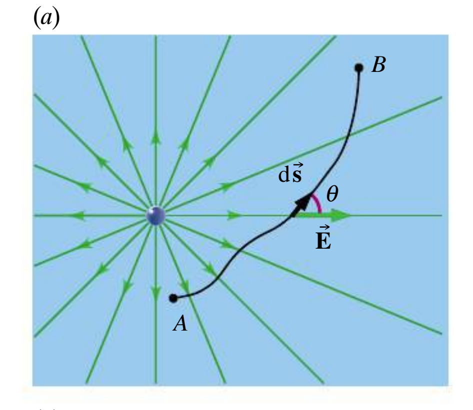
Dans un premier temps, on suppose qu'on connaît le champ et qu'on veut déterminer le potentiel. On considère donc deux points quelconques A et B entre lesquels on calcule $V_B - V_A = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$. La figure 4.19 illustre un cas où $Q > 0$ et où $r_B > r_A$, ce qui n'affectera pas la généralité du résultat que nous obtiendrons*. Contrairement à la section précédente, $\vec{\mathbf{E}}$ ne peut être extrait de l'intégrale puisqu'il n'est pas uniforme. Le produit scalaire dans l'équation 4.9 peut s'écrire $\vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = E\,\mathrm{d}s\cos\theta$, où $\mathrm{d}s\cos\theta$ est $\mathrm{d}s_r$, la projection de $\mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$ dans la direction du champ, laquelle est égale à $\mathrm{d}r$, l'accroissement de la distance à la charge (figure 4.19*b*). De même, si $Q > 0$, le module du champ électrique et sa composante dans la direction de r sont identiques, de sorte que

$$\vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = E\,\mathrm{d}s\cos\theta = E_r\,\mathrm{d}r$$

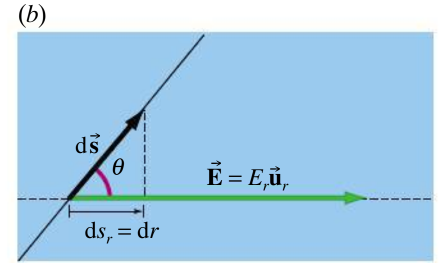
L'équation 4.9 donne

$$V_B - V_A = -\int_A^B E_r\,\mathrm{d}r$$
$$= -\int_A^B \frac{kQ}{r^2}\mathrm{d}r$$
$$= -\left[-\frac{kQ}{r}\right]\Bigg|_A^B = \frac{kQ}{r_B} - \frac{kQ}{r_A}$$

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 4.19**
(*a*) La variation de potentiel du point A au point B est $V_B - V_A = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$. (*b*) Détails de la relation entre un déplacement infinitésimal et le champ électrique. Ce déplacement est un des tronçons de la trajectoire entre A et B, illustrée en (*a*).

* Nous choisissons volontairement une situation pour laquelle $\theta < 90°$ et $Q > 0$. Dans les autres cas, les modifications de signes associées aux projections de vecteurs et à l'ordre d'intégration conduisent de toute manière à l'équation que nous allons obtenir (équation 4.13).

On peut choisir que le point A est la position de référence où $V = 0$. Pour simplifier l'équation obtenue, on considère que le point A est infiniment éloigné de la charge Q. Si l'on pose $r_A \to \infty$ et $r_B = r$, le potentiel à la distance r de la charge Q devient

Potentiel à une distance *r* d'une charge *Q*

$$V = \frac{kQ}{r} \tag{4.13}$$

L'utilisation de la constante $k = 1/4\pi\varepsilon_0$ suppose que la charge q se trouve *dans le vide*. Si elle se trouve dans un diélectrique, on doit remplacer ε_0 par $\kappa\varepsilon_0$, ce qui implique qu'il faut remplacer k par k/κ. Sauf mention du contraire, nous supposerons que toutes les charges sont dans le vide.

Notons l'absence de valeur absolue dans cette équation, qui est valable que Q soit positive ou négative. Le potentiel au voisinage d'une charge négative est donc négatif. Puisqu'à chaque valeur de r correspond une seule et unique valeur de V, les équipotentielles de cette fonction potentiel sont des surfaces sphériques centrées sur la charge (figure 4.20*a*). Cette figure vérifie les trois propriétés énoncées à la section 4.1 : quel que soit le signe de Q, le champ pointe vers les potentiels décroissants, les équipotentielles sont perpendiculaires aux lignes de champ et elles sont plus rapprochées là où le champ est plus intense et où le potentiel varie plus rapidement selon la distance à la charge. (Comparez avec la figure 4.4*b*, p. 128, qui n'avait été déduite que par analogie.)

La figure 4.20*b* montre le graphe de V le long d'un axe x quelconque passant par la charge Q. Pour tracer le graphique, on a utilisé l'équation 4.13 dans laquelle $r = -x$ pour $x < 0$ et $r = x$ pour $x > 0$. Le graphe comporte une asymptote verticale en $x = 0$, là où se trouve la charge. Grâce à cette figure, on comprend que le fait d'avoir placé la référence $V = 0$ à l'infini signifie seulement que le potentiel décroît vers $V = 0$ quand on s'éloigne d'une charge Q positive, alors qu'il croît vers $V = 0$ quand on s'éloigne d'une charge Q négative. Cela correspond aux attentes : une charge cible q plongée dans un potentiel « tombe »

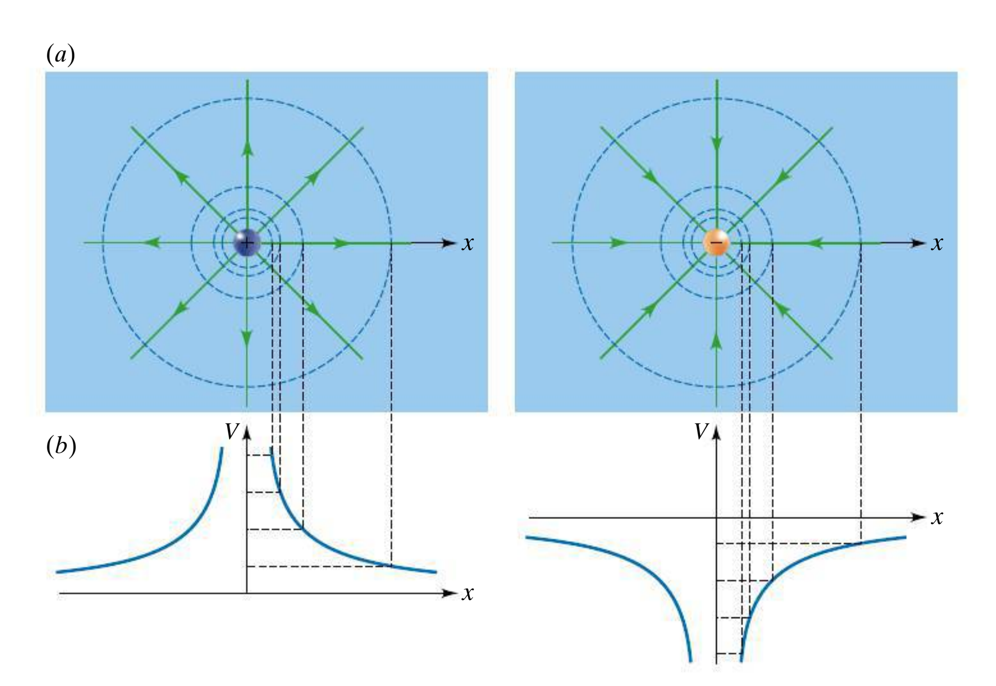


Figure 4.20

(*a*) La fonction potentiel $V = kQ/r$ pour une charge ponctuelle de chaque signe. Les cercles en pointillés représentent les surfaces équipotentielles (qui sont des sphères centrées sur la charge). (*b*) Graphique de V le long d'un axe x quelconque passant par la charge. L'origine de l'axe et la charge coïncident.

vers les potentiels décroissants, c'est-à-dire vers la charge Q si elle est négative, en sens inverse si elle est positive.

Soulignons que nous venons d'obtenir le potentiel à partir du champ, mais que les outils de la section 4.3 permettent aussi de faire l'opération inverse. En effet, si on suppose que $V = kQ/r$ est connu, on peut dériver pour obtenir le champ : l'équation 4.11*a* appliquée le long d'un axe r s'écrit $E_r = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$, d'où

$$E_r = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{kQ}{r}\right) = -kQ\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\right) = +\frac{kQ}{r^2}$$

Selon ce résultat, E_r a le même signe que Q, tel qu'attendu.

L'énergie potentielle de deux charges ponctuelles

Considérons maintenant ce qui arrive quand une charge cible q se déplace dans le potentiel d'une unique charge source Q, considérée comme immobile. Lorsque la charge q est située en un point dont le potentiel est V, son énergie potentielle est $U = qV$. Mais ici, le potentiel est celui produit par la charge Q, c'est-à-dire $V = kQ/r$. Après substitution, on obtient que l'énergie potentielle du système est

$$U = \frac{kqQ}{r} \qquad (4.14)$$

Si les charges q et Q sont dans un diélectrique, on remplace k par k/κ.

Bien sûr, on peut aussi considérer que la charge source est q et que c'est la charge Q qui se déplace (c'est ce que verrait un observateur qui se déplace avec q). On considère alors que l'énergie est $U = QV$ où $V = kq/r$, ce qui donne à nouveau l'équation ci-dessus. Cette symétrie montre bien que U est en fait l'énergie *du système* formé par les deux charges et que r est la distance *entre elles*, peu importe celle que l'on considère comme immobile.

On remarque que l'équation 4.14 ne contient aucune valeur absolue. Quand q et Q ont des signes différents, leur énergie potentielle est donc négative. Ce signe n'a aucune importance, seules les variations d'énergie potentielle ayant un sens physique. Or, si on libère q, on s'attend à ce qu'elle « tombe » en direction de Q, ce qui fait effectivement diminuer l'énergie potentielle (r diminue, donc U devient encore plus négative). À l'inverse, quand les deux charges ont le même signe, U est positive. Mais si on libère q, on s'attend cette fois à ce qu'elle « tombe » en s'éloignant de Q, ce qui correspond quand même à une baisse d'énergie potentielle.

L'énergie potentielle d'une paire de charges n'est nulle que si elles sont séparées par une distance r infinie. Le signe de U a donc une interprétation physique pratique : deux charges de signes opposés, pour lesquelles $U < 0$, ont *moins* d'énergie potentielle que si elles étaient séparées par une distance infinie. En l'absence d'énergie cinétique, il faut donc fournir un travail extérieur pour séparer les charges. À l'inverse, deux charges de même signe ($U > 0$) tendent spontanément vers l'infini ; il n'y a donc aucun travail extérieur à fournir pour les séparer.

Charges libres ou charges liées

Supposons maintenant qu'au lieu de faire un travail extérieur, on fournit aux charges de l'énergie cinétique. Si $K + U < 0$, l'énergie cinétique est inférieure au travail qu'il faudrait faire pour séparer les charges et elles demeurent donc *captives* l'une de l'autre ; on dit qu'elles forment un *système lié*. En revanche, si $K + U > 0$, l'énergie cinétique suffit à amener les charges à une distance infinie l'une de l'autre.

En terminant, soulignons que le fait d'avoir choisi $U = 0$ à l'infini permet une interprétation parfois utile. Selon l'équation 4.7, la variation d'énergie

potentielle est égale au travail fait par un agent extérieur quand $\Delta K = 0$. On peut donc dire que l'énergie d'un système de deux charges correspond au travail qu'il faut faire pour les amener de l'infini jusqu'à une distance r l'une de l'autre.

Exemple 4.11

On projette une particule α ($m = 6{,}64 \times 10^{-27}$ kg, $q = 2e$) vers le noyau d'un atome d'or ($Q = 79e$), considéré comme immobile, et on observe qu'elle revient sur ses pas. (a) Si la vitesse initiale de la particule α est de $1{,}8 \times 10^7$ m/s, à quelle distance minimale du centre du noyau parvient-elle ? Considérer que la particule α part de l'infini. (b) Si la particule α part en réalité à 20 cm du noyau, avons-nous fait une erreur importante en considérant en (a) qu'elle part de l'infini ?

Solution

(a) Puisqu'il n'y a pas d'agent extérieur, l'énergie mécanique est conservée : $K_i + U_i = K_f + U_f$. Au point initial, r est infini (donc $U_i = 0$) et $K_i = \frac{1}{2}mv_i^2$. On considère un point final où la particule est à sa distance minimale du noyau. À ce point où $r_f = r_{min}$, la particule est en train d'inverser sa vitesse, donc est immobile ($K_f = 0$). On a donc $K_i = U_f$, où $U_f = kqQ/r_{min}$, donc :

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{158ke^2}{r_{min}} \qquad \text{(i)}$$

d'où $r_{min} = 3{,}39 \times 10^{-14}$ m.

Puisque le diamètre d'un atome est $\approx 10^{-10}$ m et que la particule α ne peut revenir sur ses pas qu'à condition de s'approcher à $\approx 10^{-14}$ m d'une charge positive, cette expérience a historiquement permis de conclure que toute la charge positive de l'atome est concentrée dans un petit noyau. ■

(b) L'énergie cinétique initiale est $K_i = \frac{1}{2}mv_i^2 = 1{,}08 \times 10^{-12}$ J. Si on avait considéré que $r_i = 0{,}2$ m, on aurait eu $U_i = kqQ/r_i = 1{,}82 \times 10^{-25}$ J, c'est-à-dire $\approx 10^{13}$ fois moins que K_i ! Il faudrait tenir compte d'une douzaine de chiffres significatifs pour que la somme de ces deux nombres diffère de K_i. L'erreur est donc négligeable.

En pratique, l'énergie potentielle de deux charges microscopiques est négligeable dès qu'elles sont séparées de quelques millimètres, même si en théorie il faudrait les séparer d'une distance infinie. ■

Exemple 4.12

Une bille métallique de 5 mm de rayon porte une charge de 1 nC et est placée dans une pièce sous vide. La lumière incidente arrache un électron à la surface de cette bille et lui donne une vitesse initiale d'éloignement de 5×10^6 m/s. Quelle distance parcourt l'électron avant de s'immobiliser ?

Solution

Ce cas est similaire à celui de l'exemple précédent, sauf que les charges $q = -e$ et $Q = +1$ nC ont des signes opposés. Au point initial, $U_i = kqQ/r = -2{,}88 \times 10^{-16}$ J et $K_i = \frac{1}{2}mv_i^2 = 1{,}14 \times 10^{-17}$ J, où nous avons utilisé la masse de l'électron, $m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg. Puisque $K_i + U_i = -2{,}77 \times 10^{-16}$ J < 0, la bille et l'électron forment un système lié. Au point final, $K_f = 0$ et $U_f = kqQ/r_{max}$. Puisque l'énergie est conservée, $U_f + K_f = -2{,}77 \times 10^{-16}$ J, donc $r_{max} = 5{,}206$ mm. La distance parcourue est donc $r_{max} - r_i = 0{,}206$ mm.

Exemple 4.13

En 1913, Niels Bohr (1885-1962) proposa un modèle de l'atome d'hydrogène dans lequel l'électron est en orbite sur une trajectoire circulaire autour d'un proton immobile. Trouver l'énergie mécanique de l'électron sachant que le rayon de l'orbite est égal à $0{,}53 \times 10^{-10}$ m.

Solution

La situation de l'électron est analogue à celle d'un satellite en orbite autour de la Terre. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, $K + U$. Ici, l'énergie potentielle est électrique et est

$$U = -\frac{ke^2}{r} \qquad \text{(i)}$$

Pour trouver l'énergie cinétique, nous devons calculer la vitesse orbitale v de l'électron. D'après la deuxième loi de Newton, l'accélération centripète $a = v^2/r$ est causée par la force électrique donnée par la loi de Coulomb :

$$\frac{ke^2}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

L'énergie cinétique de l'électron est donc

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{ke^2}{2r} \qquad \text{(ii)}$$

Par conséquent, l'énergie mécanique est

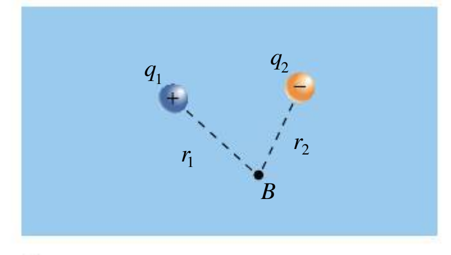
$$\begin{aligned} K + U &= \frac{ke^2}{2r} - \frac{ke^2}{r} = -\frac{ke^2}{2r} \\ &= \frac{-(9{,}0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2)(1{,}60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(1{,}06 \times 10^{-10} \text{ m})} \\ &= -2{,}17 \times 10^{-18} \text{ J} = -13{,}6 \text{ eV} \end{aligned}$$

L'énergie mécanique est négative lorsque la particule en orbite est liée. La valeur 13,6 eV coïncide bien avec la valeur expérimentale de l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène (énergie minimale requise pour arracher l'électron à son orbite la plus basse). Le modèle de Bohr est étudié au chapitre 9 du tome 3.

4.5 L'ADDITION DU POTENTIEL (DISTRIBUTION DE CHARGES PONCTUELLES)

Jusqu'ici, nous avons obtenu le potentiel à partir du champ, grâce à l'équation $\Delta V = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$. Mais le champ n'est pas toujours connu, ni facile à calculer. Nous allons maintenant voir comment calculer directement le potentiel à partir des charges sources, sans connaître le champ qu'elles produisent. Dans cette section, on considère le cas où les charges sources sont des charges ponctuelles discrètes. (La section suivante considérera une distribution continue de charge.)

Considérons une charge source ponctuelle q_1. S'il s'agit de la seule charge source, on sait que le potentiel en un point B quelconque est $V_1 = kq_1/r_1$, où r_1 est la distance entre B et q_1. Si on remplace q_1 par une charge q_2 située à un autre endroit, alors le potentiel du point B devient $V_2 = kq_2/r_2$, où r_2 est la distance entre B et q_2. Maintenant, supposons que les deux charges sources sont présentes simultanément (figure 4.21). On cherche à obtenir une équation pour calculer V_B sans avoir à trouver le champ résultant produit par les deux charges et à l'intégrer explicitement.



▲ Figure 4.21

En présence de seulement q_1, le potentiel au point B serait kq_1/r_1. En présence de seulement q_2, il serait kq_2/r_2. En présence de q_1 et de q_2 simultanément, il devient simplement $V = kq_1/r_1 + kq_2/r_2$.

Pour obtenir V_1, on aurait aussi pu choisir un point A à la référence $V = 0$, puis intégrer $V_1 = V_B = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot d\vec{\mathbf{s}}$, où $\vec{\mathbf{E}}_1$ est le champ produit par q_1. (C'est d'ailleurs cette opération qui a permis d'obtenir l'équation $V = kq/r$ à la section précédente.) De même, V_B en présence de q_2 seulement aurait été $V_2 = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}}_2 \cdot d\vec{\mathbf{s}}$. Pour obtenir V_B en présence des deux charges sources, il faudrait faire la même opération avec le champ $\vec{\mathbf{E}}$ produit *par les deux charges* : $V = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$. Mais on a vu au chapitre 2 que le champ produit par les deux charges, en vertu du principe de superposition, est simplement le champ résultant : $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} V &= -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = -\int_A^B (\vec{\mathbf{E}}_1 + \vec{\mathbf{E}}_2) \cdot d\vec{\mathbf{s}} \\ &= -\int_A^B \vec{\mathbf{E}}_1 \cdot d\vec{\mathbf{s}} - \int_A^B \vec{\mathbf{E}}_2 \cdot d\vec{\mathbf{s}} \\ &= \quad V_1 \quad + \quad V_2 \end{aligned}$$

On peut généraliser ce résultat à n'importe quel nombre de charges sources*. En somme, *les potentiels produits en un point par différentes charges sources*

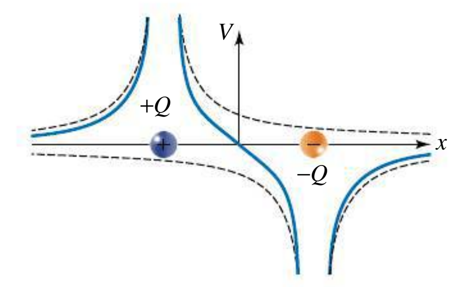
* Ce principe s'applique aussi si les sources ne sont pas des charges ponctuelles, mais il faut alors prendre garde que le potentiel attribué à chaque source soit toujours calculé par rapport à la même référence $V = 0$.

s'additionnent et il n'est pas nécessaire d'intégrer pour les obtenir. Ainsi, dans le cas de plusieurs charges *ponctuelles*, on a

Potentiel produit par une distribution de charges ponctuelles

$$V = \sum \frac{kQ_i}{r_i} \tag{4.15}$$

Le potentiel étant un scalaire, il s'agit d'une addition ordinaire et non d'une somme vectorielle. Il faut tenir compte des signes des charges.



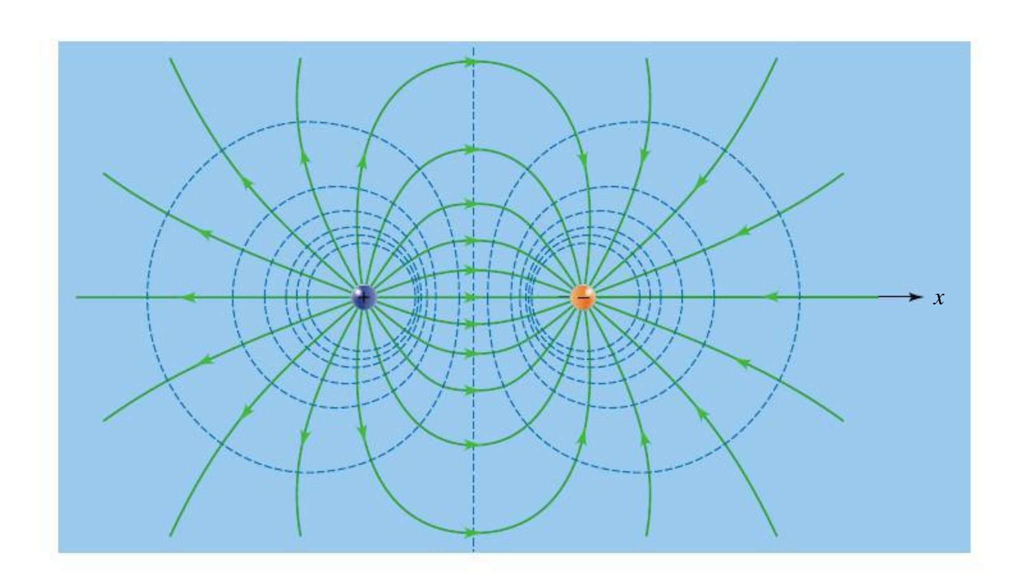
▲ Figure 4.22
Les courbes en pointillés sont les potentiels individuels produits par deux charges de même grandeur et de signes opposés. Les courbes continues correspondent au potentiel total.

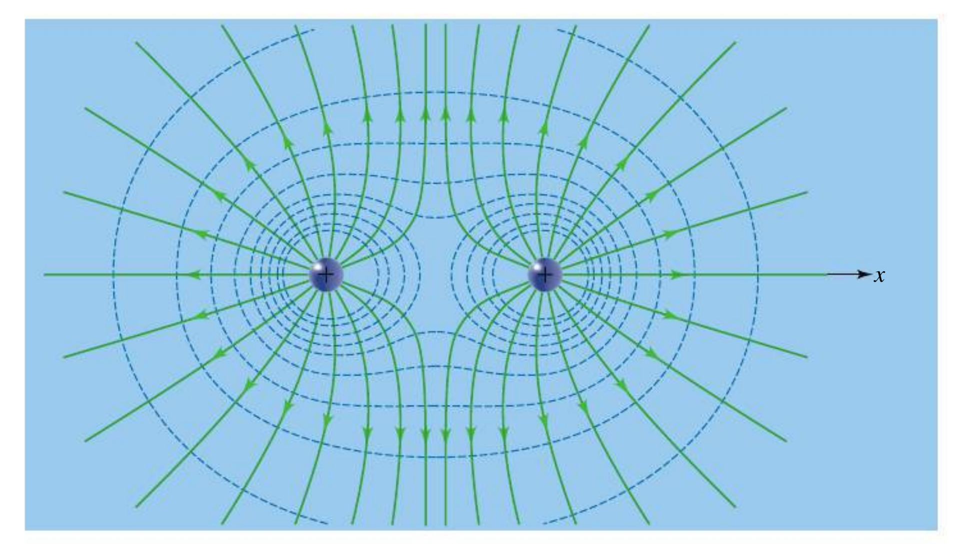
La figure 4.22 applique l'équation 4.15 au cas d'un dipôle, c'est-à-dire deux charges de même grandeur et de signes opposés, le potentiel étant mesuré le long de l'axe qui passe par les deux charges. Chaque courbe en pointillés représente le potentiel qui serait produit par une des charges si elle était isolée, alors que la courbe continue correspond au potentiel du dipôle. (Obtenir cette courbe est l'objet de l'exercice E49.) Notons qu'au milieu de la figure, $V = 0$, mais $E \neq 0$. Le fait que le potentiel soit nul signifie qu'une charge q qui serait placée là aurait la même énergie potentielle que si elle était à une distance infinie des deux charges $+Q$ et $-Q$. Contrairement à ce que le nombre « 0 » laisse parfois entendre, cela ne signifie *pas* que la charge q ne subirait aucune interaction : au contraire, le potentiel à cet endroit varie avec la position (la courbe bleue sur la figure 4.22 n'est pas horizontale), ce qui signifie qu'en cet endroit, la charge q « tomberait » en accélérant !

La figure 4.23 reprend le cas du dipôle, mais représente la configuration des équipotentielles et des lignes de champ électrique dans le plan qui contient les deux charges. Une fois les équipotentielles déterminées, il est facile d'obtenir les lignes de champ en traçant les perpendiculaires aux équipotentielles.

Au sujet connexe de la section 7.3, « L'électrocardiogramme », nous verrons que la figure 4.23 est un excellent modèle pour représenter le champ électrique produit par le cœur, si on accepte l'idée que les deux charges équivalentes peuvent se déplacer lentement d'une étape à l'autre d'un battement cardiaque. L'électrocardiographe, l'instrument utilisé pour mesurer l'activité électrique du cœur, est essentiellement un voltmètre ultrasensible qui mesure la différence de potentiel entre des points fixes, à la surface de la peau, pendant que les équipotentielles changent de position.

▶ Figure 4.23
Vue en coupe (dans le plan qui contient les deux charges) des équipotentielles (courbes en pointillés) et des lignes de champ (courbes continues) pour deux charges de même grandeur et de signes opposés. (Voir le problème P21 pour découvrir comment obtenir le graphe du potentiel électrique pour tout le plan de la figure.)

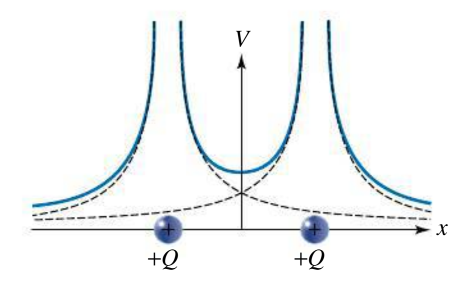




◀ Figure 4.24

Vue en coupe (dans le plan qui contient les deux charges) des équipotentielles (courbes en pointillés) et des lignes de champ (courbes continues) pour deux charges égales et positives. (Voir le problème P22 pour découvrir comment obtenir le graphe du potentiel électrique pour tout le plan de la figure.)

La figure 4.24 représente la configuration dans le plan des équipotentielles et des lignes de champ pour deux charges égales et positives. La figure 4.25 représente le potentiel total dû à deux charges égales et positives. (Cette situation est reprise dans l'exercice E47.) Notons qu'au milieu de la figure 4.25, $E = 0$, mais $V \neq 0$. Le fait que le champ soit nul signifie qu'une charge q qui serait placée là ne subirait aucune force. À cet endroit, le potentiel ne change pas avec la position.



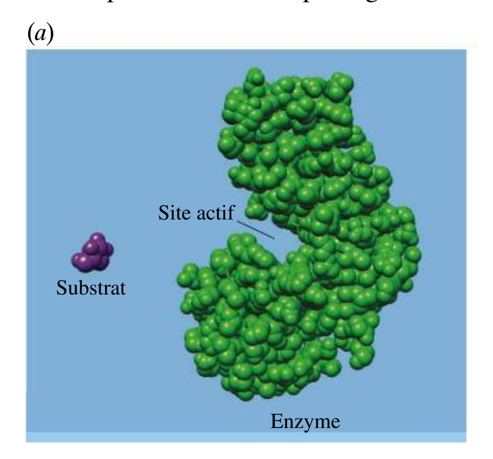
▲ Figure 4.25

Les deux courbes en traits pointillés représentent les potentiels individuels produits par deux charges égales et positives. Les courbes continues correspondent au potentiel total.

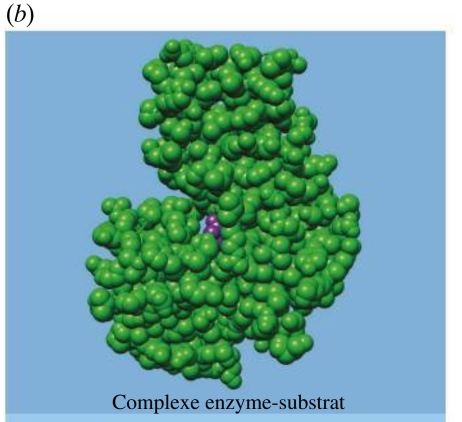
L'équation 4.15 a aussi une grande utilité sur le plan biochimique, car elle permet de décrire l'énergie libérée quand le hasard des chocs thermiques colle l'une contre l'autre deux molécules de formes complémentaires qui portent, face à face, des charges opposées. C'est ce qui se produit quand un médicament, une hormone ou un neurotransmetteur se lie à un *récepteur* à la surface d'une cellule ou quand un substrat se lie à l'enzyme qui catalyse une réaction chimique (figure 4.26). L'équation 4.15 est donc utilisée dans la conception de certains médicaments. En fait, même en chimie inorganique, le potentiel électrique à la surface des molécules est un important déterminant de leur réactivité, les atomes de potentiels opposés ayant tendance à réagir entre eux.

L'équation 4.15 permet aussi de décrire la façon dont une cellule choisit les ions qui doivent y entrer ou en sortir. En effet, la membrane externe d'une cellule regorge de *canaux ioniques*, des protéines dont la forme tridimensionnelle comprend un tunnel qui permet aux ions de traverser et que la cellule peut ouvrir ou fermer. L'exemple 4.15 montrera comment varie l'énergie potentielle des ions pendant la traversée, ce qui élucidera comment la forme d'un canal ionique donné peut favoriser le passage d'une espèce ionique en particulier. ●

(*a*)



(*b*)

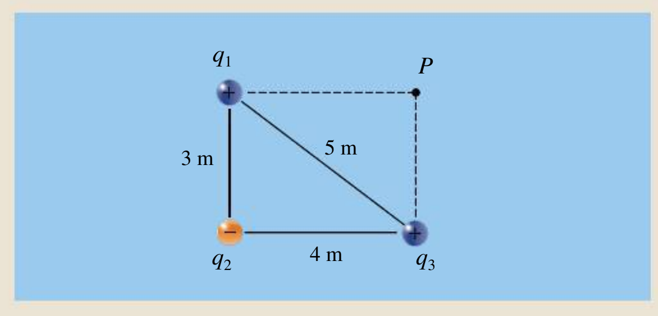


◀ Figure 4.26

Quand le glucose entre dans une cellule, l'enzyme *hexokinase* catalyse une réaction chimique qui lui ajoute un groupement phosphate. L'enzyme reconnaît le glucose, car son site actif a une forme et des charges partielles complémentaires, de sorte que le complexe enzyme-substrat a une énergie potentielle plus faible que l'enzyme et le substrat séparés.

Exemple 4.14

Trois charges ponctuelles $q_1 = 1\ \mu C$, $q_2 = -2\ \mu C$ et $q_3 = 3\ \mu C$ sont situées aux points indiqués à la figure 4.27. (a) Quel est le potentiel total au point P situé à un sommet du rectangle ? (b) Quel travail un agent extérieur doit-il fournir pour amener une charge $q_4 = 2{,}5\ \mu C$ de l'infini jusqu'au point P ?



▲ **Figure 4.27**

L'énergie potentielle de ce système de charges est négative.

Solution

(a) Le potentiel total au point P est la somme scalaire

$$V_P = V_1 + V_2 + V_3 = \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} + \frac{kq_3}{r_3}$$

Les valeurs données nous permettent de calculer V_1 :

$$V_1 = \frac{(9{,}0 \times 10^9\ \mathrm{N{\cdot}m^2/C^2})(10^{-6}\ \mathrm{C})}{4\ \mathrm{m}} = 2{,}25 \times 10^3\ \mathrm{V}$$

De même, $V_2 = -3{,}6 \times 10^3$ V et $V_3 = 9 \times 10^3$ V. Le potentiel total est donc égal à $V_P = 7{,}65 \times 10^3$ V.

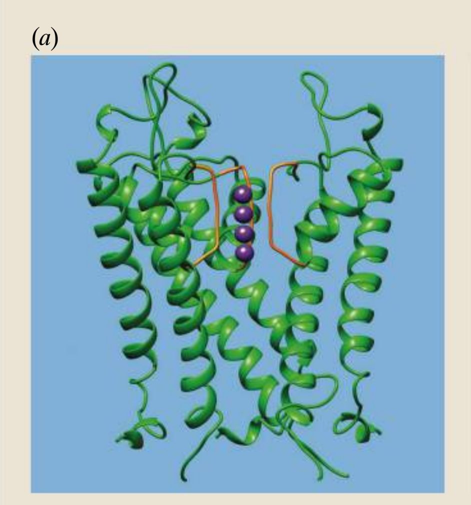
(b) Il est sous-entendu que l'agent extérieur prend une charge initialement immobile et la dépose au point P, où elle demeurera immobile. On a donc $\Delta K = 0$ et le principe de conservation de l'énergie devient l'équation 4.7, selon laquelle le travail extérieur est $W_{\mathrm{ext}} = q(V_{\mathrm{f}} - V_{\mathrm{i}})$. Dans le cas présent, $V_{\mathrm{i}} = 0$ puisque q_4 est initialement située à l'infini, donc

$$W_{\mathrm{ext}} = q_4 V_P = (2{,}5 \times 10^{-6}\ \mathrm{C})(7{,}65 \times 10^3\ \mathrm{V}) = 0{,}0195\ \mathrm{J}$$

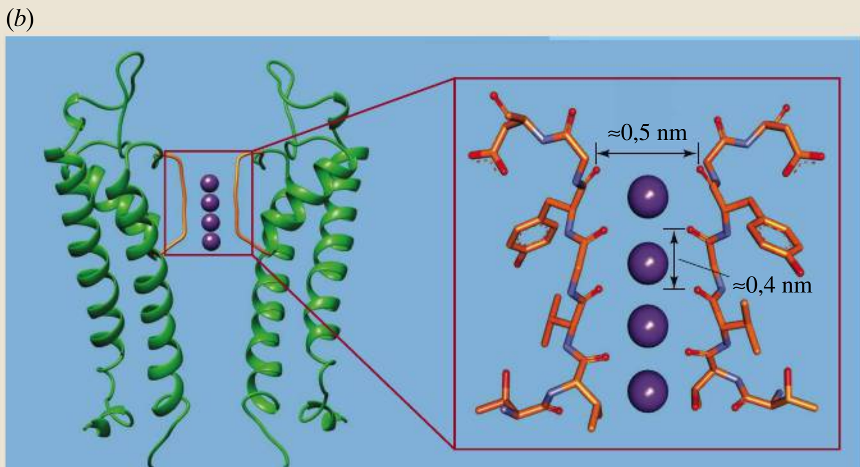
Exemple 4.15

La figure 4.28*a* montre une vue de côté d'un canal ionique par lequel les ions entrent et sortent des cellules vivantes. Ici, les cercles mauves représentent la trajectoire d'un ion K^+ en train de traverser la portion la plus étroite du canal appelée *filtre de sélectivité*. Considérons un modèle à deux dimensions (figure 4.28*b*) où l'ion K^+ passe entre deux rangées rectilignes d'atomes en rouge. Ces atomes faisant partie de groupements polaires, on peut attribuer à chacun d'eux une charge $Q = -e/3$. Pour simplifier, considérons que tout le processus se produit dans le vide. (a) Calculer l'énergie potentielle électrique de l'ion K^+ aux positions illustrées

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 4.28**

(*a*) Représentation en ruban du canal ionique KscA, avec la trajectoire d'un ion K^+, en mauve. Quatre segments identiques (dont trois sont illustrés, en orange, celui du devant ayant été retiré pour rendre la figure plus claire) forment le *filtre de sélectivité*. Ce filtre est quasi identique dans tous les canaux à K^+ dans la nature, des bactéries à l'être humain. La figure 5.28 (p. 198) présente un canal à ions K^+ selon une vue perpendiculaire à celle-ci. (*b*) Modèle en deux dimensions du filtre de sélectivité.

en mauve, en considérant seulement les charges des quatre atomes voisins les plus proches. (b) Calculer cette énergie à mi-chemin entre les positions en mauve, en considérant seulement les deux plus proches voisins. (c) Grâce à ce modèle, expliquer comment ces deux rangées d'atomes rendent le passage difficile aux ions Na^+, bien que ceux-ci soient plus petits que les ions K^+.

Solution

(a) Le potentiel V_{mauve} est identique aux quatre points mauves, car ceux-ci sont à la même distance $r = (0{,}25^2 + 0{,}2^2)^{1/2} = 0{,}320$ nm de leurs quatre atomes d'oxygène voisins. On a donc

$$V_{\text{mauve}} = 4\frac{kQ}{r} = \frac{-4ke}{3r} = -6{,}00 \text{ V}$$

L'ion K^+, à l'une de ces positions, a l'énergie $U = qV = eV_{\text{mauve}} = -9{,}60 \times 10^{-19}$ J $= -6{,}00$ eV.

(b) Les points intermédiaires sont à $r' = 0{,}25$ nm des deux atomes d'oxygène les plus proches, donc leur potentiel est

$$V_{\text{int}} = 2\frac{kQ}{r'} = -\frac{2ke}{3r'} = -3{,}84 \text{ V}$$

L'ion K^+, à l'une de ces positions, a l'énergie $U = qV = eV_{\text{int}} = -6{,}14 \times 10^{-19}$ J $= -3{,}84$ eV.

On constate que les positions en mauve sont les minimums d'énergie ; les positions intermédiaires sont moins stables, car l'énergie potentielle y est plus élevée (moins négative). Cela reste le cas si on reprend le calcul en (a) et en (b) en tenant compte de tous les atomes. Pour passer d'une position en mauve à la suivante, l'ion aura donc besoin, pour passer par les positions intermédiaires, d'un apport d'énergie. ■

(c) Pour que l'ion K^+ passe d'une position en mauve à la suivante, l'apport d'énergie nécessaire n'est que de 2,18 eV. Cette petite quantité d'énergie peut être fournie par les collisions thermiques avec les autres atomes, ions ou molécules du milieu ambiant.

Toutefois, un ion plus petit comme Na^+ ne reste pas aux positions en mauve, centré entre les deux rangées d'atomes d'oxygène (voir la figure 1.37, p. 29): en s'approchant de l'un des atomes d'oxygène, l'ion voit son énergie potentielle diminuer dramatiquement, de sorte que l'énergie à fournir pour le faire passer à la position suivante est plus élevée. La probabilité qu'un choc thermique la fournisse étant plus faible, les ions Na^+ ont moins de chances de franchir ce canal. ■

L'énergie potentielle d'un système de charges ponctuelles

Nous allons maintenant nous intéresser au travail qu'il a fallu fournir pour assembler un système de charges, c'est-à-dire les placer à leurs positions respectives. Pour assembler un tel système, il faut fournir un travail pour placer successivement chaque charge, et ce travail correspond à l'énergie potentielle *supplémentaire* accumulée chaque fois par le système. Au départ, il faut approcher la charge q_2 de la charge q_1, qui est alors la seule charge source. Après que ces deux charges sont installées, l'énergie du système est donnée par l'équation 4.14. Quand on amène la charge q_3 à partir d'une position lointaine jusqu'à sa place dans le système, on ajoute une énergie supplémentaire q_3V, où V est le potentiel causé par les *deux* charges déjà présentes. De même, quand on amène q_4, ce sont les *trois* charges déjà présentes qui sont considérées comme charges sources, et ainsi de suite. L'énergie du système est la somme de toutes ces contributions. Quel que soit l'ordre dans lequel les charges sont installées, on peut démontrer que l'énergie potentielle obtenue correspond à la somme des énergies potentielles U_{ij} *de chaque paire de charges* du système, telles que données par l'équation 4.14, soit

Énergie potentielle d'un système de plusieurs charges

$$U = \sum_{i<j} U_{ij} = \sum_{i<j} \frac{kq_iq_j}{r_{ij}} \qquad (4.16)$$

Notez que, dans cette équation, on évite de compter deux fois les contributions d'une même paire de charges. En effet, $U_{ij} = U_{ji}$, mais les termes pour lesquels *$i = j$ ne sont pas* inclus. Puisque les potentiels vérifient le principe de superposition, il est logique que l'énergie potentielle électrique totale d'un système ne dépende pas de la façon dont les charges sont réunies.

Exemple 4.16

Les charges q_1, q_2 et q_3 décrites dans l'exemple 4.14 forment-elles un système lié ?

Solution

L'énergie potentielle totale des trois charges est égale à la somme (scalaire) :

$$U = U_{12} + U_{13} + U_{23} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}}$$

On trouve par exemple

$$U_{12} = \frac{(9{,}0 \times 10^9\ \text{N·m}^2/\text{C}^2)(10^{-6}\ \text{C})(-2 \times 10^{-6}\ \text{C})}{3\ \text{m}} = -6 \times 10^{-3}\ \text{J}$$

De même, $U_{13} = +5{,}4 \times 10^{-3}$ J et $U_{23} = -13{,}5 \times 10^{-3}$ J. L'énergie potentielle totale est donc $U = -1{,}41 \times 10^{-2}$ J. Le signe négatif de l'énergie potentielle signifie, en l'absence d'énergie cinétique, qu'un travail extérieur est nécessaire pour *séparer* les particules immobiles qui composent le système et les amener à l'infini : le système est *lié*.

L'énergie que nous venons de calculer correspond au travail total qu'il a fallu fournir pour amener les *quatre* charges de l'infini jusqu'à leur position sur le rectangle. Il ne faut pas la confondre avec le travail nécessaire pour ajouter la seule charge q_4, obtenu à l'exemple 4.14. ■

Exemple 4.17

Soit une charge ponctuelle $q_1 = -2\ \mu$C en (–2 m, 0) et une charge $q_2 = 3\ \mu$C en (4 m, 3 m). On donne le point A de coordonnées (0, 0) et le point B de coordonnées (4 m, 0). Quel travail un agent extérieur doit-il fournir pour déplacer une charge ponctuelle $q_3 = 5\ \mu$C de A à B à vitesse constante ?

Solution

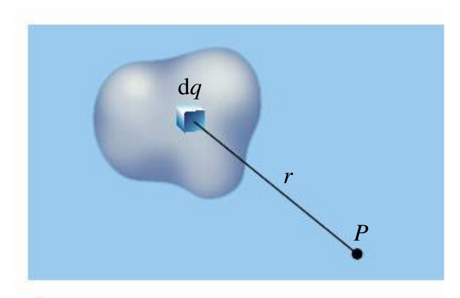
Il faut d'abord déterminer le potentiel aux points A et B, donné par $V = kq_1/r_1 + kq_2/r_2$:

$$V_A = \frac{kq_1}{2\ \text{m}} + \frac{kq_2}{5\ \text{m}} = -3{,}6 \times 10^3\ \text{V}$$

$$V_B = \frac{kq_1}{6\ \text{m}} + \frac{kq_2}{3\ \text{m}} = +6{,}0 \times 10^3\ \text{V}$$

Ensuite, d'après l'équation 4.7, le travail nécessaire pour déplacer q_3 de A à B est

$$W_{\text{ext}} = q_3(V_B - V_A) = (5 \times 10^{-6}\ \text{C})(9{,}6 \times 10^3\ \text{V}) = 48\ \text{mJ}$$



▲ **Figure 4.29**

Une façon de déterminer le potentiel d'une distribution continue de charge consiste à intégrer les contributions d'éléments infinitésimaux de charge dq, de sorte que $V = k\int \mathrm{d}q/r$.

4.6 L'ADDITION DU POTENTIEL (DISTRIBUTION CONTINUE DE CHARGE)

Jusqu'ici, on a traité du potentiel produit par quelques distributions continues de charge, par exemple les plaques d'un condensateur plan. On considérait alors que le champ était connu et on obtenait le potentiel grâce à l'équation $\Delta V = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$. Mais quand le champ est difficile à calculer, on doit obtenir le potentiel directement à partir des charges sources. Nous verrons dans cette section comment généraliser à cette fin l'approche de la section précédente, fondée sur l'addition des potentiels dus à chaque charge individuelle, pour la rendre applicable à une distribution continue de charge.

La figure 4.29 illustre un objet chargé ainsi qu'un point P où on veut connaître le potentiel. On peut imaginer que cet objet est formé d'une infinité de charges

ponctuelles côte à côte. Cela permet, comme à la section précédente, de calculer le potentiel que chacune de ces charges produirait au point P si elle était isolée, puis d'additionner les contributions obtenues pour obtenir le potentiel au point P. La seule différence est qu'on réalise cette somme à l'aide d'une intégrale.

Si l'élément de charge dq illustré sur la figure 4.29 était isolé, le potentiel au point P serait

$$\mathrm{d}V = \frac{k\,\mathrm{d}q}{r}$$

où r est la distance entre dq et le point P. Il est à noter que ce potentiel est mesuré par rapport à une référence $V = 0$ située à l'infini. En général, il faut exprimer r et dq en fonction des coordonnées d'un système d'axes. Par exemple, pour une situation à une dimension, on pourrait avoir $r = x$ et $\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}x$.

Ensuite, on obtient le potentiel au point P en intégrant sur toute la distribution de charge :

Potentiel électrique produit par une distribution continue de charge

$$V = \int \mathrm{d}V = k\int \frac{\mathrm{d}q}{r} \qquad (4.17)$$

Dans cette équation, les bornes d'intégration doivent représenter les coordonnées où débute et se termine la distribution de charge. Puisque chaque dV est mesuré par rapport à une référence située à l'infini, cette équation implique que $V = 0$ à l'infini. Si la distribution de charge est placée dans un diélectrique, on remplace k par k/κ.

Notez que nous avons utilisé ici le symbole dV dans un sens différent de celui employé dans les sections précédentes. Dans le contexte de l'équation 4.9, dV était la différence de potentiel entre *deux* points de l'espace séparés par une distance infinitésimale, mais due à l'ensemble des charges sources. Dans l'équation 4.17, dV désigne plutôt le potentiel en *un* point de l'espace (mesuré par rapport à $V = 0$ à l'infini) dû à une fraction infinitésimale dq de la charge source. La notation dV n'aura ce nouveau sens que dans le contexte de l'équation 4.17.

Exemple 4.18

Un disque non conducteur de rayon a porte une densité surfacique de charge uniforme σ. (a) Quel est le potentiel en un point de l'axe du disque situé à une distance y de son centre ? (b) Que devient cette expression en un point éloigné où $y \gg a$?

Solution

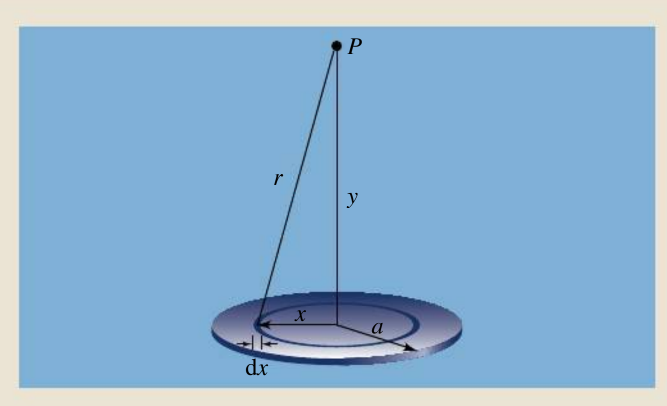
(a) Étant donné la symétrie du disque, l'élément de charge infinitésimal choisi est un anneau de rayon x et d'épaisseur dx (figure 4.30). Tous les points de cet anneau sont à la même distance $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ du point P.

La charge sur l'anneau est $\mathrm{d}q = \sigma\,\mathrm{d}A = \sigma(2\pi x\,\mathrm{d}x)$ et le potentiel dû à l'anneau est donc

$$\mathrm{d}V = \frac{k\,\mathrm{d}q}{r} = \frac{k\sigma(2\pi x\,\mathrm{d}x)}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

Le potentiel étant une grandeur scalaire, on ne doit *pas* décomposer selon les axes x et y comme on le ferait pour un champ électrique. ■

Notons qu'une seule variable, x, figure dans la dernière équation. En effet, la distance y est une constante puisqu'elle est fixée dans l'énoncé. Le potentiel dû au



▲ **Figure 4.30**
Pour un disque, l'élément de charge approprié est un anneau mince.

disque tout entier est l'intégrale de l'expression précédente (voir la table d'intégrales à l'annexe C) :

$$V = 2\pi k\sigma \int_0^a \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$
$$= 2\pi k\sigma[(x^2 + y^2)^{1/2}]\Big|_0^a$$
$$= 2\pi k\sigma[(a^2 + y^2)^{1/2} - y]$$

(b) Pour étudier le comportement limite, on a recours à l'approximation du binôme, tirée de l'annexe B, soit $(1 + z)^n \approx 1 + nz$, qui est valable pour de petites valeurs de z. Dans le résultat obtenu en (a), le premier terme entre crochets peut s'écrire

$$(a^2 + y^2)^{1/2} = y\left(1 + \frac{a^2}{y^2}\right)^{1/2}$$

Lorsque $y \gg a$, on a $a/y \ll 1$, ce qui correspond à la condition d'application de l'approximation. L'expression ci-dessus devient donc

$$(a^2 + y^2)^{1/2} \approx y\left(1 + \frac{a^2}{2y^2}\right)$$

En remplaçant ce terme dans le résultat obtenu en (a), on obtient

$$V = \frac{kQ}{y}$$

où $Q = \sigma\pi a^2$ est la charge totale sur le disque.


En un point éloigné, le potentiel dû au disque est le même que celui d'une charge ponctuelle Q. ■

Distributions continues et infinies

Malgré sa généralité, l'équation 4.17 ne convient pas pour un fil infini, une plaque infinie ou toute distribution de charge qui est infinie : le fait de poser $V = 0$ à l'infini conduit à des valeurs indéterminées du potentiel à proximité de la distribution de charge. Dans de tels cas, on n'a pas d'autre choix que de déterminer d'abord le champ électrique pour ensuite obtenir le potentiel en utilisant l'équation $\Delta V = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$, comme nous l'avons fait aux sections précédentes. Heureusement, les distributions de charge infinies qui sont dignes d'intérêt sont habituellement celles qui sont très symétriques ; le champ qu'elles produisent peut donc être obtenu facilement, par exemple avec le théorème de Gauss.

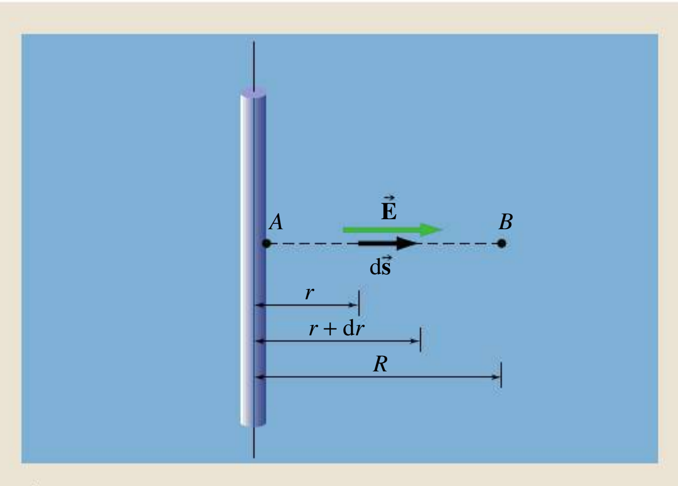
Exemple 4.19

Un fil de longueur infinie porte une densité linéique de charge constante $\lambda = 1{,}0 \times 10^{-8}$ C/m. Le rayon du fil est $R_0 = 2{,}0$ mm. Plutôt que de fixer une référence $V = 0$ quelque part, on fixe $V = 100$ V à la surface du fil. (a) Trouver l'expression de la valeur du potentiel électrique en un point situé à une distance R du centre du fil. (b) Utiliser cette expression pour calculer le potentiel à 20 cm du centre du fil.

Solution

(a) Comme il s'agit d'un fil de longueur infinie, on a recours à l'équation $\Delta V = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$. Par symétrie, on sait que le champ électrique possède une orientation radiale par rapport à tous les points du fil. Comme le potentiel est connu à la surface du fil, on fixe le point A à cet endroit. Le point B, lui, est fixé à la distance R du centre du fil, mesurée selon un axe radial (figure 4.31).

Le parcours de A vers B doit être subdivisé en portions infinitésimales $\mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$. Comme à la section 4.3, considérons une quelconque de ces portions, débutant à un point C, situé à la distance r du fil, et se terminant en un point C', situé à la distance $r + \mathrm{d}r$. Au point C, la composante radiale du champ produit par le fil est $E_r = 2k\lambda/r$ (voir l'équation 2.13 ou l'exemple 3.6). On peut appliquer l'équation 4.8 pour exprimer la différence de potentiel entre les points C et C' en fonction du champ au point C.



▲ Figure 4.31

Le champ électrique est parallèle au parcours qui conduit du point A au point B.

Comme chaque portion de déplacement $d\vec{s}$ est orientée dans la même direction que l'augmentation de la distance r le long du parcours, on peut écrire $ds = dr$, d'où

$$dV = -E\,ds\cos\theta = -E_r\,dr\cos 0 = -E_r\,dr$$

où nous avons écrit que $\theta = 0$, car $\vec{E}$ et $d\vec{s}$ pointent tous deux dans le même sens. Cette équation exprime la différence de potentiel entre deux points voisins, où qu'ils soient situés dans le champ le long du parcours entre A et B. Pour additionner ces variations infinitésimales et obtenir la différence de potentiel entre les points A et B, on doit intégrer :

$$V_B - V_A = -\int_{r_A}^{r_B} E_r\,dr = -\int_{R_0}^{R} E_r\,dr$$

où V_A est le potentiel à la surface du fil, soit 100 V, et V_B est le potentiel recherché, à la distance R du fil. Dans cette intégrale de ligne, notez que la variable r désigne la distance entre le fil et le début de n'importe quel des déplacements $d\vec{s}$. En somme, le processus d'intégration sous-entend que la variable r prend toutes les valeurs entre R_0 et R. En remplaçant E_r par l'expression donnée plus haut, on obtient

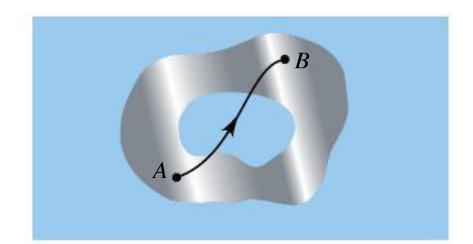
$$\begin{aligned} V_B &= -\int_{R_0}^{R} \frac{2k\lambda}{r}\,dr + 100\text{ V} \\ &= -2k\lambda\,\ln(r)\Big|_{R_0}^{R} + 100\text{ V} \\ &= 100\text{ V} - 2k\lambda\,\ln\left(\frac{R}{R_0}\right) \end{aligned}$$

Même si R était une constante du point de vue de l'intégration, on comprend que cette équation est valable pour toute valeur $R > R_0$.

(b) Pour $R = 20$ cm, on obtient, en substituant les autres grandeurs, $V_B = -729$ V. Le fait que ce résultat soit négatif signifie qu'il y a un point entre la surface du fil et une distance de 20 cm où le potentiel prend une valeur nulle. Comme nous n'avons pas fait appel à l'équation 4.17, il est normal que le potentiel soit nul *ailleurs* qu'à l'infini.

4.7 LE POTENTIEL D'UN CONDUCTEUR

À la section 2.3, nous avons vu plusieurs propriétés des conducteurs à l'équilibre électrostatique. Nous allons maintenant en voir une de plus, qui concerne le potentiel. La figure 4.32 représente une cavité vide à l'intérieur d'un conducteur en équilibre électrostatique. Même si ce conducteur est chargé ou encore placé dans un champ électrique externe, comme il a rapidement atteint l'équilibre électrostatique, le champ électrique est nécessairement nul en chaque point du matériau qui le compose. En conséquence, la différence de potentiel $V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{s}$ est nulle entre deux points *quelconques* dans le matériau du conducteur, y compris à la surface. Puisque l'intégrale est nulle *quel que soit* le trajet suivi, même à travers la cavité, on en conclut que $\vec{E}$ est également nul dans la cavité. On peut donc énoncer la règle suivante :



▲ Figure 4.32

Le champ est nul à l'intérieur d'une cavité vide dans un conducteur.

Propriété 4 des conducteurs à l'équilibre électrostatique

4. À l'équilibre électrostatique, tous les points à l'intérieur et sur la surface d'un conducteur sont au même potentiel. Si le conducteur est percé d'une cavité, le potentiel de chaque point de cette cavité est aussi le même, à condition qu'elle ne contienne aucune charge.

Cette propriété porte le numéro 4, car elle s'ajoute aux trois autres propriétés énoncées à la section 2.3.

On peut retrouver la propriété 2 à partir de la propriété 4: pour un déplacement $d\vec{s}$ sur la surface du conducteur, on a $dV = \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$, ce qui signifie que $\vec{E}$ est perpendiculaire à $d\vec{s}$. Comme nous l'avons déjà remarqué à la section 2.3, les lignes de champ quittent la surface de façon initialement perpendiculaire.

Exemple 4.20

Soit une sphère conductrice de charge Q positive et de rayon R. Trouver le potentiel en fonction de la distance r mesurée par rapport au centre de la sphère. Tracer les graphiques $E(r)$ et $V(r)$.

Solution

Nous avons vu que le champ électrique *à l'extérieur* d'une distribution sphérique de charge est le même que le champ créé par une charge ponctuelle qui serait placée au centre de la sphère (voir les exemples 2.5*b*, 3.4 et 3.5). Ainsi, pour $r \geq R$, on retrouve la même fonction potentiel que pour une charge ponctuelle:

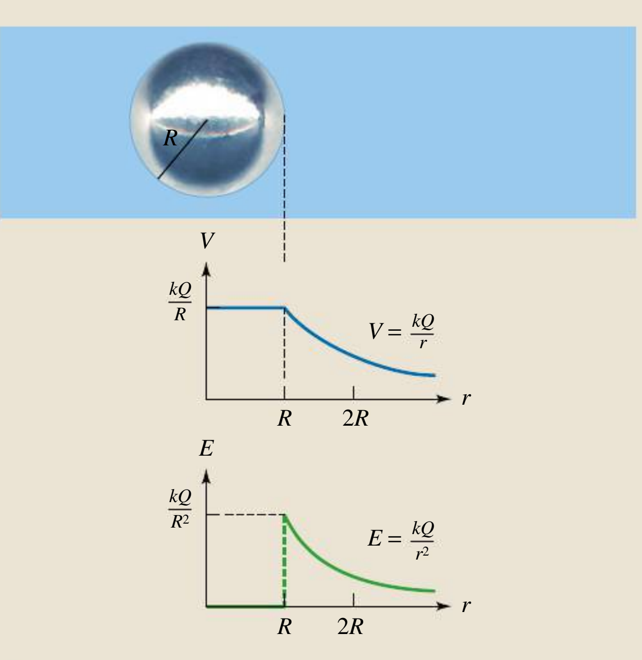
$$V = \frac{kQ}{r} \qquad (r \geq R)$$

Ici, la charge est distribuée uniformément sur une mince coquille, la surface du conducteur. Pour $r = R$, l'équation ci-dessus donne la différence de potentiel entre cette coquille et l'infini. ■

À l'intérieur de la sphère conductrice, $E = 0$, et le potentiel est constant. Par conséquent, le potentiel à l'intérieur de la sphère conductrice est égal au potentiel à la surface:

$$V = \frac{kQ}{R} \qquad (r < R)$$

Les graphiques $V(r)$ et $E(r)$ sont représentés à la figure 4.33.



▲ **Figure 4.33**

Graphiques du potentiel et du module du champ électrique pour un conducteur sphérique chargé.

Exemple 4.21

Une sphère métallique de rayon R porte une charge Q. Cette charge accumulée forme un système de charges. Déterminer l'énergie potentielle de ce système (par rapport à la situation où la charge serait fractionnée et à l'infini).

Solution

On peut trouver l'énergie potentielle en calculant le travail nécessaire pour accumuler la charge jusqu'à sa valeur finale. Supposons que la charge sur la sphère soit égale à q à un instant quelconque. D'après ce qu'on a vu à l'exemple précédent, son potentiel est $V = kq/R$. D'après l'équation 4.7, le travail extérieur nécessaire pour amener depuis l'infini une charge infinitésimale dq supplémentaire et la déposer sur la sphère est égal à $dW_{ext} = V\,dq = (kq/R)dq$. Le travail total nécessaire pour donner à la sphère une charge Q est donc

$$W_{ext} = \int_0^Q \frac{kq}{R}\,dq = \frac{kQ^2}{2R}$$

Ce travail correspond à l'énergie potentielle de la distribution de charge sur la surface de la sphère conductrice. Elle est de la forme $U = \frac{1}{2}QV$, où $V = kQ/R$ est le potentiel de la sphère. Comparons cette expression avec l'équation 4.1, $U = QV$. Le facteur $\frac{1}{2}$ apparaît ici parce que les deux énergies potentielles n'ont pas la même signification. L'expression $U = QV$ représente l'énergie potentielle associée à une *seule* charge Q en un point où le potentiel dû aux autres charges est égal à V. C'est le travail nécessaire pour amener d'un seul coup la charge Q de l'infini jusqu'au point en question. L'expression $U = \frac{1}{2}QV$ que nous venons d'obtenir est l'énergie potentielle du *système* de charges dans son ensemble. C'est le travail nécessaire pour *rassembler* les charges constituant le système. ■

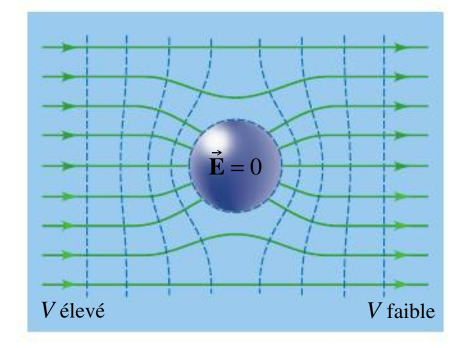
Trois applications importantes découlent de la propriété 4 que nous venons de formuler. La première concerne les travailleurs qui entretiennent les lignes à haute tension. Puisque le corps humain est conducteur, il faut garder au même potentiel chacun des points qui le composent. Sinon, des charges circuleraient dans le corps et interféreraient avec le fonctionnement des muscles et du cœur (voir le sujet connexe de la section 6.4). Or, la différence entre le potentiel du sol et celui d'un câble de transport d'électricité est très élevée. Quand le corps du travailleur reste au même potentiel que le sol, il ne peut donc y avoir aucun contact direct entre le câble et lui, et la seule option consiste à travailler en manipulant le câble avec de longues perches isolantes plutôt qu'avec les mains. Mais comme la différence de potentiel entre le câble et le sol peut s'approcher de 10^6 V, cela nécessiterait des perches longues de plusieurs mètres. Une autre option consiste à enfiler un habit conducteur, à isoler le travailleur du sol à l'aide de supports en fibre de verre, puis à mettre le corps du travailleur au même potentiel que le câble (figure 4.34). Quand le potentiel du corps et du câble sont égalisés, c'est le sol que le travailleur doit éviter à tout prix de toucher. Mais il peut manipuler le câble à mains nues.



▲ **Figure 4.34**

Un travailleur fait passer le potentiel électrique de son corps à la même valeur que celui d'un câble qu'il souhaite manipuler.

Une deuxième application touche la protection de matériel électronique sensible. La figure 4.35 représente un conducteur sphérique non chargé plongé dans un champ électrique uniforme. On peut s'attendre à ce que, en un point éloigné de la sphère, la configuration du champ ne soit pas affectée par la présence du conducteur : les lignes de champ sont uniformes et les équipotentielles sont des plans. À la surface de la sphère, l'équipotentielle est une sphère et les lignes de champ sont radiales. Les charges à la surface de la sphère se répartissent de telle sorte que ces conditions soient vérifiées. Si la sphère est creuse, le champ est nul à l'intérieur de la cavité parce que le conducteur « protège » les points intérieurs contre les champs extérieurs. C'est le principe de la *cage de Faraday* dont nous avons déjà parlé à la section 2.3. Cette propriété est utile lorsqu'on veut isoler de l'équipement ou un câble de transmission des influences externes : il suffit de l'envelopper dans une boîte conductrice qu'on appelle souvent un *bouclier* ou un *écran*.



▲ **Figure 4.35**

Le conducteur joue un rôle d'écran, protégeant du champ extérieur les points qui se trouvent à l'intérieur.

Attention : le mot bouclier ne doit pas laisser entendre qu'une charge externe est incapable de produire un champ dans le conducteur. Au contraire, c'est le champ qu'elle y produit qui redistribue les charges à la surface du conducteur (voir la section 2.3). Une fois ces charges redistribuées, ce qui ne prend que quelques nanosecondes, le champ *résultant* dans le conducteur devient nul. C'est cette protection contre le champ *résultant* qui justifie le nom de « bouclier ».

Nous allons maintenant considérer une troisième conséquence de la propriété 4. Supposons que deux sphères chargées de rayons R_1 et R_2 soient reliées par un long fil conducteur (figure 4.36). Puisque les deux sphères forment alors un conducteur unique, la charge va s'écouler d'une sphère à l'autre jusqu'à ce que leurs potentiels soient *égaux*, c'est-à-dire $V_1 = V_2$. Les sphères étant suffisamment éloignées l'une de l'autre, leurs charges sont réparties uniformément et le potentiel de chaque sphère peut s'écrire $V = kQ/R$ (voir l'exemple 4.20). L'égalité des potentiels donne



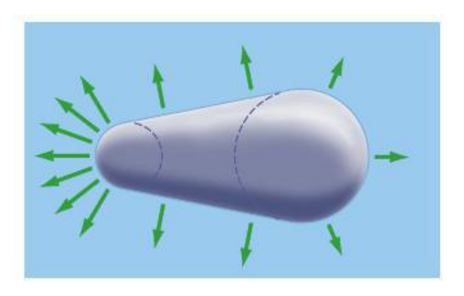
▲ **Figure 4.36**

Lorsqu'on relie par un fil conducteur deux sphères chargées, elles acquièrent le même potentiel.

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \qquad (4.18)$$

Pour une densité surfacique de charge uniforme σ, la charge totale sur une sphère de rayon R est $Q = 4\pi R^2\sigma$ et l'équation précédente devient

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{R_2}{R_1} \qquad (4.19)$$



▲ **Figure 4.37**

Sur un conducteur chargé de forme quelconque, la densité surfacique de charge est grande aux endroits où le rayon de courbure est petit. Le module du champ électrique s'ajuste à cette variation.

De l'équation 4.19, on déduit que $\sigma \propto 1/R$: la densité surfacique de charge sur chaque sphère est inversement proportionnelle au rayon. Cette relation nous permet de faire au moins une remarque d'ordre qualitatif concernant la distribution de charge sur un conducteur de forme irrégulière, comme celui de la figure 4.37 : la densité surfacique de charge est la plus grande dans les régions qui ont le plus petit rayon de courbure*.

Or, nous avons montré à la section 3.5 que, près de la surface d'un conducteur, le module du champ est $E_{\text{local}} = |\sigma_{\text{local}}|/\varepsilon_0$. De l'équation 4.19, il découle donc que le module du champ est maximal aux points anguleux d'un conducteur. Si le champ électrique atteint 3×10^6 V/m dans l'air, on le qualifie de **disruptif**, car il provoque une décharge électrique. Cette décharge se produit parce que l'air contient en général des molécules qui ont été ionisées (qui ont perdu des électrons) par les rayons cosmiques, par la radioactivité naturelle du sol ou autrement. Sous l'effet du champ électrique, les électrons accélèrent, entrent en collision avec d'autres molécules et créent davantage d'ions. À ce stade, l'air perd ses propriétés isolantes et devient conducteur. Il se produit alors une décharge appelée « effet de couronne » qui s'accompagne d'un halo visible. Le feu Saint-Elme et le halo parfois perceptible autour des lignes électriques sont des exemples de cet effet. Pour éviter les décharges par effet de couronne, les équipements de haute tension ont des surfaces lisses et leurs rayons de courbure sont les plus grands possible.

Mais les points anguleux sont parfois souhaitables. Ainsi, le *paratonnerre* est conçu pour produire une décharge continue tendant à neutraliser le nuage situé juste au-dessus (voir le sujet connexe « L'électricité atmosphérique » au chapitre 6). Les tiges métalliques fixées aux ailes des avions ont la même fonction. Dans le microscope à effet de champ, que nous décrirons dans le sujet connexe qui suit, des champs électriques très intenses sont produits par des aiguilles extrêmement pointues.

Le potentiel à la surface d'une sphère chargée est $V = kQ/R$ et le module du champ est $E = k|Q|/R^2$. Ainsi, pour atteindre une valeur donnée de E, par exemple la valeur où le champ est disruptif, le potentiel V de la sphère devra être d'autant plus important que le rayon R de la sphère est grand. On peut élever jusqu'à 3×10^5 V le potentiel d'une sphère de rayon 10 cm avant d'atteindre le potentiel disruptif. Par contre, un grain de poussière de 0,05 mm peut donner lieu à une décharge de 150 V. Dans les silos à grains ou les tours de stockage du ciment, les poussières peuvent facilement se charger par frottement et atteindre ce potentiel. Les décharges électriques qui en résultent ont déjà entraîné de graves explosions.

SUJET CONNEXE

Les applications technologiques de l'électrostatique

L'électricité statique peut avoir des effets gênants : elle fait par exemple adhérer les vêtements ; elle occasionne de petites décharges par temps sec ; elle déclenche aussi des phénomènes dangereux, comme la foudre ou des explosions dans les silos de céréales et les citernes de pétrole. Mais l'électrostatique a également des applications

* On suppose que toutes les parties de la surface sont convexes, c'est-à-dire bombées vers l'extérieur. Consulter R. H. Price et R. J. Crowley, *American Journal of Physics*, vol. 53, 1985, p. 843.

utiles. On utilise les charges électriques pour séparer des minéraux, pour vaporiser des peintures ou des produits chimiques, pour séparer les céréales des déchets laissés par les rongeurs, pour enduire le papier de verre ou les papiers peints texturés, ou pour étendre l'apprêt sur les carrosseries d'automobiles (figure 4.38). Nous allons examiner en détail quelques-unes de ces applications.



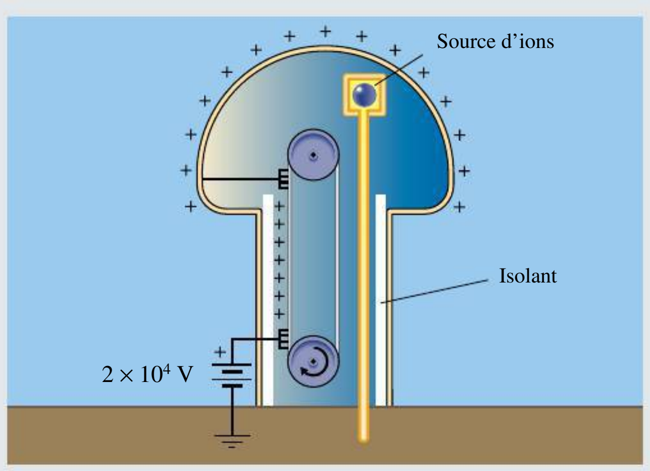
▲ **Figure 4.38**

Les particules de peinture sont attirées par la carrosserie qui est portée à un potentiel élevé.

Le générateur de Van de Graaff

Nous avons vu (voir la section 2.3 ou la section 3.5) que la charge d'un conducteur se trouve sur sa surface. C'est à partir de cette constatation que Robert Jemison Van de Graaff (1901-1967), de l'Institut de technologie du Massachusetts (MIT), inventa en 1932 un générateur de particules chargées. Dans ce dispositif, des charges fournies par un peigne métallique porté à un potentiel élevé (2×10^4 V) sont projetées par effet de couronne sur une courroie mobile (figure 4.39). La courroie isolante les transporte sur un dôme sphérique posé sur une colonne isolante. Un deuxième peigne recueille les charges de la courroie et les fait passer sur la surface extérieure de la sphère. La charge et le potentiel de la sphère s'élèvent jusqu'à ce que le champ disruptif soit atteint à la surface. Pour augmenter le champ disruptif, on enferme la machine dans une cuve pressurisée (400 lb/po^2) contenant du gaz. Pour une courroie de 50 cm de large se déplaçant à la vitesse de 20 m/s environ, le courant de charge est I = 1 mA.

Une source d'ions placée à l'intérieur de la sphère est portée à un potentiel élevé par rapport à la terre. Des particules chargées, comme des protons ou des ions, peuvent donc être accélérées le long d'un tube pour bombarder une cible où les effets qu'elles produisent sont étudiés en physique nucléaire, en physique de l'état solide, ou en fonction d'applications médicales.



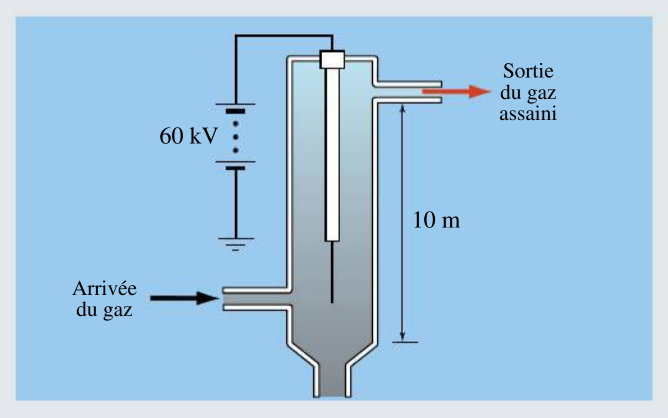
▲ **Figure 4.39**

Un générateur de Van de Graaff. Selon la conception, la sphère peut aussi accumuler une charge négative.

Des modèles réduits de générateurs de Van de Graaff sont aussi utilisés comme amusement ou comme instrument de vulgarisation servant à observer les propriétés des objets chargés.

Le précipitateur électrostatique

Frederick G. Cottrell (1877-1948) inventa en 1907 un dispositif simple pour assainir les émissions de panaches de fumée des cimenteries, des hauts fourneaux, des centrales thermiques et d'autres usines chimiques. Dans un précipitateur (figure 4.40), un filament assez court est maintenu à un potentiel élevé (60 kV) par rapport



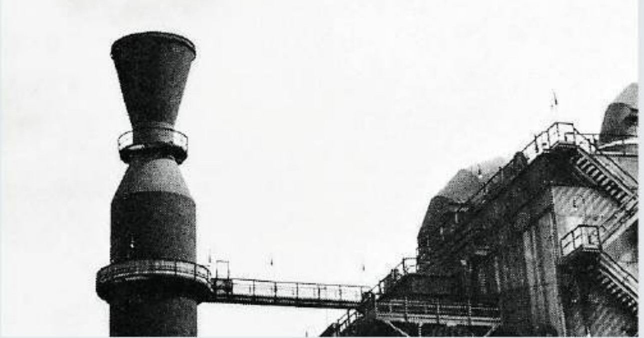
▲ **Figure 4.40**

Dans un précipitateur électrostatique, une grande différence de potentiel est maintenue entre l'enceinte extérieure et un fil court placé au centre. Les particules du polluant deviennent ionisées et sont attirées par l'enceinte où elles s'accumulent.



à un conducteur cylindrique extérieur mis à la terre. Les gaz pollués pénètrent dans la partie inférieure et passent dans le champ électrique élevé autour du filament. Il se produit un effet de couronne permanent entre le filament et l'air environnant. Les électrons accélérés par le champ élevé accentuent l'ionisation des particules de gaz polluants et les charges positives ainsi créées sont attirées sur l'enveloppe extérieure où elles se fixent. Cela permet au précipitateur d'éliminer des particules de 10 μm de diamètre environ. La figure 4.41 illustre l'efficacité du procédé. Le cylindre doit être périodiquement secoué ou rincé afin d'éliminer les matériaux recueillis. Dans le modèle industriel, le filament central est négatif. Dans les modèles domestiques, le filament central est positif, car on s'est aperçu que cette polarité réduit la production d'ozone.





▲ **Figure 4.41**

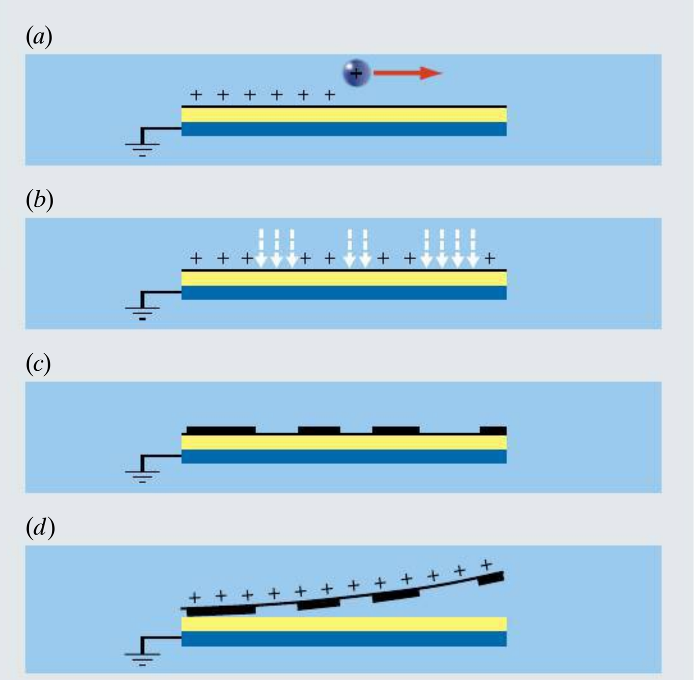
Un précipitateur électrostatique permet de réduire la quantité de particules émises par une cheminée d'usine.

La reproduction d'images

Les photocopieurs que l'on trouve dans presque tous les bureaux sont peut-être l'application la plus répandue de l'électrostatique. Le procédé électrostatique de reproduction d'images fut inventé en 1935 par Chester F. Carlson (1906-1968) et, après plusieurs années de mise au point, la première machine fut lancée sur le marché par Xerox en 1948.

Le procédé repose sur l'utilisation d'un matériau appelé *photoconducteur*, qui est isolant dans l'obscurité. Lorsqu'il est exposé à la lumière, il devient conducteur parce que certains de ses électrons acquièrent suffisamment d'énergie pour quitter l'atome auquel ils appartiennent et devenir des électrons libres. Le matériau photoconducteur se présente en général sous la forme d'une couche mince (de 25 μm d'épaisseur) de poudre de sélénium ou de ZnO recouvrant un support conducteur. Les principales étapes du procédé de reproduction sont les suivantes.

1. Un fil mince (0,015 cm) porté à un potentiel élevé (7 kV) se déplace au-dessus de la plaque et applique par effet de couronne une couche uniforme de charge positive sur la couche photoconductrice (figure 4.42*a*).
2. Le photoconducteur est ensuite exposé à la lumière réfléchie par le sujet, par exemple une page de texte. Les régions exposées à la lumière deviennent conductrices, permettant à la charge superficielle de passer jusqu'à la plaque inférieure reliée à la terre (figure 4.42*b*).
3. Le photoconducteur est ensuite recouvert de particules d'encre sèche (figure 4.42*c*). Par exemple, on peut enduire des perles de verre (600 μm de diamètre) d'une couche monomoléculaire de plastique ou de résine carbonée. Les deux matériaux acquièrent des charges opposées lorsqu'on les secoue. On peut aussi vaporiser sur le photoconducteur des particules de carbone chargées (de diamètre 1 μm) ou un aérosol. Les particules chargées négativement adhèrent aux régions chargées positivement.



▲ **Figure 4.42**

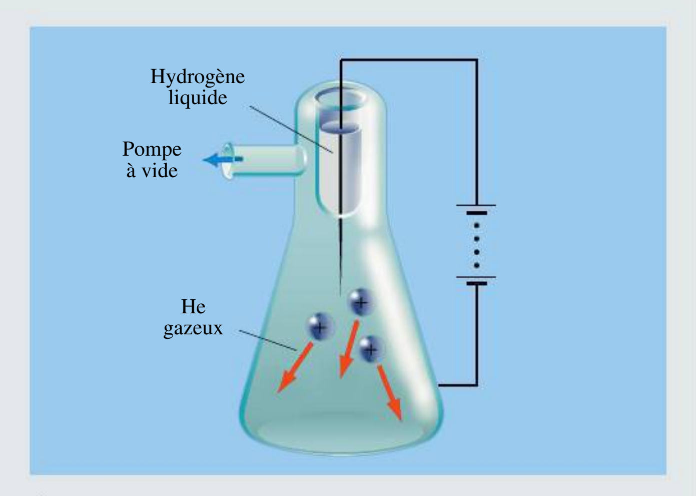
Les principales étapes de la photocopie électrostatique.

4. L'image latente doit maintenant être transférée sur papier. Comme les particules d'encre sèche gardent une certaine charge négative, il est nécessaire de vaporiser des charges positives sur le papier (figure 4.42*d*).
5. La chaleur produite par un filament permet de fixer l'image par fusion sur le papier.

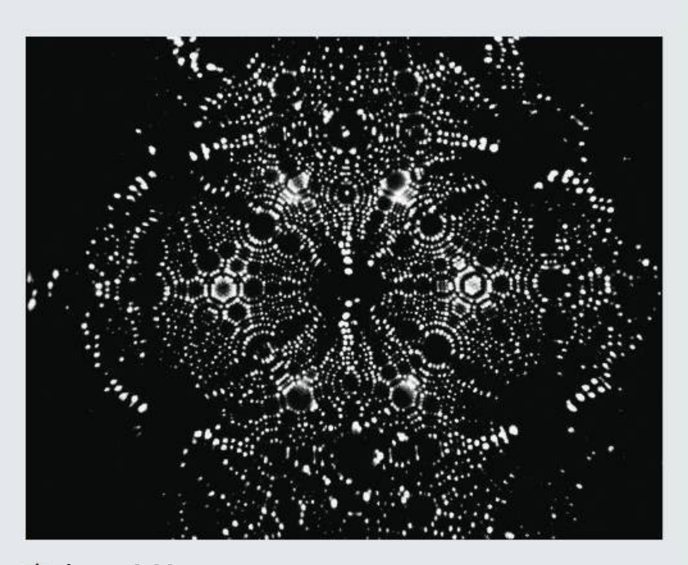
Vous l'avez déjà constaté vous-même, la totalité du processus dure environ une seconde.

Le microscope à effet de champ

Le microscope à effet de champ (figure 4.43) fut inventé en 1955 par E. W. Muller, de l'Université de l'État de Pennsylvanie. Cet appareil sert à étudier les défauts dans les semi-conducteurs, les pellicules minces et autres structures superficielles. Dans ce dispositif, un fil très fin a été attaqué à l'acide pour former une pointe d'à peu près 0,05 μm de rayon. La pointe est insérée dans une enceinte en verre dans laquelle on pratique un vide élevé (10^{-9} mm Hg) et on applique une grande différence de potentiel entre la pointe (positive) et l'enceinte (négative). L'intensité du champ à la pointe est d'environ $4{,}5 \times 10^8$ V/m. Seuls certains métaux comme le platine, le tungstène et le chrome peuvent supporter sans se désintégrer des champs aussi élevés. Enfin, on introduit dans l'enceinte un gaz d'atomes inertes, de l'hélium ou du néon. Lorsqu'un atome d'hélium s'approche de la pointe, il devient ionisé et l'ion He^+ est accéléré vers un écran fluorescent de l'autre côté de l'enceinte. La configuration de points obtenus sur l'écran (figure 4.44) reproduit la configuration d'atomes à la surface de la pointe. En refroidissant la pointe, par exemple avec de l'hydrogène liquide, on peut réduire les vibrations thermiques des atomes et obtenir une résolution qui permet de distinguer des détails de $2{,}5 \times 10^{-10}$ m, à peine plus qu'un diamètre atomique.



▲ **Figure 4.43**
Le microscope à effet de champ.



▲ **Figure 4.44**
La pointe d'une aiguille observée au microscope à effet de champ.

RÉSUMÉ



Le potentiel est une grandeur, scalaire, attribuée à chaque point de l'espace selon sa position par rapport aux charges sources. On le définit de façon à ce qu'un objet de charge q placé en un point de potentiel V ait une énergie potentielle électrique donnée par

$$U_E = qV \qquad (4.1)$$

Cette équation permet de décrire un système grâce au principe de conservation de l'énergie étudié au tome 1, soit

$$\Delta K + \Delta U = W_{nc} \qquad (4.3a)$$

$$K_i + U_i + W_{nc} = K_f + U_f \qquad (4.3b)$$

où W_{nc} est le travail fait par les forces non conservatives, par exemple celle exercée par un agent extérieur au système.

Selon ce principe, en l'absence de forces non conservatives, le comportement d'une charge libre de se déplacer peut être décrit à l'aide de l'une ou l'autre des équations suivantes :

$$\Delta K + q\Delta V = 0 \tag{4.4a}$$

$$K_A + qV_A = K_B + qV_B \tag{4.4b}$$

Autre cas important : celui où un agent extérieur déplace une charge tel que $K_A = K_B = 0$. Le travail fait par l'agent correspond alors à ΔU.

Comme le champ électrique, le potentiel est une fonction qui dépend des charges *sources*, et non de la charge d'essai. Seules les variations de potentiel sont importantes, et l'on peut donc choisir arbitrairement le point où $V = 0$. On peut également écrire la relation entre le potentiel et le champ électrique :

$$V_B - V_A = \int_A^B \mathrm{d}V = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} \tag{4.9}$$

L'intégrale ne dépend pas du trajet suivi entre A et B. De même, on peut calculer le champ électrique en fonction du potentiel :

$$E_s = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}s} \tag{4.11a}$$

Dans un champ *uniforme*, la variation de potentiel s'écrit

$$\Delta V = \pm Ed \tag{4.10b}$$

où $\pm d$ est la composante du déplacement parallèle à $\vec{\mathbf{E}}$ entre le point initial et le point final. Le signe positif correspond à un déplacement *orienté dans le sens contraire* au champ. On peut inverser cette équation pour obtenir le module du champ dans un condensateur plan en fonction de la distance d entre ses plaques et de la différence de potentiel ΔV entre elles :

$$E = \frac{\Delta V}{d} \tag{4.12}$$

Le potentiel à la distance r d'une charge ponctuelle Q est donné par

$$V = \frac{kQ}{r} \tag{4.13}$$

On choisit que $V = 0$ pour $r \to \infty$. Il faut tenir compte du signe de Q. Le potentiel d'un système de charges ponctuelles est la *somme algébrique* des potentiels produits par chacune des charges :

$$V = \sum \frac{kQ_i}{r_i} \tag{4.15}$$

On peut représenter la fonction potentiel par des surfaces équipotentielles. Sur un tracé dans le plan, les équipotentielles sont représentées par des courbes. Le champ électrique est perpendiculaire aux équipotentielles et orienté dans le sens des potentiels décroissants. Des équipotentielles plus rapprochées correspondent à un champ électrique de module plus élevé.

Lorsqu'on calcule l'énergie potentielle d'un système de charges, il faut faire attention à ne pas compter deux fois les contributions des charges :

$$U = \sum_{i<j} \frac{kq_iq_j}{r_{ij}} \tag{4.16}$$

Une énergie potentielle positive signifie qu'il a fallu fournir un travail extérieur positif pour amener les charges de l'infini jusqu'à leurs positions actuelles. Une énergie potentielle négative signifie qu'il faut fournir un travail extérieur positif pour *séparer* les charges.

Dans le cas d'un conducteur homogène en état d'équilibre électrostatique, le potentiel est le même en tout point à l'intérieur du matériau et sur la surface.

L'une des méthodes permettant d'obtenir le potentiel électrique d'une distribution continue de charge consiste à séparer la charge en portions infinitésimales et à intégrer :

$$V = \int \mathrm{d}V = k\int \frac{\mathrm{d}q}{r} \qquad (4.17)$$

TERMES IMPORTANTS

différence de potentiel (p. 129)
disruptif (adj.) (p. 158)
électronvolt (p. 131)
énergie potentielle électrique (p. 124)
équipotentielle (adj. et nom) (p. 127)
intégrale de ligne (p. 137)
position de référence (p. 125)
potentiel électrique (p. 124)
volt (p. 124)

RÉVISION

R1. Trouvez l'expression du potentiel électrique d'un champ électrique constant en faisant une analogie avec l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle $U_g = mgy$.

R2. Quelle analogie tirée de la géographie peut-on utiliser pour illustrer le concept d'équipotentielle ?

R3. On place une particule chargée positivement dans une région où règne un champ électrique non nul. La particule se met en mouvement sous l'effet du champ électrique. Va-t-elle perdre ou gagner de l'énergie potentielle ? Va-t-elle se déplacer dans le sens des potentiels croissants ou décroissants ?

R4. Reprenez la question précédente, mais cette fois-ci pour le cas d'une particule chargée *négativement*.

R5. Une particule libre de charge positive se déplace dans le sens des potentiels croissants. Son énergie cinétique augmente-t-elle ou diminue-t-elle ?

R6. Une particule de charge Q positive est placée à l'origine et une particule de charge $-Q$ est placée à $x = 1$ m. Tracez approximativement la courbe représentant le potentiel total en fonction de la position sur l'axe des x.

R7. Reprenez la question précédente, mais cette fois-ci en considérant que les deux particules sont de charge négative.

R8. Vrai ou faux ? Les lignes de champ sont partout perpendiculaires aux surfaces équipotentielles.

R9. Un système est constitué de six charges ponctuelles. Si on veut déterminer son énergie potentielle à l'aide de l'équation 4.16, combien de termes doit-on calculer ?

R10. Que peut-on dire du champ électrique à l'intérieur d'un conducteur ? Que peut-on dire du potentiel ?

R11. Expliquez le fonctionnement d'un paratonnerre à partir des principes énoncés à la section 4.7. Expliquez en particulier pourquoi le paratonnerre doit avoir une forme effilée.

QUESTIONS

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

Q1. (a) Si le potentiel électrique est nul en un point, que peut-on dire du champ électrique en ce point ? (b) Si le champ est nul en un point, que peut-on dire de la fonction potentiel ?

Q2. L'expression « champ de potentiel » a-t-elle un sens ? Si oui, comment peut-on l'illustrer ?

Q3. Les points A et B sont au même potentiel électrique. En général, une force extérieure est-elle nécessaire pour déplacer une charge de A à B ? Un travail extérieur est-il nécessaire ?

Q4. (a) Le potentiel électrique d'un objet chargé peut-il être nul par rapport à la terre ? Si oui, expliquez pourquoi. (b) Est-il possible pour un corps non chargé d'être à un potentiel non nul ?

Q5. Par temps sec, une étincelle entre vos doigts et un objet peut libérer plusieurs milliers de volts. Comment se fait-il que cela ne soit pas dangereux, alors que la différence de potentiel d'une prise de courant électrique, de 120 V à peine, peut être mortelle ?

Q6. Les points A et B sont au même potentiel électrique. Que peut-on dire des champs électriques en ces points ?

Q7. Pourquoi la réception sur une radio portative est-elle meilleure à l'extérieur d'une automobile qu'à l'intérieur ?

Q8. La surface d'un objet métallique est une équipotentielle. Cela signifie-t-il que la charge excédentaire sur l'objet est répartie uniformément ?

Q9. L'équation $\Delta V = \pm Ed$ est-elle valable en général ? Justifiez votre réponse.

Q10. Lorsqu'on suit une ligne de champ dans le sens du champ, le potentiel est-il croissant, décroissant ou constant ?

Q11. Deux surfaces équipotentielles peuvent-elles se croiser ? Justifiez votre réponse.

Q12. Un anneau circulaire de rayon R a une charge Q positive uniformément répartie sur sa circonférence. Une charge ponctuelle négative q part d'un point arbitraire sur l'axe et se déplace vers le centre de l'anneau. (a) Le potentiel de la charge ponctuelle va-t-il augmenter ou diminuer ? (b) L'énergie potentielle de la charge ponctuelle va-t-elle augmenter ou diminuer ?

Q13. Est-il possible de déplacer une charge dans un champ électrique sans fournir de travail ? Si oui, comment ?

Q14. Quelle est la forme d'une surface équipotentielle pour un fil chargé infini ?

Q15. On charge une coquille métallique de rayon 10 cm jusqu'à ce que son potentiel soit égal à 70 V. (a) Quel est le potentiel au centre ? (b) Quel est le champ électrique au centre ?

Q16. On met provisoirement en contact deux sphères métalliques chargées de rayons R et $2R$, puis on les sépare. Si l'on se place à la surface de chaque sphère, sur laquelle des deux sphères les grandeurs suivantes ont-elles la valeur la plus élevée : (a) densité de charge ; (b) charge totale ; (c) potentiel électrique ; (d) champ électrique ?

Q17. Le champ électrique à l'intérieur d'un cube chargé en métal creux est nul, mais le champ gravitationnel à l'intérieur d'une distribution de masse cubique creuse ne l'est pas. À quoi est due cette différence ?

Q18. À un instant donné, on donne une différence de potentiel de 35 mV de part et d'autre de la membrane cellulaire d'un neurone. Quelles informations sont manquantes si on veut connaître, au même instant, (a) le module du champ électrique ; (b) la densité de charge ; (c) le côté positif et le côté négatif ?

EXERCICES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

Sauf mention du contraire, on suppose que les situations décrites se déroulent dans le vide.

4.1 à 4.3 Énergie potentielle et champ électrique

E1. (I) Un éclair peut faire passer jusqu'à 30 C de charge sous une différence de potentiel de 10^8 V. (a) Quelle est l'énergie dissipée ? Exprimez votre réponse en électronvolts. (b) Pendant combien de temps cette quantité d'énergie pourrait-elle alimenter une ampoule de 60 W ?

E2. MonLab (I) Une batterie d'automobile de 12 V a une capacité nominale de 80 A·h qui représente la charge qu'elle peut faire passer entre ses deux bornes dans un circuit extérieur [1 A·h = 1 (C/s)·h = 3600 C]. (a) Quelle charge totale (en coulombs) peut fournir la batterie ? (b) Quelle énergie peut-elle fournir, si l'on suppose que la différence de potentiel électrique entre les bornes reste constante pendant la décharge ?

E3. (I) Il faut fournir un travail extérieur de 4×10^{-7} J pour déplacer une charge de −5 nC à vitesse constante jusqu'à un point où le potentiel est égal à −20 V. Quel est le potentiel électrique au point initial ?

E4. (I) Soit le champ électrique $\vec{\mathbf{E}} = -180\vec{\mathbf{k}}$ V/m. (a) Quelle est la différence de potentiel électrique entre les positions $z_A = 5$ cm et $z_B = 15$ cm ? (b) Quelle est la distance sur l'axe des z entre deux points dont la différence de potentiel est égale à 27 V ?

E5. MonLab (II) Soit un champ électrique donné par $\vec{\mathbf{E}} = 2x\vec{\mathbf{i}} - 3y^2\vec{\mathbf{j}}$, où x et y sont en mètres et E en volts par mètre (V/m). Déterminez la différence de potentiel entre les positions $\vec{\mathbf{r}}_A = (\vec{\mathbf{i}} - 2\vec{\mathbf{j}})$ m et $\vec{\mathbf{r}}_B = (2\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + 3\vec{\mathbf{k}})$ m.

E6. (II) Étant donné les champs électriques suivants, trouvez les fonctions correspondantes du potentiel $V(x)$: (a) $\vec{\mathbf{E}} = (A/x)\vec{\mathbf{i}}$. Prenez $V = 0$ pour $x = x_0$. (b) $\vec{\mathbf{E}} = A\,e^{-Bx}\vec{\mathbf{i}}$. Prenez $V = 0$ pour $x = 0$.

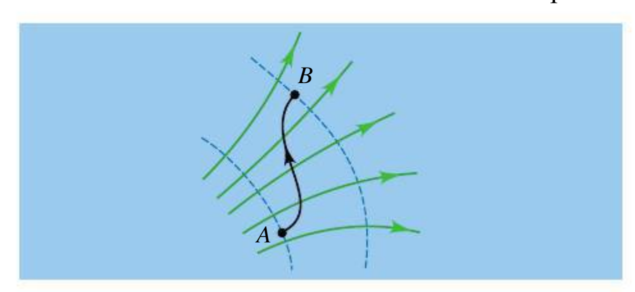
E7. (I) Sachant qu'un électron part du repos dans un champ électrique uniforme, quelle est la différence de potentiel nécessaire pour lui faire acquérir les vitesses suivantes : (a) 330 m/s, soit la vitesse du son ; (b) 11,2 km/s, soit la vitesse de libération du champ d'attraction terrestre ; (c) 0,1c, soit 10 % de la vitesse de la lumière ? ($c = 3{,}00 \times 10^8$ m/s)

E8. (I) Refaites l'exercice E7 pour un proton.

E9. (I) On suppose qu'une batterie d'automobile de 12 V est utilisée comme source de différence de potentiel pour accélérer des particules. Déterminez le module de la vitesse qu'atteindrait (a) un électron ; (b) un proton. On considère que les particules partent du repos.

E10. (I) Les armatures d'une bougie d'automobile sont distantes de 0,1 cm. Quelle différence de potentiel est nécessaire pour produire une étincelle, sachant qu'un champ électrique atteignant 3×10^6 V/m ionise l'air ? On suppose que le champ électrique est uniforme entre les deux armatures.

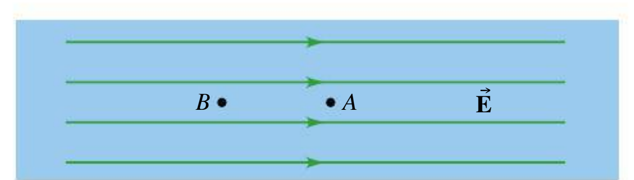
E11. (I) La figure 4.45 représente deux surfaces équipotentielles (en pointillés) telles que $V_A = -5$V et $V_B = -15$ V. Quel travail extérieur doit-on fournir pour déplacer une charge de −2 μC à vitesse constante de A à B en suivant le chemin indiqué ?



▲ **Figure 4.45**

Exercice 11.

E12. (I) Sur la figure 4.46, les points A et B sont distants de 4 cm parallèlement aux lignes d'un champ uniforme $\vec{\mathbf{E}} = 600\vec{\mathbf{i}}$ V/m. (a) Déterminez la variation de potentiel $V_B - V_A$. (b) Quelle est la variation d'énergie potentielle $U_B - U_A$ lorsqu'une charge ponctuelle $q = -3$ μC est déplacée de A à B ?



▲ **Figure 4.46**

Exercice 12.

E13. (I) Dans un condensateur plan, deux grandes plaques conductrices parallèles distantes de 5 cm portent des charges de même grandeur mais de signes opposés. Une charge ponctuelle de 8 μC placée entre elles est soumise à une force électrique de $2{,}4 \times 10^{-2}\vec{\mathbf{i}}$ N. Trouvez la différence de potentiel entre les plaques.

E14. (I) Quelle est la différence de potentiel nécessaire pour accélérer les particules suivantes du repos jusqu'à $0{,}1c = 3 \times 10^7$ m/s : (a) une particule α de charge $2e$ et de masse 4 u ; (b) un noyau d'uranium de charge $92e$ et de masse 235 u ?

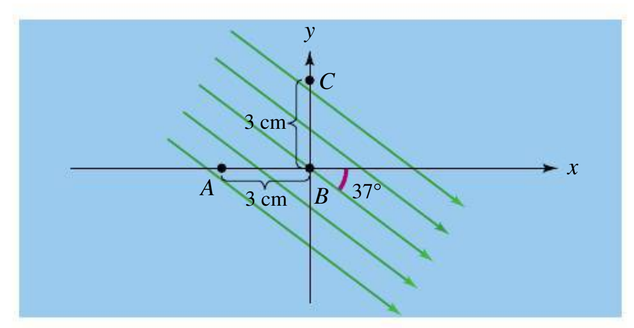
E15. (I) Par temps clair, on mesure dans l'atmosphère près de la surface de la Terre un champ électrique uniforme de module 120 V/m vertical et dirigé vers le bas. Quelle est la différence de potentiel entre le sol et les hauteurs suivantes : (a) le sommet de la tête d'une personne mesurant 1,8 m ; (b) le sommet de la tour Sears de hauteur 433 m ?

E16. MonLab (I) Une différence de potentiel de 120 V règne entre deux plaques infinies chargées et parallèles, distantes de 3 cm. Un électron initialement au repos part de la plaque ayant le potentiel le plus bas et traverse complètement l'espace séparant les deux plaques. (a) Quel est le module du champ électrique ? (b) Quel travail effectuera la force électrique sur l'électron ? (c) Quelle est la variation de potentiel traversée par l'électron ? (d) Quelle est la variation d'énergie potentielle de l'électron ? (e) Comment faudrait-il modifier vos réponses si l'espace entre les plaques était rempli d'eau ($\kappa = 80$) ? (On suppose que l'eau ne gêne pas le mouvement de l'électron.)

E17. (II) Quel est le travail extérieur nécessaire pour qu'une particule de masse 2×10^{-2} g et de charge −15 μC franchisse une différence de potentiel de −6000 V tout en augmentant sa vitesse de 0 à 400 m/s ?

E18. (II) Le champ électrique produit par une feuille infinie chargée de densité surfacique σ parallèle au plan yz est égal à $\sigma/2\varepsilon_0\vec{\mathbf{i}}$. (a) Écrivez l'expression du potentiel $V(x)$ à une distance x de la feuille. On donne $V = 0$ à la distance x_0. (b) Quel est le déplacement Δx associé à une différence de potentiel de 20 V ? On donne $\sigma = 7$ nC/m^2.

E19. MonLab (I) Un champ électrique uniforme de 400 V/m est orienté à 37° par rapport à l'axe des x dans le sens horaire, comme le montre la figure 4.47. Déterminez les différences de potentiel : (a) $V_B - V_A$; (b) $V_B - V_C$.



▲ **Figure 4.47**

Exercice 19.

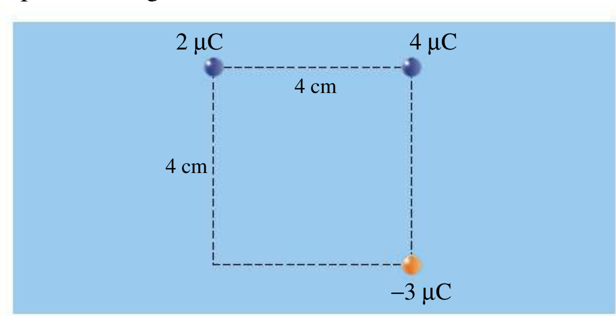
E20. (II) Un électron se déplace parallèlement à la direction d'un champ électrique uniforme. Sa vitesse initiale est de 8×10^6 m/s et sa vitesse finale, après une distance parcourue de 3 mm dans le sens des x positifs, est égale à 3×10^6 m/s. (a) Quelle est la différence de potentiel entre les deux points ? (b) Quel est le module du champ électrique ?

4.4 et 4.5 Potentiel d'une ou plusieurs charges ponctuelles

E21. (I) Dans un noyau, deux protons sont séparés de 10^{-15} m. (a) Quelle est leur énergie potentielle électrique ? (b) Sachant qu'ils partent du repos et qu'ils sont libres de se déplacer, trouvez le module de leur vitesse lorsqu'ils se trouvent à 4×10^{-15} m l'un de l'autre.

E22. (I) Un noyau d'uranium de charge $+92e$ subit spontanément une fission pour donner deux fragments portant les charges $+48e$ et $+44e$. Si ces fragments sont initialement au repos et séparés par une distance de 7×10^{-15} m, que vaudra la somme de leurs énergies cinétiques lorsqu'ils seront séparés par une distance infinie ?

E23. (I) (a) Déterminez le potentiel créé au coin inférieur gauche par les trois charges de la figure 4.48. (b) On place une charge de -2 μC au coin inférieur gauche. Quelle énergie potentielle est ajoutée ? (c) Quelle est l'énergie potentielle du système formé par les quatre charges ?

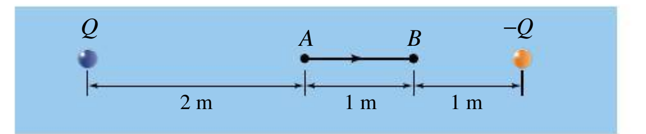


▲ **Figure 4.48**

Exercice 23.

E24. (I) Quatre charges ponctuelles de valeur 0,6 μC, 2,2 μC, $-3{,}6$ μC et 4,8 μC sont situées aux quatre sommets d'un carré de 10 cm de côté. Quel est le travail extérieur nécessaire pour amener une charge de -5 μC de l'infini jusqu'au centre du carré ? (On suppose que la vitesse de la charge -5 μC reste constante.) Que signifie le signe de votre réponse ?

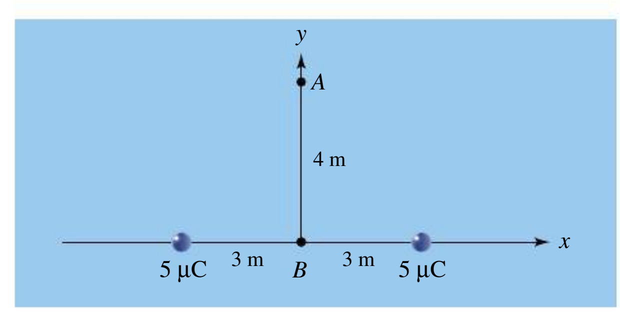
E25. MonLab (I) Deux charges, Q et $-Q$, sont maintenues immobiles à une distance de 4 m l'une de l'autre (figure 4.49). On donne $Q = 5$ μC. (a) Quelle est la différence de potentiel $V_B - V_A$? (b) Une charge ponctuelle de masse $m = 0{,}3$ g et de charge $q = 2$ μC, initialement au repos, part du point A. Quelle est sa vitesse en B ?



▲ **Figure 4.49**

Exercice 25.

E26. (I) Soit deux charges ponctuelles identiques de 5 μC chacune, représentées dans la figure 4.50. Les points A et B ont respectivement pour coordonnées (0, 4 m) et (0, 0). (a) Déterminez la différence de potentiel $V_B - V_A$. (b) Si on lâche du point A une charge ponctuelle de -5 μC et de masse 3×10^{-8} kg, initialement au repos, quel est le module de sa vitesse au point B ?



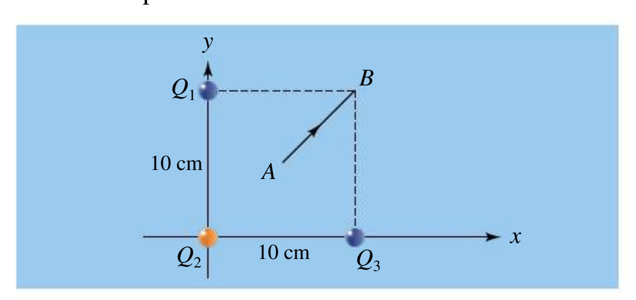
▲ **Figure 4.50**

Exercice 26.

E27. (I) À une distance r d'une charge ponctuelle Q, le champ électrique a un module de 200 V/m et le potentiel a une valeur de 600 V. Déterminez Q et r en supposant que la situation est (a) dans le vide, (b) dans l'eau.

E28. (I) Une charge ponctuelle $+4Q$ se trouve en $x = 0$. À part l'infini, en quel(s) point(s) de l'axe des x le potentiel est-il nul s'il se trouve en $x = 1$ m une deuxième charge égale à (a) $-Q$; (b) $-9Q$?

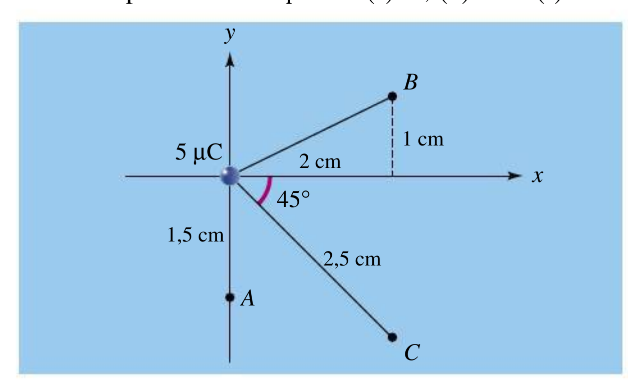
E29. (I) À la figure 4.51, les charges $Q_1 = 3$ μC, $Q_2 = -2$ μC et $Q_3 = 5$ μC sont fixes. Quel est le travail extérieur nécessaire pour déplacer une charge $q = -4$ μC à vitesse constante du point A, au centre du carré, jusqu'au sommet B ? Que signifie le signe de votre réponse ?



▲ **Figure 4.51**

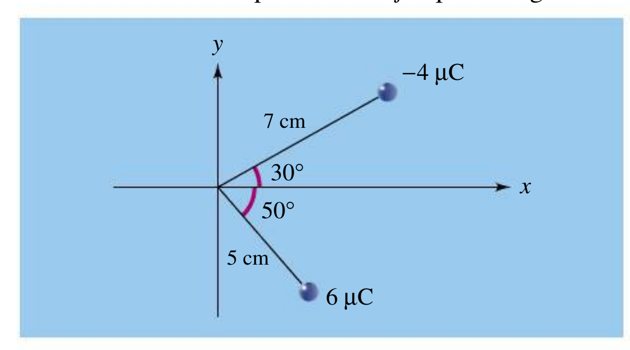
Exercice 29.

E30. MonLab (I) Une charge ponctuelle de 5 μC est placée à l'origine, comme sur la figure 4.52. Déterminez le potentiel aux points (a) A, (b) B et (c) C.



▲ Figure 4.52
Exercice 30.

E31. (I) Deux charges ponctuelles de −4 μC et 6 μC sont situées comme l'indique la figure 4.53. (a) Quel est le potentiel à l'origine ? (b) Quel est le travail extérieur nécessaire pour amener une charge de 2 μC à vitesse constante depuis l'infini jusqu'à l'origine ?



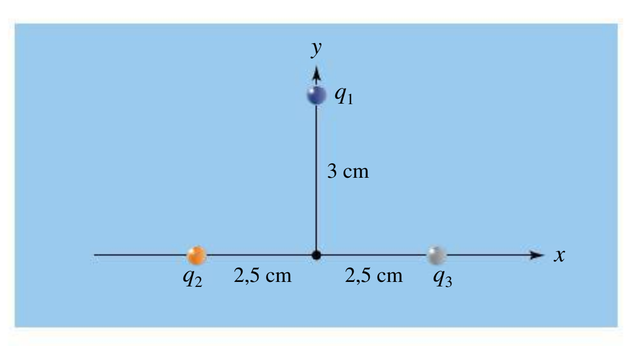
▲ Figure 4.53
Exercice 31.

E32. (I) Dans le modèle des particules élémentaires faisant intervenir les quarks, un proton est constitué de deux quarks u portant chacun la charge $+2e/3$ et d'un quark d portant la charge $-e/3$. En supposant que les quarks soient également espacés sur un cercle de rayon $1{,}2 \times 10^{-15}$ m (voir la figure 1.35, p. 29), trouvez l'énergie potentielle électrique de ce système de charges.

E33. (I) Une charge ponctuelle $q_1 = -4$ μC est située en (3 cm, 0) et une charge $q_2 = 3{,}2$ μC est située en (0, 5 cm). Trouvez : (a) le potentiel créé par q_2 au point où se trouve q_1 ; (b) le potentiel créé par q_1 au point où se trouve q_2 ; (c) l'énergie potentielle de la paire de charges.

E34. (I) Trois charges ponctuelles $q_1 = 6$ μC, $q_2 = -2$ μC et q_3 sont disposées comme dans la figure 4.54. Pour quelles valeurs de q_3 le potentiel total à l'origine est-il égal à (a) 0 V ; (b) −400 kV ?

E35. (I) Soit une charge ponctuelle de −10 μC située en (0, 3 cm) et une charge ponctuelle de 6 μC située

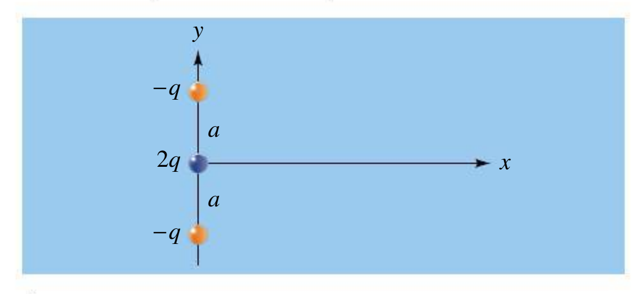


▲ Figure 4.54
Exercice 34.

en (4 cm, 0). (a) Quelle est la différence de potentiel entre l'origine et le point de coordonnées (4 cm, 3 cm) ? (b) Quel est le travail extérieur nécessaire pour amener une charge ponctuelle de −2 μC à vitesse constante depuis l'infini jusqu'à l'origine ?

E36. (I) Un noyau d'uranium de charge $92e$ subit une fission spontanée et donne deux fragments de charges égales. (a) Les deux fragments sont initialement au repos et distants de $7{,}4 \times 10^{-15}$ m. Quelle est l'énergie potentielle de la paire ? (b) Quelle est l'énergie cinétique finale des fragments lorsqu'ils sont séparés par une distance infinie ? (c) En supposant que 30 % de l'énergie cinétique des fragments peut être utilisée dans un réacteur nucléaire, quel est le nombre de fissions par seconde nécessaires pour produire 1 MW ?

E37. (II) Le dioxyde de carbone (CO_2) est un exemple de quadripôle linéaire (figure 4.55). Déterminez le potentiel total en un point (a) $(x, 0)$ et (b) $(0, y)$ pour $y > a$. Dans chaque cas, montrez que $V \propto 1/r^3$ pour $r \gg a$, r étant la distance par rapport à l'origine. (c) Superposez le graphe de la variation du potentiel électrique le long de l'axe des x avec celui de la valeur absolue de sa variation le long de l'axe des y. (d) À quelle distance b le long de l'axe des y obtient-on $|V(x = 0, y = b)| = 2 \times V(x = b, y = 0)$?



▲ Figure 4.55
Exercice 37.

E38. (II) (a) Une charge ponctuelle de 2 nC se trouve à l'origine. Trouvez les distances auxquelles le potentiel vaut 0,5 V, 1 V, 1,5 V, 2 V, 2,5 V, 3 V et 3,5 V. (b) Reprenez la question (a) pour une charge ponctuelle négative (−2 nC) et des potentiels négatifs. (c) Placez les charges à 12 m de distance l'une de

l'autre. Tracez des cercles représentant les équipotentielles de chaque charge. Indiquez les points d'intersection des deux familles de cercles où le potentiel total est égal soit à 1 V, soit à 0,5 V. Enfin, joignez chaque ensemble de points ayant le même potentiel. Comparez les formes de vos courbes équipotentielles avec la figure 4.23 (p. 148).

E39. (I) Soit un point P situé à une distance de 1 m d'une charge de 2 nC. De quelle distance minimale dans la direction radiale doit-on se déplacer à partir du point P pour se trouver en un point où le potentiel est (a) de 1 V plus élevé ; (b) de 1 V moins élevé ? (c) Répondre aux mêmes questions si la situation se déroule dans l'eau ($\kappa = 80$).

E40. MonLab (II) Une particule α de masse $6{,}7 \times 10^{-27}$ kg et de charge $+2e$ a une énergie cinétique initiale de 4,2 MeV. Elle est projetée sur un noyau d'or de charge $+79e$. En supposant que le noyau reste au repos et que la particule α revienne sur sa trajectoire initiale, trouvez la distance du point de sa trajectoire où elle est le plus proche du noyau.

E41. (II) Un noyau d'uranium de charge $92e$ et de masse 238 u peut se décomposer spontanément en un noyau de thorium de charge $90e$ et une particule α de charge $2e$. La masse du thorium est de 234 u et celle de la particule α, de 4 u. On suppose que, juste après la transformation, les produits de fission sont au repos et distants de $7{,}4 \times 10^{-15}$ m. (a) Quelle est l'énergie potentielle des produits de fission juste après la transformation ? (b) Trouvez l'énergie cinétique finale de la particule α en supposant que le thorium reste au repos. (Dans le problème P1, on considérera une situation plus réaliste où le thorium ne reste pas au repos.)

4.6 Potentiel d'une distribution continue de charge

E42. (I) On suppose qu'un proton est une sphère chargée uniformément de rayon 10^{-15} m. Déterminez le potentiel aux points suivants : (a) sur sa surface ; (b) à la position de l'électron dans un atome d'hydrogène, c'est-à-dire à $5{,}3 \times 10^{-11}$ m. (c) Comment ces résultats seraient-ils modifiés si le proton était plutôt considéré comme une sphère creuse ?

E43. MonLab (II) Une charge Q positive est uniformément répartie sur un anneau de rayon a parallèle au plan xz. (a) Déterminez le potentiel $V(y)$ sur l'axe central à la distance y du centre. (b) Utilisez $V(y)$ pour trouver le champ électrique sur l'axe central. Que deviennent vos deux résultats lorsque $y \gg a$?

4.7 Potentiel d'un conducteur

E44. (I) Le module du champ électrique à la surface d'une sphère métallique est de 3×10^6 V/m, ce qui correspond à la valeur du champ disruptif (c'est-à-dire le champ nécessaire pour ioniser l'air sec et produire une étincelle). Quel est le potentiel à la surface de la sphère, considérant que le rayon de la sphère vaut (a) 0,01 mm ; (b) 1 cm ; (c) 1 m ?

E45. (I) Le potentiel d'une sphère métallique de rayon 1 cm est égal à 10^4 V par rapport à l'infini. (a) Quelle est la densité surfacique de charge ? (b) Combien d'électrons ont été enlevés de la sphère ? (c) Quel est le module du champ électrique à la surface de la sphère ?

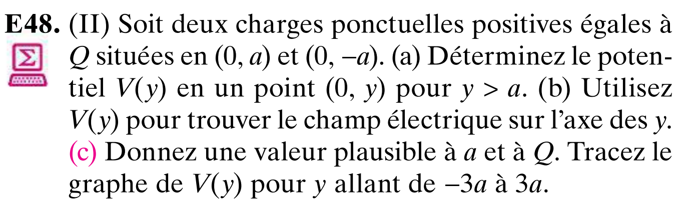
E46. (II) Deux coquilles métalliques concentriques d'épaisseur négligeable ont pour rayons respectifs a et b. La coquille intérieure de rayon a porte la charge Q positive et la coquille extérieure la charge $-2Q$. Trouvez l'expression du potentiel électrique et de la composante radiale du champ électrique pour (a) $r < a$; (b) $a \leq r \leq b$; (c) $r \geq b$. (d) Donnez une valeur plausible à a, à b et à Q. Tracez le graphe de la variation du potentiel électrique et de la composante radiale du champ électrique pour r allant de 0 à $1{,}5b$.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

4.1 à 4.3 Énergie potentielle et champ électrique

E47. (II) Soit deux charges ponctuelles positives égales à Q situées respectivement aux points $(0, a)$ et $(0, -a)$. (a) Déterminez le potentiel $V(x)$ en un point $(x, 0)$. (b) Utilisez $V(x)$ pour trouver le champ électrique sur l'axe des x. (c) Donnez une valeur plausible à a et à Q. Tracez le graphe de $V(x)$ pour x allant de $-3a$ à $3a$.



E48. (II) Soit deux charges ponctuelles positives égales à Q situées en $(0, a)$ et $(0, -a)$. (a) Déterminez le potentiel $V(y)$ en un point $(0, y)$ pour $y > a$. (b) Utilisez $V(y)$ pour trouver le champ électrique sur l'axe des y. (c) Donnez une valeur plausible à a et à Q. Tracez le graphe de $V(y)$ pour y allant de $-3a$ à $3a$.

E49. (II) Un dipôle est constitué des charges $-Q$ en $(-a, 0)$ et $+Q$ en $(a, 0)$. (a) Quel est le potentiel $V(x)$ en un point $(x, 0)$ pour $x > a$? (b) À partir de $V(x)$, trouvez le champ électrique sur l'axe des x. On pose $Q > 0$.

(c) Donnez une valeur plausible à a et à Q. Tracez le graphe de $V(x)$ pour x allant de $-3a$ à $3a$.

E50. (II) Une sphère de rayon R porte une charge Q positive uniformément répartie dans son volume. Pour $r < R$, la fonction potentiel est

$$V(r) = \frac{kQ(3R^2 - r^2)}{2R^3}$$

À partir de $V(r)$, trouvez la composante radiale du champ électrique.

E51. (II) Le potentiel $V(r)$ à une distance perpendiculaire r d'un fil infini de densité linéique de charge λ positive est

$$V(r) = V(r_0) - 2k\lambda \ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

où r_0 et $V(r_0)$ sont des constantes. À partir de $V(r)$, trouvez le champ électrique.

E52. (II) Le potentiel en un point de l'axe d'un disque uniformément chargé a été déterminé à l'exemple 4.18. Utilisez cette expression pour trouver le module du champ électrique sur l'axe central.

E53. (II) Une fonction potentiel hypothétique a la forme suivante :

$$V(x, y, z) = 2x^3y - 3xy^2z + 5yz^3$$

(a) Quel est le champ électrique associé à ce potentiel ? (b) Que devient la réponse en (a) si ce potentiel est mesuré dans du verre ($\kappa = 9$) ? (c) Représentez graphiquement, en trois dimensions, l'équipotentielle $V = 1000$ V de cette fonction potentiel.

E54. (I) Soit le champ électrique uniforme donné par $\vec{\mathbf{E}} = (-2\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} - 5\vec{\mathbf{k}})$ V/m. Le point A est à la position $\vec{\mathbf{r}}_A = (-\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{j}} + 3\vec{\mathbf{k}})$ m, alors que le point B est à $\vec{\mathbf{r}}_B = (3\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + 7\vec{\mathbf{k}})$ m. Évaluez $V_A - V_B$.

E55. (II) Soit la fonction potentiel suivante : $V(x) = 3x^2 - 15x + 7$, où x est en mètres et V en volts. (a) Où le champ électrique associé à ce potentiel est-il nul ? (b) Tracez le graphe de $V(x)$ pour x allant de 0 à 4 m. Le graphe confirme-t-il le résultat obtenu en (a) ?

E56. (I) Dans une membrane cellulaire d'une épaisseur de 4,5 nm règne un champ électrique de $1,4 \times 10^7$ V/m, orienté vers l'intérieur de la cellule. (a) Quel travail total une *pompe Na/K* doit-elle faire au cours d'un cycle normal où elle fait entrer deux ions K^+ dans la cellule et en extrait trois ions Na^+ ? (b) L'énergie requise est fournie par la consommation d'une molécule d'adénosine triphosphate (ATP). Sachant qu'une mole d'ATP peut libérer 30,5 kJ, estimez le rendement de la pompe Na/K.

E57. (I) Au cours d'un de ses cycles d'action, une protéine appelée *échangeur Na/Ca* fait entrer trois ions Na^+ dans la cellule et fait sortir un ion Ca^{++}. Si l'intérieur de la cellule a un potentiel de −70 mV par rapport à l'extérieur, quelle est la variation (perte) d'énergie électrique à chaque cycle ?

4.4 et 4.5 Potentiel d'une ou plusieurs charges ponctuelles

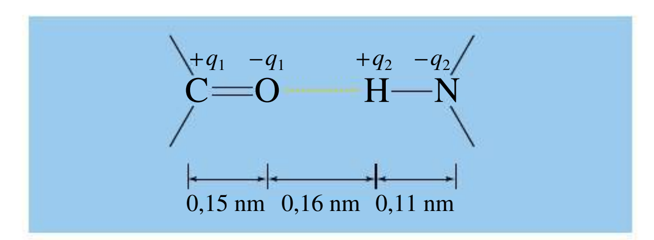
E58. (I) Soit les deux charges ponctuelles suivantes : $Q_1 = 5\ \mu$C est en $\vec{\mathbf{r}}_1 = (2\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}} - 5\vec{\mathbf{k}})$ m et $Q_2 = 2\ \mu$C est en $\vec{\mathbf{r}}_2 = (-\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{j}} + 2\vec{\mathbf{k}})$ m. Quelle est l'énergie potentielle électrique de ce couple de charges (a) dans le vide, (b) dans l'eau ($\kappa = 80$) ?

E59. (I) Soit les deux charges ponctuelles suivantes : $Q_1 = 3$ nC est en $\vec{\mathbf{r}}_1 = (3\vec{\mathbf{i}} - 2\vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}})$ m et $Q_2 = -2$ nC est en $\vec{\mathbf{r}}_2 = (\vec{\mathbf{i}} - 2\vec{\mathbf{j}} + 6\vec{\mathbf{k}})$ m. (a) Trouvez le potentiel total à l'origine. (b) On place une troisième charge ponctuelle $q = -5$ nC à l'origine. Quelle est l'énergie potentielle du système des trois charges ?

E60. (II) Deux charges ponctuelles positives sont sur l'axe des x. Q_1 est à $x = 0$ et Q_2 est à $x = 2$ m. À $x = 1$ m, $\vec{\mathbf{E}} = -27\vec{\mathbf{i}}$ V/m et $V = 63$ V. Trouvez Q_1 et Q_2 si les charges sont (a) dans le vide, (b) dans du verre ($\kappa = 9$).

E61. (II) Quel travail extérieur est nécessaire pour amener à vitesse constante, à partir de l'infini, quatre charges ponctuelles de 2 nC aux quatre coins d'un carré dont l'arête mesure 0,14 m ?

E62. (II) Dans une protéine (voir le sujet connexe de la section 1.5), le *pont hydrogène* illustré à la figure 4.56 se forme. Si $q_1 = 0{,}42e$ et $q_2 = 0{,}20e$, quelle est la variation (baisse) d'énergie potentielle du système ? Considérez que les atomes sont dans le vide. Exprimez la réponse en électronvolts.



▲ **Figure 4.56**
Exercice 62.

4.6 Potentiel d'une distribution continue de charge

E63. (II) Un anneau circulaire possède une densité linéique de charge de 2,2 nC/m sur la moitié de sa longueur. Quel est le potentiel électrique au centre de l'anneau ?

E64. (II) Un anneau circulaire de 3 cm de rayon possède une densité linéique de charge de 1,5 nC/m. (a) Une charge ponctuelle de 2 nC et de masse 0,01 g se trouve initialement au repos au centre de l'anneau. Que vaut l'énergie potentielle ? (b) On déplace légèrement la charge ponctuelle le long de l'axe de l'anneau. Si l'anneau reste immobile, quelle valeur aura le module de la vitesse de la charge ponctuelle à une distance infinie de l'anneau ?

E65. (II) Un disque non conducteur de rayon 20 cm a une densité surfacique de charge uniforme de 2 nC/m^2. Quel travail extérieur est nécessaire pour amener une charge de 5 nC de l'infini en un point situé à 10 cm du centre du disque le long de l'axe du disque ?

4.7 Potentiel d'un conducteur

E66. (I) Le potentiel à une distance de 15 cm de la surface d'une sphère métallique uniformément chargée de rayon 10 cm est de 3,8 kV. Quelle est la densité surfacique de charge de la sphère ?

E67. (I) Deux sphères métalliques uniformément chargées sont reliées par un fil conducteur. L'une des sphères a un rayon de 0,4 m et possède une densité surfacique de charge de 8,2 nC/m^2. Quelle est la charge sur l'autre sphère de rayon 0,25 m ?

E68. (II) Deux gouttes de mercure sphériques ont des charges identiques et sont à un potentiel de 1000 V. Les deux gouttes se joignent en additionnant leur charge respective. Quel potentiel mesure-t-on à la surface de cette goutte plus grande ?

E69. (II) Deux sphères métalliques uniformément chargées de rayons 3 cm et 7 cm sont reliées par un fil conducteur. La charge totale sur les deux sphères est de 30 nC. Quelle est la charge sur chaque sphère ?

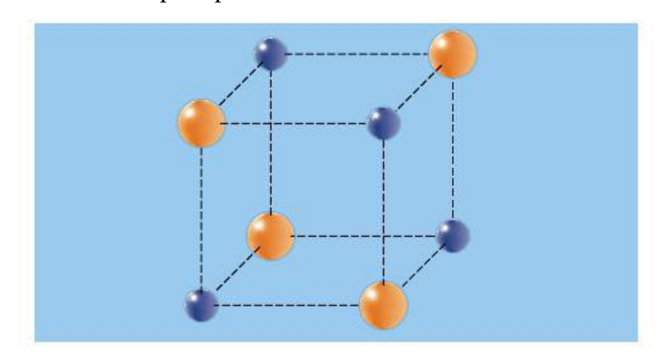
PROBLÈMES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

P1. (II) Un noyau d'uranium (de charge 92e, de masse 238 u) au repos se transforme en un noyau de thorium (de charge 90e, de masse 234 u) et une particule α (de charge +2e, de masse 4 u). Juste après la désintégration, les particules sont au repos et distantes de $7{,}4 \times 10^{-15}$ m. Trouvez l'énergie cinétique de chaque particule lorsqu'elles sont à une distance infinie l'une de l'autre. Contrairement à l'exercice E41, on ne suppose pas que le thorium reste au repos.

P2. (I) Sur un disque de rayon b, on a pratiqué un trou concentrique de rayon a. La densité surfacique de charge σ est uniforme. Trouvez le potentiel en un point sur l'axe du disque à la distance y du centre.

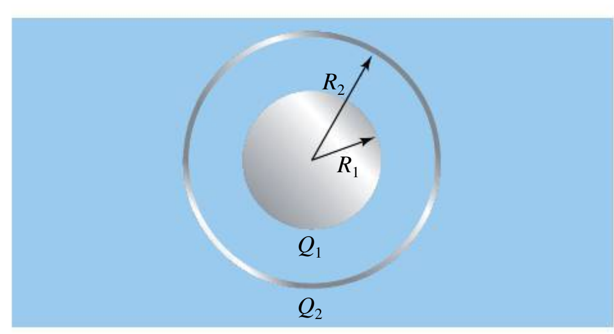
P3. (I) Dans un cristal de NaCl, les ions Na^+ et Cl^- sont disposés selon un réseau cubique à trois dimensions, comme le montre la figure 4.57. La plus courte distance entre deux ions est $2{,}82 \times 10^{-10}$ m. Trouvez l'énergie potentielle d'un ion Na^+ : (a) en incluant seulement les contributions des six voisins immédiats ; (b) en incluant les contributions des douze voisins les plus proches.



▲ Figure 4.57
Problème 3.

P4. (II) Un faisceau d'électrons accélérés par une différence de potentiel de 20 kV est dirigé vers une cible en tungstène de 500 g à raison de 4×10^{16} électrons par seconde. En supposant que 30 % de l'énergie des électrons se transforme en chaleur dans la cible, combien de temps faut-il pour que la température de la cible s'élève de 10 °C ? (La chaleur spécifique du tungstène est égale à 134 $J{\cdot}K^{-1}{\cdot}kg^{-1}$.)

P5. MonLab (I) Une sphère métallique de rayon R_1 porte une charge Q_1. Elle est entourée d'une coquille conductrice mince de rayon R_2 qui porte la charge Q_2 négative (figure 4.58). Déterminez : (a) le potentiel V_1 de la sphère intérieure ; (b) le potentiel V_2 de la coquille ; (c) la différence de potentiel $V_1 - V_2$. (d) Dans quelle condition a-t-on $V_1 = V_2$?



▲ Figure 4.58
Problème 5.

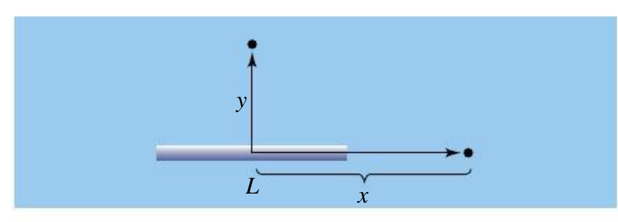
P6. (II) Un ballon de rayon R porte une densité surfacique de charge uniforme σ positive. Montrez que la surface est soumise à une force électrique par unité d'aire égale à $\sigma^2/2\varepsilon_0$. (*Indice* : Utilisez la relation $F_r = -dU/dr$.)

P7. (I) Un câble coaxial est composé d'un fil intérieur, de rayon a et de densité linéique de charge λ positive, et d'une gaine cylindrique de rayon b portant une densité linéique de charge $-\lambda$. On suppose que le fil et la gaine sont séparés par du vide. (a) Utilisez l'expression du module du champ électrique ($E = 2k\lambda/r$) entre le fil et la gaine pour montrer que leur différence de potentiel est

$$V(b) - V(a) = -2k\lambda \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(b) Un compteur Geiger, qui sert à détecter les rayonnements, a une géométrie cylindrique similaire, avec $a = 3 \times 10^{-3}$ cm, $b = 2{,}5$ cm et $\Delta V = 800$ V. Quel est le champ électrique à la surface du fil intérieur ?

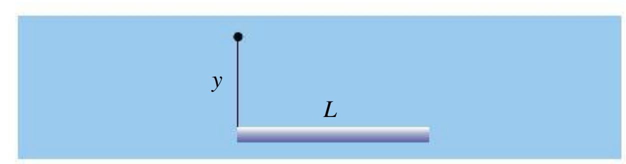
P8. MonLab (II) Une tige de longueur L porte une charge Q positive uniformément répartie sur sa longueur. (a) Trouvez le potentiel en un point situé sur l'axe de la tige à une distance x, supérieure à $L/2$, du centre de la tige (figure 4.59). (b) Trouvez le potentiel en un point situé directement au-dessus du centre de la tige, à une distance y. (c) Donnez une valeur plausible à L et à Q. Superposez le graphe de la variation du potentiel électrique le long de l'axe des x à celui de sa variation le long de l'axe des y. Selon quel axe la décroissance est-elle la plus rapide ?



▲ **Figure 4.59**

Problème 8.

P9. (I) Une tige de longueur L située sur l'axe des x porte une densité linéique de charge λ positive. Trouvez le potentiel en un point situé à la distance y d'une extrémité sur une perpendiculaire à la tige (figure 4.60). (Consultez la table d'intégrales de l'annexe C.)



▲ **Figure 4.60**

Problème 9.

P10. (II) Une sphère de rayon R porte une charge Q positive uniformément répartie dans son volume. En négligeant la polarisation du matériau, montrez que pour $r < R$ le potentiel s'écrit

$$V(r) = \frac{kQ(3R^2 - r^2)}{2R^3}$$

(*Indice* : Le champ électrique à l'intérieur d'une sphère uniformément chargée est $E = kQr/R^3$. Calculez $V(r) - V(R)$.)

P11. (II) Une sphère non conductrice de rayon R et de constante diélectrique κ porte une charge totale Q uniformément répartie dans son volume. Montrez que l'énergie potentielle de la sphère est

$$U = \frac{3kQ^2}{5\kappa R}$$

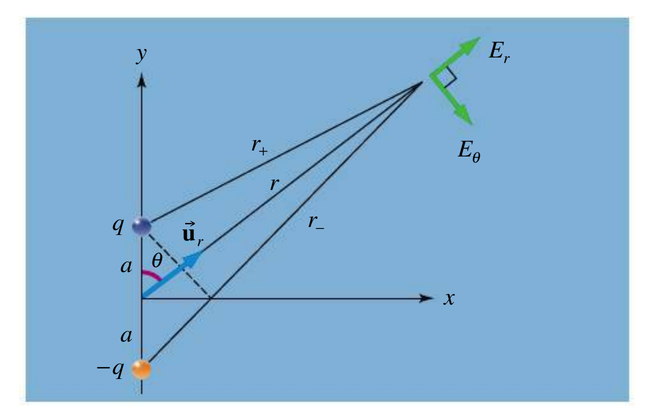
(*Indice* : Cherchez d'abord l'expression du potentiel à la surface d'une sphère uniformément chargée de rayon $r < R$. La charge à l'intérieur d'une coquille mince entre r et $r + dr$ est égale à $dq = \rho(4\pi r^2\, dr)$. Le travail nécessaire pour amener une charge infinitésimale dq de l'infini jusqu'au point de potentiel V est $V dq$.)

P12. (II) (a) Montrez que le potentiel créé par un dipôle (figure 4.61), de moment dipolaire $p = 2aq$, à la distance r de son centre est donné par

$$V(r, \theta) = \frac{kp\cos\theta}{r^2}$$

où $r \gg a$ (donc $r_- - r_+ \approx 2a\cos\theta$ et $r_+r_- \approx r^2$). (b) Utilisez l'expression précédente pour trouver les composantes du champ électrique :

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r}; \quad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$$



▲ **Figure 4.61**

Problème 12.

P13. (II) En un point éloigné, le potentiel créé par un dipôle peut s'écrire (voir le problème P12) sous la forme

$$V = \frac{k\vec{\mathbf{p}}\cdot\vec{\mathbf{r}}}{r^3}$$

En utilisant $E_s = -\partial V/\partial s$, avec $s = x$ ou y, montrez que si le moment dipolaire est orienté selon l'axe des x, alors

$$E_x = \frac{kp(2x^2 - y^2)}{r^5}; \quad E_y = \frac{3kpxy}{r^5}$$

P14. (II) Montrez que l'expression

$$\vec{\mathbf{E}} = \frac{k}{r^3}[3(\vec{\mathbf{p}}\cdot\vec{\mathbf{u}}_r)\vec{\mathbf{u}}_r - \vec{\mathbf{p}}]$$

donne les mêmes résultats qu'au problème P13 pour les composantes E_x et E_y du champ créé par un dipôle. (*Indice* : Supposez que $\vec{\mathbf{p}} = p\vec{\mathbf{i}}$. Exprimez $\vec{\mathbf{u}}_r = \vec{\mathbf{r}}/r$ en fonction de x et de y.)

P15. (II) L'énergie potentielle d'un dipôle de moment dipolaire $\vec{\mathbf{p}}_2$ dans le champ $\vec{\mathbf{E}}_1$ créé par un autre dipôle est $U = -\vec{\mathbf{p}}_2\cdot\vec{\mathbf{E}}_1$. Utilisez l'expression de $\vec{\mathbf{E}}$ donnée dans le problème P14 pour montrer que l'énergie potentielle de l'interaction dipôle-dipôle est

$$U = \frac{k}{r^3}[\vec{\mathbf{p}}_1\cdot\vec{\mathbf{p}}_2 - 3(\vec{\mathbf{p}}_1\cdot\vec{\mathbf{u}}_r)(\vec{\mathbf{p}}_2\cdot\vec{\mathbf{u}}_r)]$$

Calculez l'énergie d'interaction de deux molécules d'eau, considérées comme séparées par du vide, pour lesquelles $p = 6{,}2 \times 10^{-30}$ C·m. On donne $r = 0{,}4$ nm. Faites ce calcul pour quatre configurations de moments dipolaires : (a) parallèles et côte à côte ; (b) antiparallèles et côte à côte ; (c) parallèles sur la même droite ; (d) antiparallèles sur la même droite.

P16. (II) L'énergie potentielle d'un système de charges est donnée par

$$U = \sum_{i<j} \frac{kq_iq_j}{r_{ij}}$$

la somme étant calculée sur toutes les paires *distinctes*, c'est-à-dire que $i \neq j$ et les paires ne sont pas comptées deux fois. Montrez qu'on peut écrire une expression équivalente sous la forme

$$U = \sum \tfrac{1}{2} q_i V_i$$

la somme étant calculée sur toutes les charges du système et V_i étant le potentiel créé par toutes les charges, *sauf* q_i, au point où se trouve q_i.

PROBLÈMES SUPPLÉMENTAIRES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

P17. (II) Reprenez le problème P8 en supposant que la charge augmente de façon linéaire à partir du centre de la tige ($x = 0$), de sorte que (a) $\lambda = A|x|$; (b) $\lambda = Ax$, où A est une constante positive.

P18. (II) Servez-vous du résultat du problème P8 et de la relation entre le champ électrique et le potentiel pour trouver l'expression du champ électrique en un point (a) situé sur l'axe de la tige, à une distance x extérieure à la tige ; (b) situé directement au-dessus du centre de la tige, à une distance y.

P19. (II) Reprenez l'exemple 4.18 en supposant que la charge sur le disque augmente (a) de façon linéaire à partir du centre, de sorte que $\sigma = Bx$, où B est une constante positive ; (b) comme $\sigma = Cx^2$, où C est une constante positive.

P20. (II) Trouvez une expression pour la charge totale Q dans les deux cas présentés au problème P19. Exprimez les deux résultats du problème P19 à partir de la charge totale Q. (*Indice* : $Q = \int dq$.)

P21. (II) Une charge ponctuelle $Q_1 = 1$ μC est située en (0, 0,5 m). Une autre charge $Q_2 = -1$ μC se trouve en (0, −0,5 m). (a) En vous servant de l'expression cartésienne du potentiel d'une charge ponctuelle $V = kQ/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, trouvez l'expression du potentiel total des deux charges en un point quelconque du plan xy. (b) Tracez le graphe de $V(x, y)$ pour x allant de −1,0 m à 1,0 m et pour y allant de −1,0 m à 1,0 m. Le graphe obtenu confirme-t-il la représentation des équipotentielles de la figure 4.23 (p. 148) ?

P22. (II) Deux charges ponctuelles $Q = 1$ μC sont situées en (0, 0,5 m) et en (0, −0,5 m). (a) En vous servant de l'expression cartésienne du potentiel d'une charge ponctuelle $V = kQ/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, trouvez l'expression du potentiel total des deux charges en un point quelconque du plan xy. (b) Tracez le graphe de $V(x, y)$ pour x allant de −1,0 m à 1,0 m et pour y allant de −1,0 m à 1,0 m. Le graphe obtenu confirme-t-il la représentation des équipotentielles de la figure 4.24 (p. 149) ?


DANGER
735 000
VOLTS

CHAPITRE 5

CONDENSATEURS ET DIÉLECTRIQUES



SOMMAIRE



Une grande quantité de charge électrique doit rapidement traverser le flash d'un appareil photo pour qu'il produise son effet. Pour ce faire, de la charge est accumulée pendant plusieurs secondes dans un dispositif appelé *condensateur*, qui la libère beaucoup plus rapidement au moment où une photo est prise. Dans ce chapitre, nous décrirons ces dispositifs.

Au chapitre 1, nous avons étudié la charge électrique d'objets qui avaient été chargés par frottement ou autrement. Les corps chargés ne permettent cependant pas d'emmagasiner des charges pendant de longues périodes, puisqu'ils peuvent subir des fuites de courant dans l'air. Dans ce chapitre, nous allons traiter des *condensateurs*, des dispositifs qui permettent d'accumuler de la charge pendant une longue période. Leur étude nous conduira à définir une nouvelle grandeur physique, la *capacité électrique* (section 5.1).

Nous avons déjà vu le condensateur plan, qui est souvent utilisé pour produire un champ électrique uniforme. Les condensateurs font aussi partie des composants de *circuits électriques* : des condensateurs miniatures sont utilisés pour atténuer les fluctuations dans les blocs d'alimentation, servent au stockage de la mémoire dans les ordinateurs, jouent un rôle essentiel dans les circuits de syntonisation des postes de radio et sont aussi d'usage courant en électronique. On trouve aussi des condensateurs de plus grande taille qui stabilisent l'alimentation de chaînes stéréo dans les voitures, voire des condensateurs géants qui jouent le même rôle de régulateur dans le réseau électrique d'une ville ou qui trouvent diverses applications en recherche scientifique. À la section 5.2,

nous amorcerons l'étude des *circuits électriques*, qui se poursuivra dans les deux chapitres suivants. Nous nous limiterons pour l'instant à des circuits qui ne contiennent que des condensateurs.

Puisque les condensateurs accumulent de la charge, ils permettent de stocker de l'énergie potentielle électrique. Ils jouent ce rôle d'accumulateurs dans les défibrillateurs cardiaques ou les flashs d'appareils photo. Les sections 5.3 et 5.4 porteront sur cet aspect. Le chapitre se terminera sur l'effet de la présence d'un matériau diélectrique dans un condensateur.

5.1 LA CAPACITÉ

Un **condensateur** est simplement composé de deux conducteurs, appelés *armatures*, séparés par un isolant comme de l'air ou du papier, ou encore par du vide*. En pratique, on recouvre le tout d'un boîtier protecteur, duquel n'émergent que deux fils reliés aux armatures (figure 5.1).

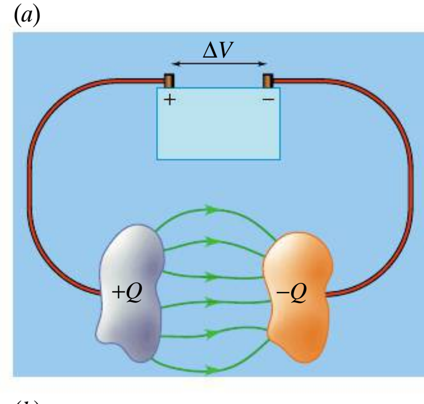
(*a*) (*b*)

Figure 5.1

(*a*) Un condensateur est formé de deux conducteurs séparés par un isolant ou par du vide. (*b*) En pratique, le tout est recouvert d'un revêtement. Les modèles disponibles peuvent être miniatures (les plus petits sur la photo mesurent moins d'un centimètre) ou plus volumineux, selon l'application.

On peut donner aux armatures des charges de même grandeur mais de signes opposés $+Q$ et $-Q$ en les reliant à une pile, un dispositif qui maintient une différence de potentiel entre ses bornes (figure 5.2*a*). Dans les schémas de circuits électriques, on utilise le symbole ⊣⊢ pour représenter le condensateur, et le symbole ⊣|⊢ pour la pile, la barre plus courte désignant la borne négative (figure 5.2*b*). Nous verrons le fonctionnement des piles électriques au chapitre 7 ; il suffit pour le moment de comprendre que la pile, dès que le circuit est formé, fait rapidement passer de la charge d'une armature à l'autre. En effet, chaque ensemble constitué d'une armature, d'un fil et d'une borne de la pile devient alors *un* conducteur cherchant à atteindre l'équilibre électrostatique : il y a donc d'abord une certaine période de transition au cours de laquelle la charge portée par les armatures augmente (voir la section 7.5), jusqu'à l'atteinte d'un état d'équilibre. Quand cet équilibre est atteint, le potentiel de chaque armature est le même que celui de la borne à laquelle elle est reliée, puisqu'il n'y a pas de différence de potentiel dans le matériau d'un conducteur à l'état d'équilibre électrostatique (voir la section 4.7). Par conséquent, la différence de potentiel ΔV entre les armatures est la même que la différence de potentiel entre les bornes de la pile. Dans le contexte d'un circuit électrique, le mot **tension** est souvent utilisé comme synonyme d'une différence de potentiel aux bornes d'un composant. On dit donc qu'à l'équilibre, le condensateur et la pile ont la même tension à leurs bornes.

(*a*)



(*b*)

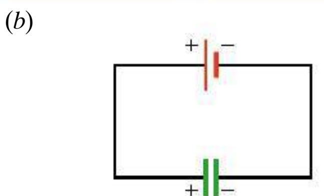


Figure 5.2

(*a*) Les armatures d'un condensateur acquièrent des charges de même grandeur et de signes opposés lorsqu'on les relie à une pile. (*b*) Représentation schématique du circuit illustré en (*a*).

Si la pile est déconnectée, les charges *restent sur les armatures*, car elles y sont maintenues par leur attraction mutuelle. Le condensateur peut donc demeurer chargé pendant une très longue période, limitée seulement par la légère fuite de courant qui traverse inévitablement l'isolant séparant les deux armatures.

* Le vide n'est pas un matériau, donc on ne peut le qualifier d'isolant. Toutefois, il ne contient aucune charge libre, de sorte qu'il ne permet pas le passage du courant.

Les deux armatures accumulant des charges de même grandeur, bien que de signes opposés, la variable Q désigne indifféremment la grandeur (c'est-à-dire la valeur absolue) de la charge portée par l'une ou l'autre des armatures. Cette grandeur est directement proportionnelle à la différence de potentiel ΔV entre les plaques. On peut donc écrire

$$Q = C\Delta V \qquad (5.1)$$

C étant une constante de proportionnalité appelée **capacité** du condensateur*. La capacité d'un condensateur est une mesure de la charge et de l'énergie électrique qu'il est capable d'emmagasiner *à une tension donnée*. En exprimant l'équation 5.1 sous la forme

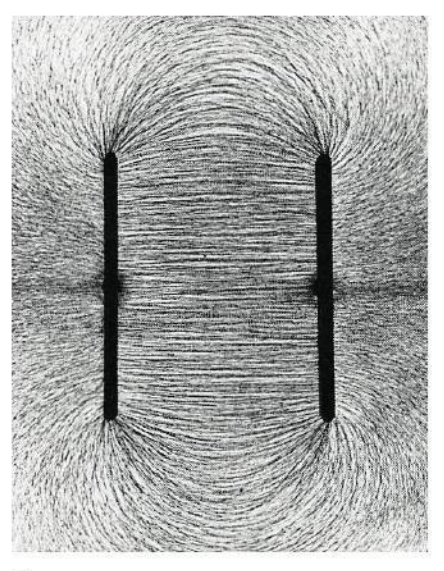
Capacité d'un condensateur

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \qquad (5.2)$$

on voit bien que la capacité nous renseigne sur la quantité de charges qu'un condensateur peut emmagasiner par unité de différence de potentiel entre les armatures. L'unité SI de capacité est le **farad** (F). D'après l'équation 5.2, on voit que

$$1 \text{ farad} = 1 \text{ coulomb/volt}$$

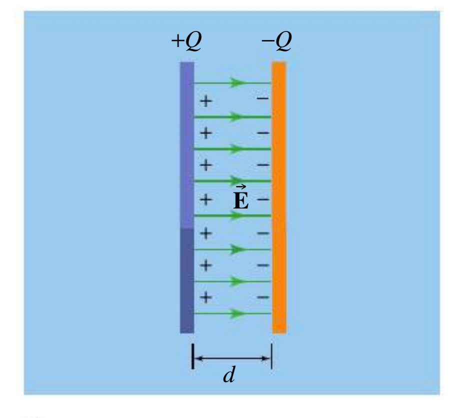
Dans la pratique, un farad correspond à une très grande valeur (voir l'exemple 5.1). C'est pourquoi les valeurs des capacités sont souvent données en microfarads ($1\ \mu F = 10^{-6}$ F) ou même en picofarads ($1\ pF = 10^{-12}$ F). La capacité d'un condensateur dépend, comme nous le verrons plus loin, de la *géométrie* des armatures (leurs dimensions, leur forme et leur position relative) et du *milieu* (comme l'air, le papier ou le plastique) compris entre les armatures. Elle ne dépend *pas* de Q ou de ΔV séparément. Si l'on double la différence de potentiel, la charge emmagasinée double également, et leur rapport ne change pas. La capacité est donc une caractéristique d'un condensateur donné, qu'on peut inscrire sur son boîtier (voir la figure 5.1*b*).



▲ **Figure 5.3**
Le champ électrique produit par deux armatures de charges opposées et de dimensions finies n'est pas tout à fait uniforme. Toutefois, on peut le considérer comme uniforme loin du bord des armatures, surtout quand la distance entre celles-ci est petite comparativement à leur largeur. Cette condition est souvent remplie en pratique, ce qui permet de négliger les effets de bords.

Le condensateur plan

Quand les armatures sont planes et parallèles, on obtient un condensateur plan, le dispositif que nous avons déjà rencontré à plusieurs reprises comme source d'un champ électrique uniforme (voir notamment la figure 2.20, p. 49, et la figure 4.2, p. 126). En pratique, le champ obtenu n'est jamais parfait, comme l'illustre la figure 5.3. Il faut que la distance séparant les armatures soit petite comparativement à leur largeur pour qu'on puisse négliger les **effets de bords** aux extrémités et considérer que le champ électrique entre les armatures de même que la distribution de la charge sur chacune de celles-ci sont uniformes (figure 5.4). Heureusement, c'est le cas en pratique, du moins dans les condensateurs conçus pour l'électronique.



▲ **Figure 5.4**
Si la distance séparant les armatures est petite, on peut négliger les effets de bords et considérer que le champ électrique est uniforme.

Les armatures, qui ont la même aire A et qui sont séparées par une distance d, portent des charges opposées de même grandeur Q. Comme elles s'attirent, ces charges sont situées seulement sur les surfaces intérieures des armatures.

* Pour que l'équation 5.1 puisse être utilisée, on évalue toujours ΔV dans le sens où elle est positive. En effet, Q et C sont toujours des quantités positives. Pour alléger la notation, nous éviterons d'écrire $Q = C|\Delta V|$.

D'après la section 3.5 ou l'équation 2.19, on sait que le module du champ électrique entre les armatures est donné par

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 A}$$

où $\sigma = Q/A$ est ici la valeur absolue (grandeur) de la densité surfacique de charge. À la section 4.3, nous avons souligné que le champ électrique dans un condensateur plan était donné par $E = \Delta V/d$ (équation 4.12). Par une substitution dans l'équation ci-dessus, on obtient que la capacité ($C = Q/\Delta V$) est donnée par

Capacité d'un condensateur plan

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad (5.3)$$

Grâce à cette équation, on voit que la permittivité du vide ε_0 peut s'exprimer en farads par mètre :

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m}$$

L'utilisation de la constante de permittivité *du vide* dans l'équation 5.3 sous-entend que les armatures ne sont séparées que par du vide. À la section 5.5, nous verrons qu'en présence d'un matériau diélectrique inséré entre les armatures, l'équation 5.3 devient

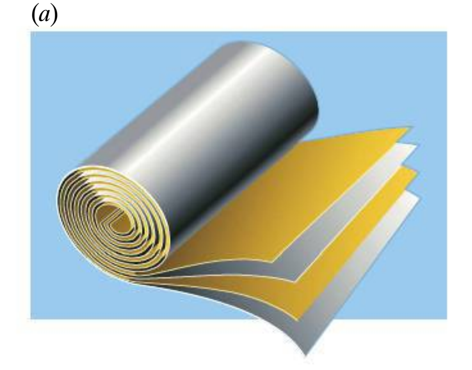
$$C = \frac{\kappa\varepsilon_0 A}{d}$$

où κ est la constante diélectrique du matériau (voir la section 2.7). D'ici la section 5.5, nous calculerons les capacités en supposant que les armatures sont toujours séparées par de l'air ou par du vide*.

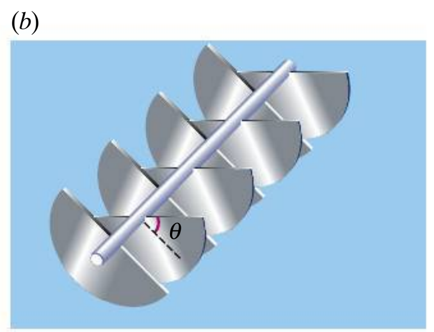
On peut facilement voir pourquoi la capacité dépend des caractéristiques géométriques A et d du condensateur. La proportionnalité $C \propto A$ est due au fait que, pour une différence de potentiel donnée, une armature plus grande peut emmagasiner une plus grande quantité de charge. Si on rapproche les armatures d'un condensateur isolé, Q demeure constante, donc le champ $E = \sigma/\varepsilon_0 = Q/\varepsilon_0 A$ aussi, mais la différence de potentiel $\Delta V = Ed$ diminue. On a donc $C = Q/\Delta V \propto 1/d$. Si on rapproche plutôt les armatures pendant que le condensateur est branché à une pile, c'est ΔV qui reste constant et le champ qui augmente. Mais le champ $E = Q/\varepsilon_0 A$ ne peut croître que si Q croît (la pile achemine de la charge supplémentaire). Ainsi, $C \propto 1/d$ demeure valable.

Dans la pratique, les condensateurs plans sont souvent faits de deux feuilles métalliques séparées par des feuilles isolantes en plastique. Ce sandwich est enroulé sous forme de cylindre, puis recouvert (figure 5.5*a*). Malgré les apparences, plusieurs des condensateurs apparaissant à la figure 5.1*b* peuvent donc être considérés comme des condensateurs plans. Dans les anciens postes de radio, on trouvait des condensateurs plans à capacité variable (figure 5.5*b*). Ils étaient composés de deux ensembles de plaques semi-circulaires dont l'un pouvait être tourné à l'aide d'un bouton. Seule la portion superposée des plaques pouvant se charger, cette rotation modifiait l'aire efficace, donc la capacité. L'ajustement de la capacité servait à choisir la fréquence des ondes radio captées par le poste (voir les sections 12.7 et 12.8).

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 5.5**

(*a*) On peut réaliser un condensateur « plan » en isolant deux feuilles métalliques au moyen de feuilles de plastique, puis les enrouler pour réduire l'encombrement. (*b*) Un condensateur variable. La capacité dépend de l'aire juxtaposée de deux ensembles d'armatures : l'un des ensembles est fixe, l'autre peut tourner.

* En pratique, la constante diélectrique de l'air étant $\kappa = 1{,}000\,59 \approx 1$, on n'a pas à distinguer l'air du vide.

Exemple 5.1

Un condensateur plan dont les armatures sont distantes de 1 mm a une capacité de 1 F. Quelle est l'aire de chaque armature ?

Solution

D'après l'équation 5.3,

$$A = \frac{Cd}{\varepsilon_0} = \frac{(1\ \text{F})(10^{-3}\ \text{m})}{8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m}}$$
$$= 1{,}13 \times 10^{8}\ \text{m}^2$$

Cela correspond à peu près à 10 km × 10 km ! On voit ici que le farad est une très grande unité. Nous verrons néanmoins à la section 5.5 comment on peut obtenir un condensateur qui a une capacité de l'ordre du farad tout en ayant une taille beaucoup plus petite. ■

Exemple 5.2

Les armatures d'un condensateur plan sont séparées de 2 mm et ont pour dimensions 3 cm × 4 cm. Elles sont reliées à une pile de 60 V. Déterminer : (a) la capacité ; (b) la charge sur chaque armature.

Solution

(a) L'aire des armatures est $A = 12 \times 10^{-4}\ \text{m}^2$. La capacité est donnée par l'équation 5.3 :

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$
$$= \frac{(8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(1{,}2 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)}{2 \times 10^{-3}\ \text{m}}$$
$$= 5{,}31\ \text{pF}$$

Notez que A est la surface de *l'une* des armatures, et non la surface totale des deux armatures.

(b) La valeur absolue de la charge d'une armature est $Q = C\Delta V$. En substituant la capacité déterminée en (a), on obtient

$$Q = C\Delta V$$
$$= (5{,}31 \times 10^{-12}\ \text{F})(60\ \text{V})$$
$$= 3{,}19 \times 10^{-10}\ \text{C}$$

Les armatures portent donc $+3{,}19 \times 10^{-10}$ C et $-3{,}19 \times 10^{-10}$ C. ■

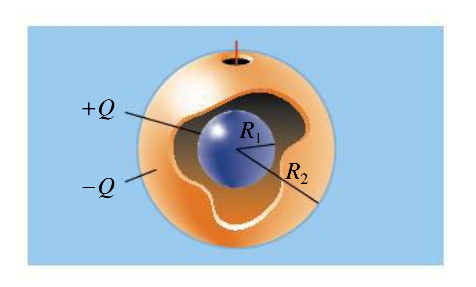
Les autres géométries de condensateurs

L'équation 5.3 n'est valable que pour le condensateur plan. Pour obtenir la capacité de condensateurs qui ne sont *pas* plans, nous répéterons la démarche qui a conduit à l'obtention de l'équation 5.3 :

- Calculer le champ électrique en fonction des charges $+Q$ et $-Q$ portées par les armatures (en utilisant la méthode de la section 2.5 ou le théorème de Gauss).
- Calculer la différence de potentiel entre les armatures en utilisant l'intégrale de ligne de ce champ (équation 4.9). Le champ ayant été exprimé en fonction de Q, on obtient ΔV en fonction de Q.
- Substituer dans l'équation 5.2 pour obtenir la capacité.

Un premier cas classique est celui du *condensateur sphérique*. Un tel condensateur est formé de deux armatures sphériques concentriques, de rayons R_1 et R_2 (figure 5.6). À l'exemple 5.3, nous montrerons que sa capacité, quand les armatures sont séparées par de l'air, est donnée par

$$C = \frac{R_1 R_2}{k(R_2 - R_1)} \tag{5.4}$$



▲ **Figure 5.6**
Un condensateur sphérique.

Un cas particulier de condensateur sphérique est une *sphère conductrice isolée* (comme la boule d'un générateur de Van de Graaff, par exemple). On peut considérer que la seconde armature est un environnement distant (par exemple

le sol, relié au générateur par une mise à la terre), qui prend une charge de signe opposé à celle de la sphère, diluée sur une surface immense. Dans l'exemple 5.4, nous montrerons que la capacité d'une telle sphère isolée, de rayon R, est donnée par

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R \tag{5.5}$$

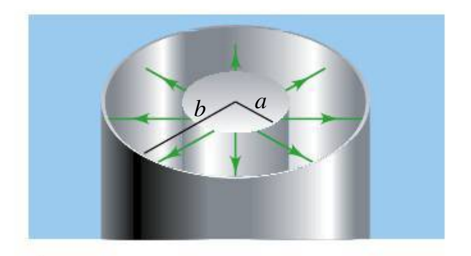
L'équation 5.5 peut être utilisée pour estimer la capacité électrique d'un être vivant (R est alors la taille approximative de celui-ci) puisqu'il s'agit d'un conducteur isolé. Plusieurs applications technologiques reposent sur cette estimation. Par exemple, l'écran tactile d'un téléphone cellulaire fonctionne grâce au changement de capacité qui se produit quand le doigt entre en contact avec l'écran. Cette conception permet à l'écran de fonctionner même au travers d'une pellicule protectrice isolante, ce qui ne serait pas le cas s'il fallait créer un parcours conducteur. On peut constater expérimentalement la capacité électrique de notre corps en le chargeant (figure 5.7).



▲ **Figure 5.7**

Un condensateur sphérique chargé… qui contient un cerveau.

Enfin, nous considérerons le cas du *condensateur cylindrique*, formé de deux armatures cylindriques coaxiales, de rayons a et b (figure 5.8). Ce type de condensateur est utilisé très fréquemment, car les câbles coaxiaux servant au transport des données Internet ou des signaux de télévision ont cette géométrie. (Il ne sert alors pas à accumuler des charges, mais sa capacité joue un rôle quand même.) En général, la gaine extérieure conductrice est mise à la terre et protège le signal du fil intérieur contre les perturbations électriques. Un manchon en nylon ou en téflon sépare le fil intérieur de la gaine. À l'exemple 5.5, nous montrerons que la capacité d'un tel câble d'une longueur L est donnée par l'équation suivante, à condition de supposer que les deux armatures sont séparées par de l'air :



▲ **Figure 5.8**

Un condensateur cylindrique.

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)} \tag{5.6}$$

Exemple 5.3

Démontrer l'équation 5.4 donnant la capacité d'un condensateur sphérique dont les armatures de rayons R_1 et R_2 ($> R_1$) sont séparées par du vide. Pour ce faire, supposer que l'armature interne porte la charge $+Q$ et que l'armature externe porte la charge $-Q$.

Solution

Dans les chapitres précédents, on a vu que le champ n'a que la composante radiale $E_r = +kQ/r^2$, où Q est seulement la charge de l'armature *intérieure*. La différence de potentiel entre les sphères est déterminée par le champ électrique, $\Delta V = -\int \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}}$. Puisque le champ a seulement une composante radiale, le produit scalaire devient $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{s}} = E_r\, dr$. Si l'on choisit un trajet allant de la sphère intérieure à la sphère extérieure, la différence de potentiel est

$$V_2 - V_1 = -\int_{R_1}^{R_2} E_r\, dr = -\left[-\frac{kQ}{r}\right]\Bigg|_{R_1}^{R_2} = kQ\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)$$

Ce résultat est négatif (à cause du sens pour lequel l'intégrale a été calculée), donc sa valeur absolue est

$$\Delta V = kQ\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = kQ\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)$$

De $C = Q/\Delta V$, on tire

$$C = \frac{R_1 R_2}{k(R_2 - R_1)}$$

On peut rapprocher cette expression de celle qui donne la capacité d'une sphère isolée et de celle qui donne la capacité d'un condensateur plan (voir le problème P11). ■

Exemple 5.4

(a) Démontrer l'équation 5.5 donnant la capacité d'une sphère conductrice isolée de rayon R. (b) Sachant qu'elle a un rayon de 6370 km, quelle est la capacité de notre planète, si on la considère comme une telle sphère conductrice isolée ?

Solution

(a) La sphère en elle-même n'est pas un condensateur : elle n'est qu'une des deux armatures, l'autre étant l'environnement distant. Si la sphère porte une charge $+Q$, cet environnement porte une charge $-Q$. Le potentiel de la sphère, mesuré par rapport à une référence de potentiel nul infiniment distante, est $V = kQ/R$. Quant au potentiel de l'environnement, il est essentiellement de 0 V puisqu'il est distant de la sphère. On a donc $\Delta V = kQ/R$. Puisque $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, la capacité $C = Q/\Delta V$ s'écrit bel et bien

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R$$

On voit donc que la capacité dépend du rayon, c'est-à-dire d'une grandeur géométrique. Ce résultat est raisonnable puisqu'il faut une plus grande charge pour élever le potentiel d'une plus grande sphère à un niveau donné. ■

(b) On obtient $C = 4\pi(8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})(6370 \times 10^{3}\ \text{m}) = 708\ \mu\text{F}$.

Nous verrons au sujet connexe « L'électricité atmosphérique », au chapitre 6, que ce calcul peut avoir un sens.

Exemple 5.5

Démontrer l'équation 5.6 donnant la capacité d'un condensateur cylindrique de longueur L dont les armatures de rayons a et b ($> a$) sont séparées par du vide.

Solution

On suppose le câble suffisamment long, comparativement à la distance entre ses armatures, pour pouvoir négliger les effets de bords. Dans les chapitres précédents, on a vu qu'avec une densité linéique de charge positive λ sur le conducteur intérieur, le champ électrique dans la région $a < r < b$ a seulement une composante radiale, donnée par

$$E_r = \frac{2k\lambda}{r}$$

Puisque le champ n'a pas d'autres composantes, nous avons $\vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}} = E_r\,\mathrm{d}r$. La différence de potentiel entre les conducteurs est donnée par

$$V_b - V_a = -\int_a^b E_r\,\mathrm{d}r = -2k\lambda\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r}$$
$$= -2k\lambda \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Nous avons seulement besoin de connaître la valeur absolue de cette différence de potentiel, $\Delta V = 2k\lambda \ln(b/a)$. La charge sur une longueur L est $Q = \lambda L$, et la capacité s'écrit donc

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}$$

La capacité est proportionnelle à la longueur du câble et augmente d'autant plus que la valeur de a s'approche de celle de b. Pour comprendre cette relation, considérons un rayon extérieur fixe b et une différence de potentiel fixe entre les armatures. Au fur et à mesure que le rayon du conducteur interne augmente, l'expression $\Delta V = 2k\lambda \ln(b/a)$ montre que λ doit augmenter puisque $\ln(b/a)$ diminue. Une augmentation de λ correspond à un accroissement de la charge totale emmagasinée pour la différence de potentiel donnée, c'est-à-dire à une augmentation de la capacité. ■

APERÇU HISTORIQUE

L'invention du condensateur

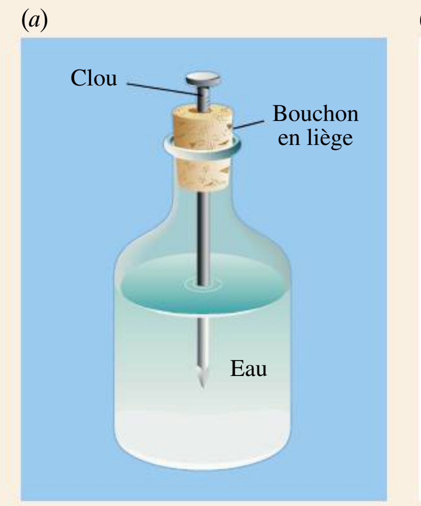
Au début de l'étude des phénomènes électriques, on se représentait la charge comme un fluide (voir la section 1.1). On s'imaginait donc qu'elle pouvait s'évaporer, ce qui avait le mérite d'expliquer que les objets ne restent pas longtemps chargés à l'air ambiant. Ce modèle suggérait qu'on pouvait inventer un moyen d'empêcher



cette évaporation ou de « condenser » le fluide évaporé. Ewald Jürgen von Kleist (vers 1700-1748), un pasteur allemand, eut l'idée d'enfermer dans une bouteille de l'eau chargée pour voir si la charge y demeurerait. Ayant rempli un flacon d'eau, il y fit tremper un clou (figure 5.9*a*). Prenant le flacon dans une main, il relia pendant un certain temps le clou à une machine fournissant de la charge puis coupa la connexion. Par manque d'expérience, il garda le flacon dans sa main, commettant l'erreur de ne pas le poser sur un support isolé, et reçut une énorme décharge lorsqu'il toucha le clou de l'autre main. S'il n'avait pas fait ce geste, son dispositif n'aurait pas fonctionné : von Kleist croyait n'avoir chargé que l'eau, mais on comprend aujourd'hui que c'est l'eau *et la main* qui jouent le rôle des deux armatures d'un condensateur. Plus tard, il s'aperçut que le dispositif pouvait rester électrifié assez longtemps à condition qu'il ne soit pas remué.

Trois mois plus tard, en 1746, Pieter Van Musschenbroek (1692-1761), professeur à l'université de Leyde, se rendit compte que pour recevoir une décharge, il fallait tenir le flacon non seulement durant la charge, mais aussi après. La décharge qu'il reçut lui parut suffisante pour ne pas avoir envie de recommencer. L'explication qu'il donna était plus complète que celle de Kleist et correspond essentiellement à celle acceptée aujourd'hui : pendant le processus de charge, le conducteur chargé à l'intérieur (l'eau) induit une charge opposée sur le conducteur extérieur (la main) qui est relié au sol par le corps, lui-même conducteur. Lorsque la seconde main touche le clou, la décharge est ressentie alors que les charges passent d'une main à l'autre par l'intermédiaire du corps, de façon à neutraliser l'eau et la main chargée. La décharge s'effectue beaucoup plus rapidement que la charge, ce qui explique la violence du choc ressenti.

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 5.9**

(*a*) Von Kleist réussit à charger l'eau en reliant le clou à une machine de charge. (*b*) Une bouteille de Leyde, l'ancêtre du condensateur, était un dispositif utilisé abondamment avant l'invention de la pile électrique.

On s'aperçut bientôt que la grenaille de plomb pouvait remplacer l'eau. La grenaille de plomb et la main furent ensuite remplacées par des feuilles métalliques recouvrant les surfaces intérieure et extérieure du flacon de verre. Puis, Benjamin Franklin utilisa une vitre plane au lieu du flacon en verre et l'on aboutit enfin au dispositif le plus simple, composé de deux plaques métalliques planes séparées par un isolant.

L'invention fortuite de von Kleist, connue plus tard sous le nom de bouteille de Leyde (figure 5.9*b*), a servi d'élément de base pour les recherches en électricité des cinquante années qui suivirent. Aujourd'hui, les condensateurs jouent une panoplie de rôles fondamentaux en technologie.

5.2 LES ASSOCIATIONS DE CONDENSATEURS EN SÉRIE ET EN PARALLÈLE*

Quand on relie entre eux plusieurs condensateurs, ou d'autres composants de circuit qui ont accidentellement une capacité électrique, on doit pouvoir déterminer la capacité équivalente de l'ensemble. Pour aborder cette étude, nous allons considérer que la capacité de chaque condensateur est connue. On n'a alors pas à se préoccuper de la présence d'un diélectrique ou non, puisqu'il en a été tenu compte pour déterminer la capacité. Nous commençons cette section par l'examen de deux types fondamentaux d'association de condensateurs.

* Cette section peut être étudiée au même moment que la section 7.2 sur l'association des résistances. Les passages du reste de ce chapitre qui seraient affectés par le report de l'étude de cette section ont été intégrés à la piste de lecture facultative, en bleu.

Dans une **association en série**, les éléments de circuit sont reliés l'un à la suite de l'autre, sans embranchement : ils ont *une* borne commune. La figure 5.10*a* représente deux condensateurs reliés en série avec une pile. Puisque les champs électriques dans les condensateurs sont de même sens, la différence de potentiel aux bornes de l'ensemble est égale à la somme des différences de potentiel :

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$$

Il est important de réaliser que la pile n'est en contact qu'avec les fils reliés aux armatures *a* et *d*. Cela est le cas quel que soit le nombre de condensateurs reliés en série. Ainsi, la pile va faire passer des charges de l'armature *a* à l'armature *d*. Mais les armatures *b* et *c* vont acquérir des charges induites qui doivent être de même grandeur et de signes opposés puisqu'elles font partie d'un même conducteur sur lequel la charge totale est nulle. Par conséquent, dans une association en série, la quantité de charge Q est la même sur chaque condensateur*.

Voyons maintenant quel condensateur $C_{\text{éq}}$ est équivalent aux deux condensateurs en série (figure 5.10*b*). Pour qu'il ait équivalence, il ne doit y avoir aucune différence du point de vue de la pile : la différence de potentiel aux bornes de $C_{\text{éq}}$ est donc $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$, et la charge portée par $C_{\text{éq}}$ doit être la même que celle que la pile a fournie à l'armature *d* et retirée à l'armature *a*, c'est-à-dire $Q = Q_1 = Q_2$. Puisque $\Delta V = Q/C$, on a

$$\frac{Q}{C_{\text{éq}}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

Après simplification, cela donne

$$\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

Ce raisonnement est facile à généraliser au cas de plusieurs condensateurs. Pour une association de N condensateurs en série, la capacité équivalente est

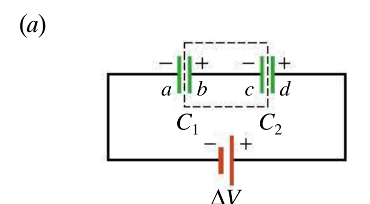
Capacité équivalente d'une association en série

$$\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N} \qquad (5.7)$$

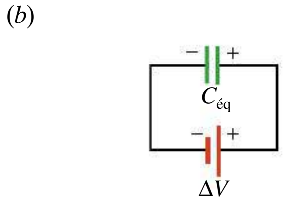
Comme on peut le déduire de l'équation 5.7, dans une association en série, la capacité équivalente est toujours inférieure à celle du condensateur qui a la plus petite capacité. Puisque la charge de chaque condensateur est la même et que $\Delta V = Q/C$, la différence de potentiel est la plus grande aux bornes du condensateur ayant la plus petite capacité.

Dans une **association en parallèle**, les éléments de circuit sont reliés côte à côte : ils ont tous *deux* bornes communes. La figure 5.11*a* représente deux condensateurs montés en parallèle avec une pile. Les potentiels des bornes de gauche doivent être les mêmes à l'état d'équilibre électrostatique parce que les bornes sont reliées par des fils conducteurs dans lesquels le champ est nul. Il en va également ainsi des potentiels des bornes de droite. Par conséquent, les différences de potentiel entre les bornes des deux éléments sont les mêmes, c'est-à-dire $\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$. La charge totale Q sur chaque armature

(*a*)

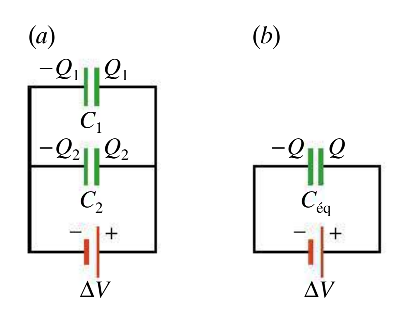


(*b*)



▲ **Figure 5.10**

Deux condensateurs reliés en série. (*a*) Les quantités de charges sont les mêmes sur toutes les armatures. En effet, le conducteur encadré en pointillés ne porte aucune charge totale : les charges qu'il contient se sont seulement séparées lorsque la pile a été reliée aux condensateurs. (*b*) La capacité équivalente est donnée par $1/C_{\text{éq}} = 1/C_1 + 1/C_2$.



▲ **Figure 5.11**

Deux condensateurs reliés en parallèle. (*a*) Les différences de potentiel aux bornes des condensateurs sont les mêmes. En effet, les bornes de gauche font partie d'un même conducteur à l'équilibre et sont donc au même potentiel ; il en va de même pour les bornes de droite. (*b*) La capacité équivalente est donnée par $C_{\text{éq}} = C_1 + C_2$.

* Ce résultat peut aussi être obtenu grâce à un raisonnement tiré du chapitre 7 : pendant que les condensateurs se font charger, c'est le même courant qui leur parvient et les quitte, puisqu'ils sont situés sur la même branche du circuit. De même, le résultat $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$ peut lui aussi être obtenu grâce à un raisonnement tiré du chapitre 7 : il découle directement de la loi des mailles de Kirchhoff.

du condensateur équivalent (figure 5.11*b*) est égale à la somme des charges individuelles*:

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)\Delta V$$
$$= C_{\text{éq}}\Delta V$$

En simplifiant, on en déduit facilement que

$$C_{\text{éq}} = C_1 + C_2$$

En généralisant ce raisonnement au cas de N condensateurs, on trouve

Capacité équivalente d'une association en parallèle

$$C_{\text{éq}} = C_1 + C_2 + \ldots + C_N \qquad (5.8)$$

Ici, contrairement à une association en série, la pile est en contact avec toutes les armatures.

D'après l'équation 5.8, on voit que la capacité équivalente d'une association de condensateurs reliés en parallèle est tout simplement la somme des capacités individuelles des condensateurs. On peut faire le lien entre ce résultat et l'équation 5.3: si on place en parallèle plusieurs condensateurs plans identiques chargés à la même différence de potentiel, on peut imaginer ce qui se produit si les armatures de même signe sont toutes mises en contact entre elles: on obtient un seul condensateur dont l'aire des armatures est la somme des aires individuelles. La capacité de l'ensemble est alors proportionnelle à l'aire totale des armatures.

Lorsqu'on doit traiter des associations complexes de condensateurs, on doit distinguer ceux qui sont en série de ceux qui sont en parallèle. De plus, il est important de retenir que la charge équivalente d'une association en série est égale à la charge portée par chacun des condensateurs de l'association, tandis que la charge équivalente d'une association en parallèle est égale à la somme des charges portées par chacun des condensateurs de l'association.

Dans certains cas, un circuit contient plusieurs condensateurs, mais aucun d'entre eux n'est en série ou en parallèle avec un autre. Par exemple, c'est le cas des multiplicateurs de tension (figure 5.12). Tout circuit, même s'il comporte d'autres composants que des condensateurs, possède une capacité équivalente. Celle-ci peut être *mesurée*, mais il n'est que parfois possible de la *calculer*, et au prix d'une démarche plus laborieuse (voir le problème P6).

(*a*)



(*b*)

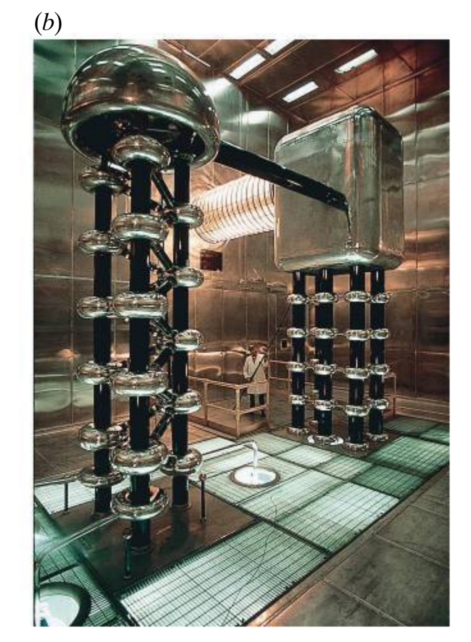


Figure 5.12

Un multiplicateur de tension utilise des colonnes de condensateurs associés, entre lesquels on relie en zigzag des composants, appelés *diodes*, ne laissant passer les charges que dans un sens (voir la section 11.8 du tome 3). Les condensateurs ne sont donc ni en série, ni en parallèle. À partir d'une relativement faible différence de potentiel, ce montage charge l'un après l'autre tous les condensateurs, en évitant le plus possible qu'ils ne se déchargent. Les différences de potentiel des condensateurs d'une même colonne s'additionnent alors pour donner un total impressionnant. (*a*) Petit multiplicateur, comme ceux utilisés dans les vieux téléviseurs ou canons à rayons X, pouvant produire 25 kV. (*b*) Modèle géant, utilisé dans un accélérateur de particules de Los Alamos, pouvant produire plus d'un million de volts. Dans ce contexte, on l'appelle «générateur de Cockcroft-Walton». Les condensateurs sont les paires d'armatures en acier séparées par un segment de la tige verticale noire isolante, deux condensateurs successifs ayant une électrode commune; les diodes sont les segments en diagonale.

* Ce résultat peut être obtenu grâce à la loi des nœuds de Kirchhoff (voir le chapitre 7): pendant que les condensateurs se font charger, le courant que débite la pile correspond à la somme des courants qui atteignent les condensateurs. Par conséquent, la charge totale Q qui quitte la pile, celle qui s'accumulerait sur le condensateur équivalent, correspond à la somme des charges accumulées sur les armatures de droite des condensateurs, soit $Q_1 + Q_2$. De même, le résultat $\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$ découle directement de la loi des mailles de Kirchhoff.

Méthode de résolution

Analyse d'un circuit équivalent

Dans toutes les situations où on doit analyser un circuit, on réalise les étapes suivantes :

1. Redessiner le circuit en tentant, dans la mesure du possible, de placer tous les éléments du circuit dans le même sens, à l'horizontale ou à la verticale. Il devient alors plus facile de reconnaître quels éléments sont en série ou en parallèle. Pour y arriver, on peut déplacer à volonté *le long d'un fil* tout embranchement où commence un autre fil.

2. Simplifier le problème en réduisant le plus possible le nombre d'éléments en série ou en parallèle. Souvent, le mieux est de commencer par la plus petite association en série ou en parallèle, puis de tracer une succession de circuits équivalents de plus en plus simples. Dessiner chaque circuit intermédiaire aidera à l'étape 4.

3. Quand on a obtenu une capacité équivalente unique, on sait que la différence de potentiel à ses bornes est identique à celle aux bornes de la pile. On peut donc déterminer la charge totale portée par le condensateur équivalent, $Q = C_{éq}\Delta V$.

4. En partant du circuit final et en revenant vers le circuit initial, trouver les caractéristiques de chaque composant (Q et ΔV dans le cas de condensateurs).

Exemple 5.6

Pour le circuit de la figure 5.13*a* (où $C_1 = 6$ μF, $C_2 = 1$ μF, $C_3 = 3$ μF et $C_4 = 12$ μF), déterminer la charge et la différence de potentiel pour chaque condensateur.

Solution

On suit les étapes de la méthode de résolution. D'abord, on passe du circuit de la figure 5.13*a* à celui de la figure 5.13*b* (qui est le même !) où les types d'associations sont plus évidents.

La deuxième étape consiste à réduire le circuit. Commençons par C_2 et C_3 ; comme ils sont en parallèle, ils sont équivalents à un condensateur de capacité $C_{23} = 4$ μF. Ce condensateur de 4 μF est en série avec C_1 et C_4 (figure 5.13*c*). La capacité équivalente de cet ensemble est donnée par

$$\frac{1}{C_{éq}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$$

d'où on tire $C_{éq} = 2$ μF (figure 5.13*d*).

Troisième étape : le condensateur de la figure 5.13*d* a une tension identique à celle de la pile, donc il porte la charge $Q = C_{éq}\Delta V = (2\ \mu\text{F})(48\ \text{V}) = 96\ \mu\text{C}$.

L'étape 4 consiste à « remonter » de la figure 5.13*d* à la figure 5.13*b* pour trouver les grandeurs demandées. Comme le condensateur équivalent remplace trois condensateurs en série, ceux-ci portent la même charge

$$Q_1 = Q_{23} = Q_4 = 96\ \mu\text{C}$$

On trouve les trois différences de potentiel à la figure 5.13*c* en appliquant l'équation 5.1. Par exemple,

$$\Delta V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{96\ \mu\text{C}}{6\ \mu\text{F}} = 16\ \text{V}$$

Par la même méthode, on trouve $\Delta V_{23} = 24$ V et $\Delta V_4 = 8$ V. On vérifie que $\Delta V_1 + \Delta V_{23} + \Delta V_4 = 48$ V.

Enfin, le condensateur C_{23} remplaçait deux condensateurs en parallèle, qui ont donc à leurs bornes la même différence de potentiel :

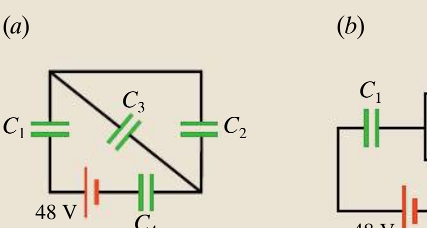
$$\Delta V_2 = \Delta V_3 = \Delta V_{23} = 24\ \text{V}$$

On trouve la charge sur ces condensateurs à l'aide de l'équation 5.1 :

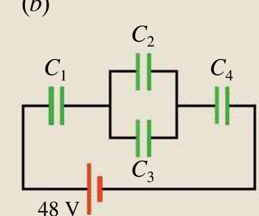
$$Q_2 = C_2\Delta V_2 = (1\ \mu\text{F})(24\ \text{V}) = 24\ \mu\text{C}$$
$$Q_3 = C_3\Delta V_3 = (3\ \mu\text{F})(24\ \text{V})$$

On vérifie que $Q_2 + Q_3 = Q_{23} = 96$ μC.

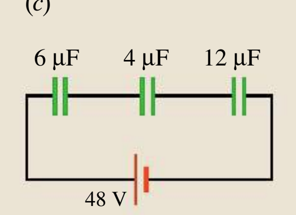
(*a*)



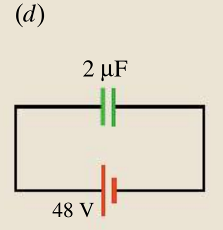
(*b*)



(*c*)



(*d*)



▲ **Figure 5.13**

Lorsqu'on calcule la capacité équivalente de plusieurs condensateurs, on peut diviser le problème en plusieurs étapes intermédiaires.

Exemple 5.7

Étant donné deux condensateurs tels que $C_2 = 2C_1$, comparer les charges et les différences de potentiel lorsqu'ils sont reliés (a) en série ; (b) en parallèle.

Solution

(a) Dans une association en série, les charges sont les mêmes. De $\Delta V = Q/C$, on déduit que $\Delta V_2 = 0{,}5\Delta V_1$.

(b) Dans une association en parallèle, $\Delta V_1 = \Delta V_2$. Puisque $Q = C\Delta V$, il s'ensuit que $Q_2 = 2Q_1$.

5.3 L'ÉNERGIE EMMAGASINÉE DANS UN CONDENSATEUR

Calculons d'abord le travail extérieur qui doit être fourni, par exemple par une pile, pour charger un condensateur de capacité C donnée. Considérons un instant t donné *pendant* que le condensateur se fait charger. Les armatures portent alors les charges $+q$ et $-q$, où q est une valeur intermédiaire entre 0 et Q, la charge finale. À cet instant, la différence de potentiel entre les armatures est q/C, une valeur intermédiaire entre 0 et $\Delta V = Q/C$, la différence de potentiel finale. Considérons qu'il s'écoule un délai infinitésimal $\mathrm{d}t$ et qu'on arrive à un deuxième instant, $t + \mathrm{d}t$. Au cours de ce délai, on a fait passer une charge infinitésimale $\mathrm{d}q$ de l'armature négative à l'armature positive, de sorte que la charge du condensateur est devenue $q + \mathrm{d}q$. Le passage de $\mathrm{d}q$ au travers de la différence de potentiel q/C requiert le travail extérieur $\mathrm{d}W_{\text{ext}} = (q/C)\mathrm{d}q$ (la charge $\mathrm{d}q$ circule dans les fils et non dans l'espace entre les armatures, mais elle traverse la même différence de potentiel). Le travail total fourni pour faire passer toute la charge Q est donc

$$W_{\text{ext}} = \int \mathrm{d}W_{\text{ext}} = \int_0^Q \frac{q}{C}\,\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{2C}$$

Que devient ce travail ? Selon le principe de conservation de l'énergie appliquée à la charge du système, $\Delta K + \Delta U_E = W_{\text{ext}}$. Puisque la charge est immobile au début et à la fin, on a $\Delta K = 0$. On comprend donc que tout le travail extérieur devient un gain d'énergie potentielle ΔU_E, accumulée dans le condensateur. On peut facilement réaliser que les charges Q et $-Q$ portées par les armatures ont plus d'énergie potentielle si elles sont séparées et face à face que si on les laissait se rejoindre.

Si on choisit la référence $U_E = 0$ quand le condensateur est vide, alors $U_E = Q^2/2C$. Si on tient compte que $Q = C\Delta V$, ce résultat peut s'écrire de trois façons :

Énergie emmagasinée dans un condensateur

$$U_E = \frac{Q^2}{2C} = \tfrac{1}{2}Q\Delta V = \tfrac{1}{2}C\Delta V^2 \qquad (5.9)$$

Il ne faut pas comparer cette équation à $U_E = qV$, qui s'applique pour calculer l'énergie de *chaque* charge cible $\mathrm{d}q$ quand celle-ci est déplacée dans le potentiel créé par les charges sources déjà accumulées. L'équation 5.9 donne plutôt l'énergie totale accumulée par tous les $\mathrm{d}q$, lesquels ont traversé des différences de potentiel de plus en plus grandes. Elle se compare davantage à l'équation 4.16, puisqu'elle donne l'énergie potentielle du *système* de charges (sur les deux plaques).

Quand le contexte est clair, on pourra laisser tomber l'indice E à l'équation 5.9 pour simplifier la notation. Dans d'autres contextes, on pourra le remplacer par l'indice C (pour condensateur) ou par un indice numérique afin de distinguer plusieurs condensateurs ou de distinguer l'énergie d'un condensateur de celle présente ailleurs.

Exemple 5.8

Un défibrillateur cardiaque contient l'équivalent d'un condensateur de 75 µF, qu'on charge jusqu'à une différence de potentiel de 3500 V. Si on décharge ce dispositif en 4 ms, quelle puissance moyenne est fournie au cœur pendant la décharge ? Supposer 60 % de pertes.

Solution

La puissance est l'énergie fournie par unité de temps. Le condensateur chargé contient

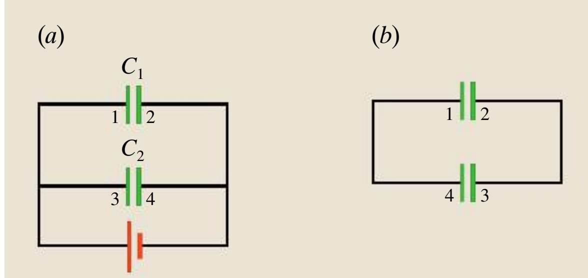
$$U_E = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2}(75 \times 10^{-6}\ \text{F})(3500\ \text{V})^2 = 459\ \text{J}$$

Puisque 40 % de cette énergie est fournie au cœur en 4 ms, la puissance moyenne fournie est

$$P = (0{,}40U_E)/\Delta t = 4{,}59 \times 10^4\ \text{W}$$

Exemple 5.9

Deux condensateurs, C_1 = 5 µF et C_2 = 3 µF, sont initialement reliés tous deux à une même pile de 12 V (figure 5.14*a*). On les déconnecte pour les reconnecter comme sur la figure 5.14*b*. Noter attentivement les numéros des armatures. Déterminer les charges, les différences de potentiel et les énergies emmagasinées (a) pour la première configuration et (b) pour la deuxième configuration.



▲ **Figure 5.14**

(*a*) On charge deux condensateurs en les plaçant en parallèle. (*b*) On enlève la pile du circuit et on rétablit la connexion entre les armatures en inversant les polarités.

Solution

(a) Puisque les deux armatures de l'un ou l'autre des condensateurs sont respectivement reliées aux deux bornes de la pile,

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = 12\ \text{V}$$

Par conséquent, Q_1 = 60 µC et Q_2 = 36 µC. Les énergies initiales sont

$$U_1 = \frac{1}{2}Q_1\Delta V_1 = \frac{1}{2}(60\ \mu\text{C})(12\ \text{V}) = 360\ \mu\text{J}$$

$$U_2 = \frac{1}{2}Q_2\Delta V_2 = \frac{1}{2}(36\ \mu\text{C})(12\ \text{V}) = 216\ \mu\text{J}$$

(b) Lorsqu'on relie l'armature 1 (de charge 60 µC) et l'armature 4 (de charge –36 µC), on forme un conducteur unique qui porte la charge totale (60 µC) + (–36 µC) = 24 µC. De même, le conducteur obtenu quand les armatures 2 et 3 sont reliées porte une charge de –24 µC. ■

Si les symboles primes représentent les valeurs correspondant à la deuxième configuration, on a

$$Q_1' + Q_2' = 24\ \mu\text{C} \qquad \text{(i)}$$

Une fois l'équilibre électrostatique atteint, les différences de potentiel aux bornes des condensateurs deviennent identiques, puisque toute différence de potentiel disparaît dans chacun des deux conducteurs composés d'un fil et des deux armatures qu'il relie. Comme $\Delta V_1' = \Delta V_2'$,

$$\frac{Q_1'}{C_1} = \frac{Q_2'}{C_2}$$

Donc,

$$3Q_1' = 5Q_2' \qquad \text{(ii)}$$

La résolution du système d'équations formé par (i) et (ii) donne Q_1' = 15 µC et Q_2' = 9 µC. Les différences de potentiel ($\Delta V = Q/C$) sont $\Delta V_1' = \Delta V_2'$ = 3 V. Les énergies finales sont $U_1' = \frac{1}{2}Q_1'\Delta V_1'$ = 22,5 µJ et $U_1' = \frac{1}{2}Q_2'\Delta V_2'$ = 13,5 µJ.

L'énergie totale initiale U = 576 µJ est beaucoup plus importante que l'énergie totale finale U' = 36 µJ. La différence s'explique de deux manières. Premièrement, nous verrons au chapitre 6 qu'il y a des pertes thermiques dans les fils : la charge « tombe » vers le potentiel le plus bas, mais ne le fait pas librement en conservant son énergie. Ces pertes sont importantes même quand la résistance des fils est négligeable*. Deuxièmement, la charge rejoint sa valeur finale en oscillant entre les armatures des condensateurs, comme l'eau dans un tube en U. Nous verrons au chapitre 13 que toute charge qui oscille produit un rayonnement électromagnétique, comme la lumière ou les ondes radio. Une partie de l'énergie quitte donc le système par rayonnement.

* Si la résistance diminue, le courant augmente, si bien qu'on peut montrer que la puissance dissipée reste la même (voir l'exemple 7.20).

5.4 LA DENSITÉ D'ÉNERGIE DU CHAMP ÉLECTRIQUE

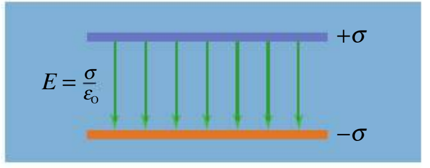


Figure 5.15
L'énergie dans un condensateur peut être exprimée en fonction du champ électrique. La densité d'énergie est $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$. D'après cette équation, on peut conclure que l'énergie est emmagasinée dans le champ électrique lui-même.

Jusqu'à présent, nous avons calculé l'énergie potentielle d'un système de charges en fonction de celles-ci et du potentiel qu'elles produisent (équations 4.16 ou 5.9), mais il peut être souhaitable de la calculer aussi en fonction du champ électrique qu'elles produisent. Pour ce faire, considérons un condensateur plan (figure 5.15) pour lequel le calcul est plus simple, le champ étant uniforme. En l'absence de diélectrique, ce condensateur a une capacité $C = \varepsilon_0 A/d$ et le champ qu'il produit est constant et donné par $E = \Delta V/d$. L'énergie y étant emmagasinée peut donc s'écrire

$$U_E = \frac{1}{2}C\Delta V^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)(Ed)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(Ad)$$

Si on divise l'énergie U_E par le volume Ad entre les armatures, où règne le champ électrique, on voit qu'on peut définir une grandeur qui ne dépend *que du champ*, soit l'énergie par unité de volume de champ (J/m^3) ou densité d'énergie :

Densité d'énergie du champ électrique dans le vide

$$u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \qquad (5.10)$$

En utilisant un calcul fondé sur le théorème de Gauss, on peut montrer que l'équation 5.10 est générale : elle s'applique aussi quand le champ n'est pas uniforme et donne alors la densité *locale* d'énergie en fonction du champ électrique *local*. Quand le champ est uniforme, u_E est uniforme et on obtient l'énergie du système simplement en multipliant u_E par le volume occupé par le champ. Quand le champ n'est pas uniforme, il faut subdiviser le volume occupé par le champ en éléments infinitésimaux, multiplier chacun par la densité d'énergie u_E qui lui correspond, puis intégrer, comme le montre l'exemple 5.11.

Quel sens physique faut-il accorder à l'équation 5.10 ? L'équation 5.9 laisse entendre que l'énergie est stockée dans le système de charges, mais selon l'équation 5.10, on pourrait conclure que l'énergie est stockée dans le champ électrique lui-même. Du point de vue mathématique, ces deux approches sont équivalentes, mais laquelle doit être interprétée comme ayant un sens physique ?

Les phénomènes qui permettent de trancher la question sont ceux où les deux approches ne sont *pas* équivalentes : comme nous le verrons au chapitre 13, les équations de Maxwell prédisent que les champs électrique et magnétique, si leurs valeurs oscillent dans le temps, peuvent former une onde électromagnétique capable de voyager dans le vide à la vitesse de la lumière. L'expérience montre que ces ondes transportent avec elle de l'énergie, *même si les charges sources sont très éloignées*. Par exemple, nous recevons de l'énergie qui provient du Soleil sous forme de lumière, malgré les milliards de kilomètres de vide qui séparent la Terre des charges sources situées sur le Soleil. On est forcé de conclure que

ce sont les champs qui emmagasinent l'énergie, puisque cette énergie, tout comme les champs, se manifeste *en l'absence de toute charge source* située à proximité.

Selon cette nouvelle interprétation, quand on assemble un système de charges, l'augmentation d'énergie potentielle est liée au changement subi par le champ électrique résultant. Par exemple, quand on charge un condensateur plan, le travail effectué permet d'augmenter le champ électrique entre les armatures. De même, quand on approche l'une de l'autre deux charges positives, le travail effectué permet d'augmenter le champ électrique résultant dans l'espace environnant. Inversement, lorsqu'on libère les charges, elles s'éloignent l'une de l'autre, et leur gain d'énergie cinétique doit être interprété comme le résultat d'une diminution de l'énergie potentielle emmagasinée dans le champ.

Exemple 5.10

Le module du champ électrique *disruptif*, sous lequel l'air sec perd ses propriétés isolantes et laisse survenir une décharge, est d'environ 3×10^6 V/m. Quelle est la densité d'énergie correspondant à cette valeur du champ ?

Solution

D'après l'équation 5.10, la densité d'énergie pour cette valeur critique du champ est

$$u_E = \tfrac{1}{2}(8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N{\cdot}m^2})(3 \times 10^6\ \mathrm{V/m})^2 = 39{,}8\ \mathrm{J/m^3}$$

Puisque cette valeur est associée au module du champ disruptif, elle représente également la densité d'énergie maximale qui peut être atteinte avec un champ électrique dans l'air. ■

Exemple 5.11

(a) Utiliser l'équation 5.10 pour déterminer l'énergie potentielle d'une sphère métallique de rayon R portant la charge Q positive. Comparer votre résultat à celui de l'exemple 4.21. (b) Montrer que l'équation 5.9 mène directement au même résultat.

Solution

(a) En appliquant le théorème de Gauss ou en intégrant la distribution de charge, on obtient un champ nul dans la sphère et, à l'extérieur, un champ identique à celui que produirait une charge ponctuelle Q située au centre, soit

$$E = \frac{kQ}{r^2} \quad (r > R)$$

On subdivise le volume qui contient le champ en coquilles sphériques concentriques d'épaisseur infinitésimale. La coquille située entre les rayons r et $r + \mathrm{d}r$ a le volume $4\pi r^2\,\mathrm{d}r$ (figure 5.16). L'énergie du champ électrique à l'intérieur de cette coquille est

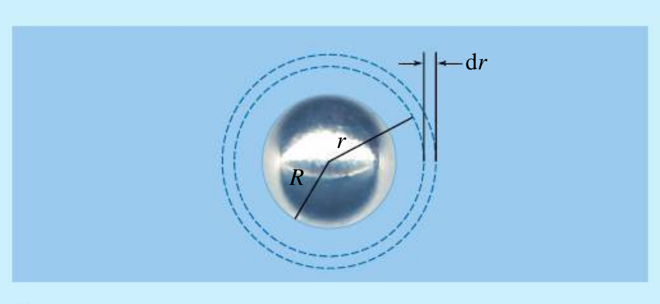
$$\begin{aligned}\mathrm{d}U_E &= u_E(4\pi r^2\,\mathrm{d}r)\\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{kQ}{r^2}\right)^2(4\pi r^2\,\mathrm{d}r)\\ &= \frac{kQ^2}{2r^2}\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

où nous avons utilisé $k = 1/4\pi\varepsilon_0$. Dans tout l'espace entourant la sphère, l'énergie potentielle totale est

$$U_E = \frac{kQ^2}{2}\int_R^\infty r^{-2}\,\mathrm{d}r = \frac{kQ^2}{2R}$$

C'est le même résultat qu'à l'exemple 4.21.

(b) D'après l'équation 5.5, on sait que pour une sphère isolée, $C = 4\pi\varepsilon_0 R = R/k$. En substituant dans l'équation 5.9, on obtient $U_E = Q^2/2C = kQ^2/2R$.



▲ **Figure 5.16**
Pour calculer l'énergie emmagasinée dans le champ électrique à l'extérieur d'une sphère métallique chargée, on détermine d'abord l'énergie dans une coquille de rayon r et d'épaisseur dr.

5.5 LES CONDENSATEURS CONTENANT UN DIÉLECTRIQUE

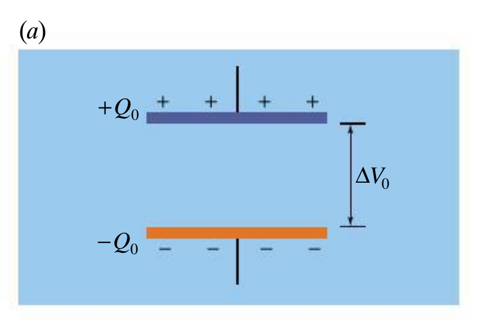
Lorsqu'on introduit entre les armatures d'un condensateur un matériau non conducteur tel que du verre, du papier ou du plastique, la capacité du condensateur augmente. Michael Faraday fut le premier à observer cet effet et donna le nom de **diélectrique** à ces matériaux. Un bon diélectrique est un matériau isolant qui est *facile à polariser* (voir la section 2.7). Deux expériences simples permettent de mesurer les effets d'un diélectrique sur la capacité d'un condensateur. Dans cette section, nous ne ferons que décrire ces expériences, et dans la section suivante, nous expliquerons l'effet du diélectrique en ayant recours au concept de polarisation.

(i) En l'absence de pile

La figure 5.17*a* représente un condensateur de charge Q_0 et dont la différence de potentiel entre les armatures est ΔV_0. La capacité initiale du condensateur lorsqu'on fait le vide entre les armatures est $C_0 = Q_0/\Delta V_0$. Lorsqu'on introduit un diélectrique de manière à remplir complètement l'espace entre les armatures (figure 5.17*b*), on observe que la différence de potentiel entre les armatures diminue d'un facteur κ, appelé **constante diélectrique**:

$$\Delta V_D = \frac{\Delta V_0}{\kappa} \qquad (5.11)$$

(*a*)



(*b*)

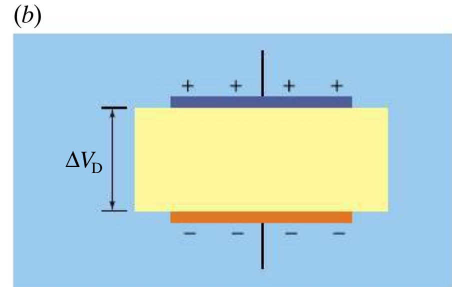


Figure 5.17
(*a*) Deux armatures portent des charges de même grandeur et de signes opposés $\pm Q_0$ et ont entre elles une différence de potentiel ΔV_0. (*b*) Lorsque l'espace entre les armatures est complètement rempli de diélectrique, la différence de potentiel diminue et devient $\Delta V_D = \Delta V_0/\kappa$, où κ est la constante diélectrique.

Tableau 5.1
Constantes et rigidités diélectriques

Matériau	Constante diélectrique (κ)	Rigidité diélectrique (10^6 V/m)
Air	1,000 59	3
Papier	3,7	16
Verre	4 – 6	9
Paraffine	2,3	11
Caoutchouc	2 – 3,5	30
Mica	6	150
Eau	80	–

Rappelons que la constante diélectrique ne dépend que de la nature du matériau diélectrique (et non de la charge portée par le condensateur) et qu'elle est supérieure à 1 pour tous les matériaux. Le tableau 5.1 donne les valeurs de κ pour certains matériaux usuels, mais certains matériaux spécialisés sont connus pour leur constante diélectrique extrêmement grande, comme le titanate de strontium ($SrTiO_3$; $\kappa = 310$), le titanate de calcium et de cuivre ($CaCu_3Ti_4O_{12}$; $\kappa \approx 12\,000$), etc. Quant aux membranes des cellules vivantes, leur constante diélectrique se situe le plus souvent entre 3 et 7.

D'après la relation $\Delta V = Ed$, on déduit que le module du champ électrique est divisé par le même facteur:

Champ électrique dans un diélectrique

$$E_D = \frac{E_0}{\kappa} \qquad (5.12)$$

Comme la charge sur chaque armature ne change pas (elle ne peut aller nulle part), la capacité en présence du diélectrique est $C_D = Q_0/\Delta V_D = \kappa C_0$. En somme, la capacité devient plus grande en présence d'un diélectrique.

(ii) Avec pile

Pour le circuit représenté à la figure 5.18*a*, les conditions initiales sont les mêmes que celles du circuit de la figure 5.17*a*, mais une pile va *maintenir* la différence de potentiel ΔV_0 entre les armatures. Lorsqu'on introduit le diélectrique (figure 5.18*b*), on observe que la charge sur les armatures augmente d'un facteur κ pour devenir $Q_D = \kappa Q_0$. En utilisant la relation $C_D = Q_D/\Delta V_0$, on trouve à nouveau $C_D = \kappa C_0$.

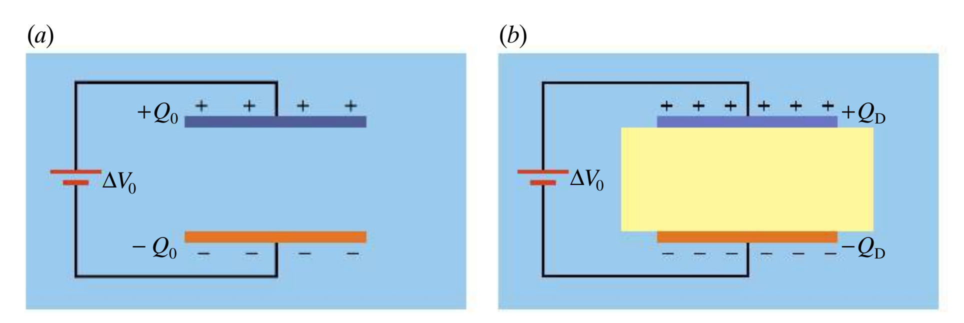


Figure 5.18

(*a*) Cette situation est semblable à celle de la figure 5.17*a*, mais la pile reste maintenant branchée. (*b*) La différence de potentiel ne change pas, mais la charge des armatures augmente et devient égale à $Q_D = \kappa Q_0$.

Dans un cas comme dans l'autre, l'introduction d'un diélectrique a pour effet de multiplier la capacité par un facteur κ :

Capacité en présence d'un diélectrique

$$C_D = \kappa C_0 \tag{5.13}$$



Figure 5.19

Une constante diélectrique élevée permet de construire un condensateur de grande capacité qui a des dimensions raisonnables, comme ceux-ci. Celui de gauche a une capacité de 0,5 F et celui de droite, 20 F. Celui de droite a cependant une tension de claquage très faible (3 V).

Ainsi, en présence d'un diélectrique, les équations 5.3 à 5.6 doivent être modifiées pour ajouter le facteur κ, comme nous l'avons annoncé dans le texte suivant l'équation 5.3. L'utilisation d'un diélectrique permet d'atteindre des capacités de l'ordre du farad.

En plus d'augmenter la capacité correspondant à une géométrie donnée des armatures, l'utilisation d'un diélectrique présente d'autres avantages. Par exemple, une mince feuille de plastique ou une couche d'oxyde permettent aux armatures d'un condensateur plan d'être très rapprochées sans risque de se toucher. Puisque $C \propto 1/d$, on peut ainsi réduire la taille du condensateur permettant d'obtenir une capacité donnée (figure 5.19). L'utilisation d'un diélectrique présente également un avantage lié à sa **rigidité diélectrique**, qui correspond au module maximal du champ électrique pouvant être appliqué au matériau avant que celui-ci ne perde ses propriétés d'isolant et ne soit traversé par une décharge (figure 5.20). Un diélectrique augmente la différence de potentiel critique à laquelle il se produit un *claquage*, c'est-à-dire une décharge entre les armatures. Quand on achète un condensateur, il faut s'assurer de ne pas dépasser la différence de potentiel qu'il est capable de supporter, sinon il faut utiliser une association de condensateurs en série.

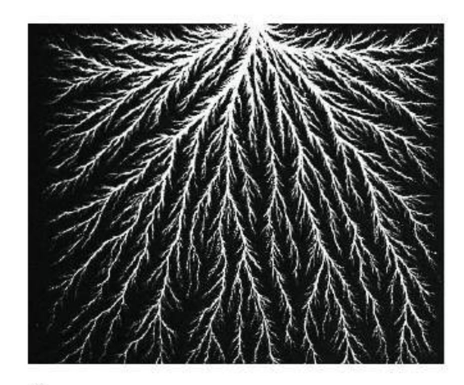
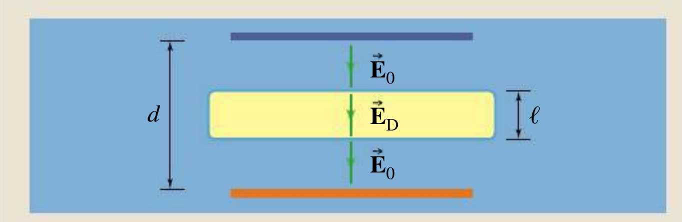


Figure 5.20

Configuration arborescente produite lors du claquage d'un diélectrique, c'est-à-dire lorsqu'il est traversé par une décharge électrique.

Exemple 5.12

On introduit une plaque de diélectrique d'épaisseur ℓ et de constante diélectrique κ dans un condensateur plan dont les armatures, d'aire A, sont séparées par une distance d (figure 5.21). Quelle est la capacité ? Faire le calcul en supposant que la pile est débranchée avant l'introduction du diélectrique.



▲ **Figure 5.21**

Une plaque de diélectrique est introduite entre deux armatures parallèles. Pour calculer la capacité, on doit d'abord calculer la différence de potentiel entre les armatures.

Solution

La pile étant débranchée, les charges $\pm Q$ sur les armatures sont constantes et on doit trouver la différence de potentiel entre les armatures. Les valeurs du champ dans le vide et dans le diélectrique sont

$$E_0 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{A\varepsilon_0}; \quad E_D = \frac{E_0}{\kappa}$$

La différence de potentiel est, pour les espaces vides, $\Delta V_0 = E_0(d - \ell)$, et, pour l'espace rempli de diélectrique, $\Delta V_D = E_D\,\ell = \sigma\ell/(\kappa\varepsilon_0)$. La différence de potentiel entre les armatures est donc

$$\Delta V = \Delta V_0 + \Delta V_D = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[(d - \ell) + \frac{\ell}{\kappa}\right] = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}[d + \ell(1/\kappa - 1)]$$

La capacité est égale à $C = Q/\Delta V = \sigma A/\Delta V$, ce qui donne

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d + \ell(1/\kappa - 1)} \qquad \text{(i)}$$

On remarque que $C = \varepsilon_0 A/d$ lorsque $\kappa = 1$, ce qui correspond à l'équation 5.3. De même, $C = \varepsilon_0 A/\kappa d$ lorsque $\ell = d$.

On peut aussi résoudre ce problème en considérant le condensateur comme une association de deux condensateurs en série : un condensateur sans diélectrique d'épaisseur $d - \ell$ et un condensateur avec diélectrique d'épaisseur ℓ. Les capacités de ces condensateurs valent respectivement $C_1 = \varepsilon_0 A/(d - \ell)$ et $C_2 = \kappa\varepsilon_0 A/\ell$. Par l'équation 5.7, $C = (1/C_1 + 1/C_2)^{-1}$; après quelques calculs, on retrouve l'équation (i) (vérifiez-le). ■

Exemple 5.13

En biologie, la portion centrale d'une membrane cellulaire peut être considérée comme un diélectrique ($\kappa = 5$) d'épaisseur 4,5 nm, inséré entre deux milieux aqueux conducteurs où se trouvent des ions en solution. Quelle est la *capacité surfacique* de la membrane (capacité par unité de surface) ?

Solution

Comme l'épaisseur de la membrane est négligeable comparativement à la taille d'une cellule (de l'ordre de 10^{-5} m), on peut la considérer comme un condensateur plan. Sa capacité est donc donnée par $C = \kappa\varepsilon_0 A/d$ (équation 5.3), de sorte que la capacité surfacique $c = C/A$ est

$$c = \frac{\kappa\varepsilon_0}{d} \approx \frac{(5)(8{,}85 \times 10^{-12}\ \text{F/m})}{(4{,}5 \times 10^{-9}\ \text{m})} = 9{,}8 \times 10^{-3}\ \text{F/m}^2 = 0{,}98\ \mu\text{F/cm}^2$$

Ce résultat correspond à l'ordre de grandeur ($c \approx 1\ \mu\text{F/cm}^2$) de mesures directes réalisées grâce à la technique du *patch-clamp*, dont il sera question dans le sujet connexe à la fin de ce chapitre. Cette capacité permet à une fine couche chargée de s'accumuler de part et d'autre de la membrane, laquelle est au cœur de dizaines de processus cellulaires (voir le sujet connexe). ■

Notons que, les cellules ayant une surface bien inférieure à 1 cm² (sauf exception), la capacité de leur membrane est en général bien inférieure à 1 μF.

5.6 LA DESCRIPTION ATOMIQUE DES DIÉLECTRIQUES

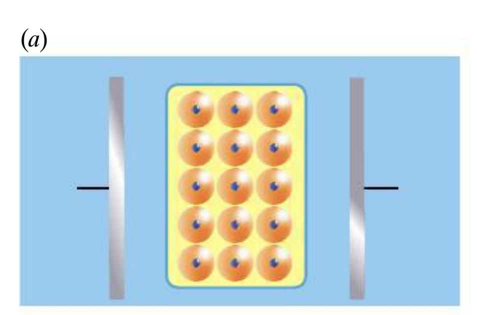
Le gain de capacité qu'on mesure lors de l'insertion d'un diélectrique dans un condensateur signifie que, pour une charge donnée sur les armatures, la différence de potentiel et le champ électrique correspondant sont plus faibles. Or, nous avons vu* à la section 2.7 que la *polarisation* d'un matériau placé dans un

* Il n'est pas nécessaire d'avoir lu la section 2.7 pour lire cette section, les notions requises étant récapitulées.

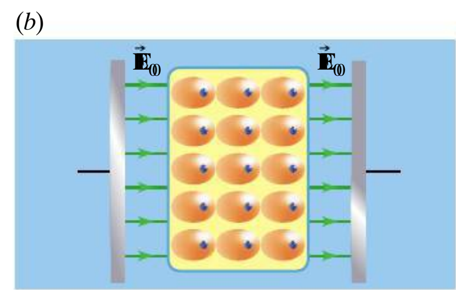
champ électrique externe a pour effet de réduire le champ électrique résultant dans le matériau. Nous allons maintenant voir que c'est effectivement ce phénomène qui est à l'origine de la plus grande capacité d'un condensateur en présence d'un diélectrique.

Rappelons d'abord en quoi consiste la **polarisation** dans un diélectrique *non polaire*. Dans un condensateur déchargé, le diélectrique n'est la source d'aucun champ, car dans chacun de ses atomes, le centre du nuage d'électrons coïncide avec la position du noyau (figure 5.22*a*). Quand on charge le condensateur, le diélectrique est plongé dans le champ électrique produit par les charges situées sur les armatures. Ce champ déplace les charges positives et négatives de chaque atome en des sens opposés (voir la figure 2.45, p. 68), ce qui *induit* une multitude de petits dipôles *temporaires* (figure 5.22*b*). Chacun de ces dipôles devient une source de champ électrique, en plus des charges sources situées sur les armatures. On peut représenter le diélectrique *polarisé* comme une multitude de dipôles tous alignés (figure 5.22*c*).

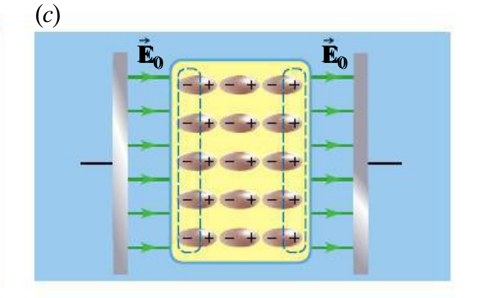
(*a*)



(*b*)



(*c*)



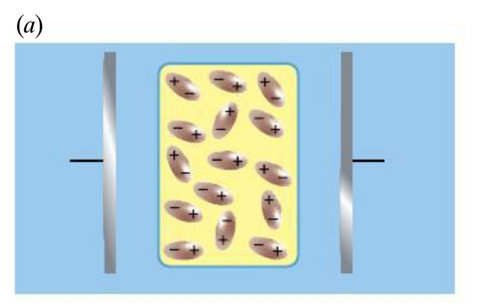
▲ **Figure 5.22**

(*a*) Chaque atome d'un diélectrique non polaire ne produit normalement aucun champ. (*b*) Un champ extérieur polarise les atomes. (c) Le diélectrique entier peut être vu comme une multitude de dipôles tous alignés.

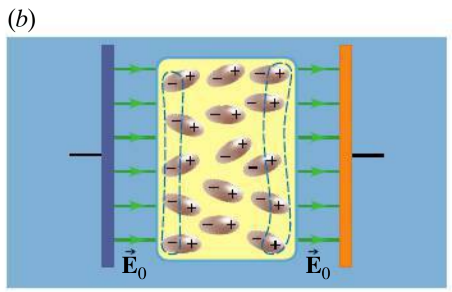
Considérons maintenant un diélectrique *polaire*, par exemple de l'eau. Dans un condensateur déchargé, chaque molécule du diélectrique comporte un moment dipolaire permanent qui produit un champ électrique, mais ces dipôles sont désordonnés, de sorte qu'ils produisent un champ résultant nul (figure 5.23*a*). Quand on charge le condensateur, le champ électrique produit par les armatures exerce un moment de force sur chaque molécule, lequel a tendance à aligner les moments dipolaires permanents. (Il se produit, en plus, l'apparition de dipôles induits comme dans un diélectrique non polaire, mais ces dipôles sont plus faibles que les dipôles permanents.) Bien que l'alignement des dipôles permanents ne soit pas parfait à cause de l'agitation thermique, on peut à nouveau se représenter le diélectrique polarisé comme une multitude de dipôles assez bien alignés (figure 5.23*b*). En somme, que le diélectrique soit polaire ou non, le résultat est qualitativement le même : un alignement de nombreux dipôles.

Ces nombreux dipôles sont la source d'un champ électrique (voir la section 2.6) et, comme ils sont tous alignés, le champ qu'ils produisent se renforce et devient non négligeable. On peut montrer mathématiquement que le champ produit par l'ensemble des dipôles est égal au champ que produisent les seules charges de surface apparentes encerclées en pointillés à la figure 5.22*c* et à la figure 5.23*b*. Ces charges de surface, appelées *charges liées* ou *charges de polarisation*, sont

(*a*)



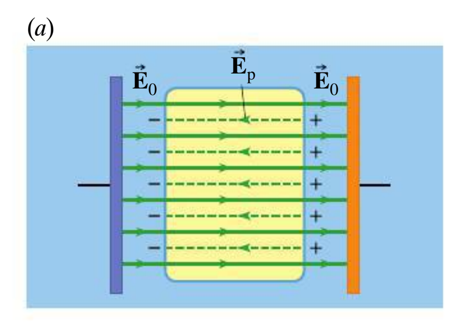
(*b*)



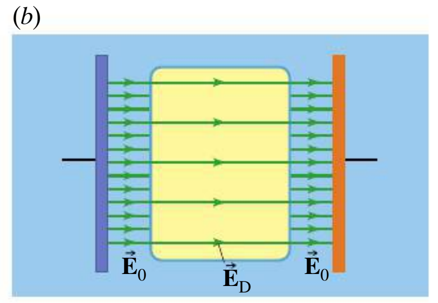
◀ **Figure 5.23**

(*a*) Normalement, les dipôles présents dans une substance polaire sont orientés au hasard. (*b*) Un champ extérieur a tendance à aligner les dipôles.

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 5.24**

(*a*) Le champ électrique de polarisation $\vec{\mathbf{E}}_p$ créé par les charges superficielles apparentes du diélectrique est opposé au champ extérieur $\vec{\mathbf{E}}_0$. (*b*) Le module du champ résultant à l'intérieur du diélectrique est $E_D = E_0 - E_p$.

d'autant plus grandes que le matériau est fortement polarisé. Autrement dit, la polarisation du matériau est équivalente à une séparation réelle des charges sur l'épaisseur du matériau. Ces charges liées créent un *champ électrique de polarisation* $\vec{\mathbf{E}}_p$ qui est ici de sens opposé au champ externe $\vec{\mathbf{E}}_0$ (figure 5.24*a*). Dans les géométries simples que nous étudierons, où les surfaces de diélectriques sont perpendiculaires à $\vec{\mathbf{E}}_0$, le champ $\vec{\mathbf{E}}_p$ est proportionnel à $\vec{\mathbf{E}}_0$, si bien que le champ résultant $\vec{\mathbf{E}}_D = \vec{\mathbf{E}}_0 + \vec{\mathbf{E}}_p$ est lui aussi proportionnel à $\vec{\mathbf{E}}_0$. Ainsi, on peut calculer $\vec{\mathbf{E}}_D$ en divisant par un facteur κ le champ $\vec{\mathbf{E}}_0$ produit par les seules charges des armatures (figure 5.24*b*):

$$\vec{\mathbf{E}}_D = \frac{\vec{\mathbf{E}}_0}{\kappa} \tag{5.14}$$

Ce résultat correspond à l'équation 5.12 déduite à partir de mesures macroscopiques. L'équation 5.14 signifie qu'on peut décrire le phénomène *sans avoir à considérer explicitement les dipôles induits comme des charges sources additionnelles*: il suffit de diviser par κ le champ qui serait obtenu sans dipôles induits.

En fonction des modules, on a, en tenant compte des orientations,

$$E_D = E_0 - E_p$$

Cette réduction du champ électrique dans un diélectrique peut être comparée à l'annulation complète du champ électrique dans un conducteur (section 2.3). Dans les deux cas, les charges réagissent au champ extérieur, la seule différence étant que celles d'un conducteur sont libres de se séparer jusqu'à l'annulation complète du champ résultant, alors que les charges d'un diélectrique ne peuvent s'éloigner beaucoup de leur position d'équilibre et ne peuvent donc que *réduire* le champ résultant.

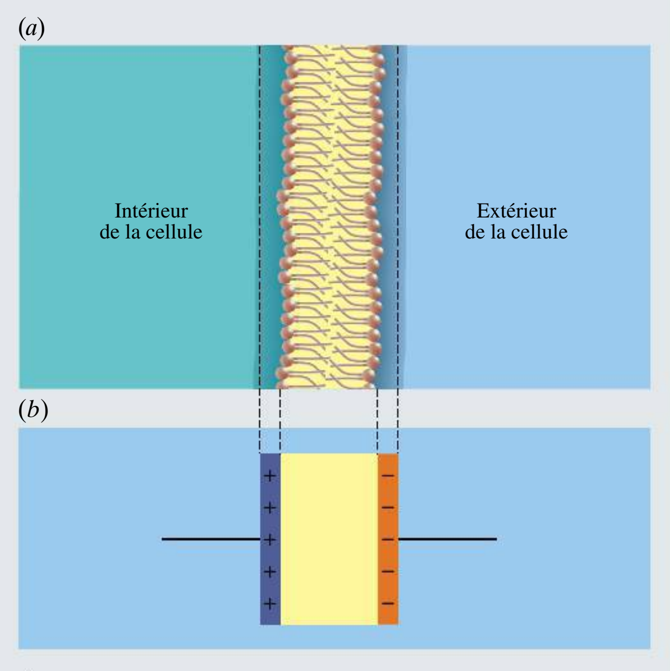
Appliquons ces équations aux expériences de la section précédente: avec ou sans pile, l'introduction d'un diélectrique réduit le champ électrique entre les armatures, dont le module passe de E_0 à E_D. Avec ou sans pile, la différence de potentiel baisse donc d'abord de $E_0 d$ à $E_D d$. En l'absence de pile, la charge Q reste la même et on en déduit que la capacité $C = Q/\Delta V$ est plus grande. Si le condensateur est relié à une pile, celle-ci compense aussitôt la diminution de la différence de potentiel en augmentant la charge portée par les armatures jusqu'à rétablir la différence de potentiel initiale. Cet ajout de charge ne change rien à la capacité, qui a été augmentée dès l'introduction du diélectrique, sauf qu'on peut maintenant la calculer grâce au rapport des valeurs finales de Q et de ΔV.

Nous pouvons maintenant comprendre pourquoi la valeur de la constante diélectrique varie beaucoup d'un matériau à l'autre. D'abord, la densité de molécules (donc de charges à polariser) est déterminante: les gaz ont des facteurs κ beaucoup plus petits que les liquides et les solides. Ensuite, les matériaux faits de molécules polaires ont typiquement une constante diélectrique plus élevée, surtout si leurs molécules sont faciles à réorienter: l'eau, un liquide dont les molécules peuvent tourner aisément, a une plus grande constante diélectrique que le glycérol solide. Mais si on fait fondre le glycérol, sa constante diélectrique augmente. À la lumière de l'interprétation microscopique que nous venons de présenter, la différence entre un isolant et un diélectrique est plus évidente: un bon isolant ne conduit pas le courant, ce qui signifie qu'il ne contient pas de charges libres, alors qu'un bon diélectrique est un matériau dont les charges liées peuvent se polariser fortement. Un bon diélectrique n'est pas forcément un bon isolant. Par exemple, l'eau est un excellent diélectrique en raison de ses molécules polaires, mais elle est un piètre isolant, voire un conducteur, en raison des ions qui peuvent y être dissous (même de l'eau pure comporte des ions H^+ et OH^-).

SUJET CONNEXE

Les propriétés électriques d'une membrane cellulaire

Tout être vivant est composé de cellules, lesquelles sont délimitées par une membrane gérant les échanges avec l'extérieur. Cette membrane a d'impressionnantes propriétés électriques qui jouent de multiples rôles essentiels à la vie, même dans la plus primitive des cellules. Nous allons voir qu'on trouve, dans cet univers biologique, l'équivalent microscopique de condensateurs, de piles électriques, de résistances et même d'interrupteurs. Surtout, nous décrirons l'un des phénomènes que permet cette machinerie, celui de l'influx nerveux.



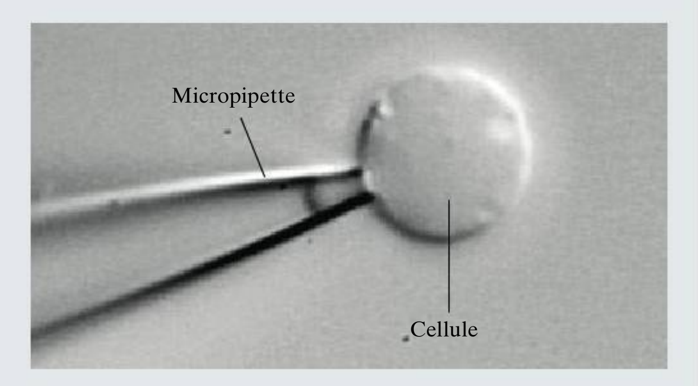
▲ **Figure 5.25**
(*a*) La *bicouche* est le canevas de base d'une membrane cellulaire. (*b*) Elle joue le rôle d'un condensateur.

La membrane-condensateur

À la section 2.6, nous avons vu que le canevas de base d'une membrane cellulaire est une *bicouche* de molécules amphiphiles (figure 5.25*a*). Le cœur de la membrane contient les parties non polaires de ces molécules, alors que chacune des deux faces externes de la bicouche, en contact avec l'eau, est composée des parties polaires.

Cette structure s'apparente à un condensateur (figure 5.25*b*) : l'eau, remplie d'ions en solution et conductrice, joue le rôle des armatures, et le cœur non polaire de la membrane, épais d'environ 4 nm et isolant, joue celui du diélectrique. Une telle membrane a une capacité surfacique $c \approx 1\ \mu\text{F/cm}^2$ (voir l'exemple 5.13). La constante diélectrique de la membrane ($3 < \kappa < 7$) s'approche de celles d'isolants diélectriques comme les hydrocarbures, les huiles végétales ou les cires liquides, dont les molécules sont elles aussi composées surtout de liens C–C et C–H.

Contrairement à un condensateur et à ce qui est illustré à la figure 5.25, une membrane biologique contient des protéines appelées *canaux ioniques* (voir la section 4.5), qu'on peut imaginer comme des tunnels qui, s'ils sont ouverts, permettent à de petits ions de traverser.



▲ **Figure 5.26**
La technique du *patch-clamp* permet de mesurer la différence de potentiel de part et d'autre d'une membrane : en aspirant dans la micropipette, on perfore la membrane. L'intérieur de la cellule se trouve donc en contact avec l'intérieur de la micropipette, où l'une des électrodes du voltmètre est placée. L'autre électrode baigne dans le milieu extracellulaire. Notons que la même technique permet, si on évite de perforer la membrane, de mesurer le courant qui traverse celle-ci.

Dans toute cellule, la « membrane-condensateur » est chargée, le potentiel intérieur de la cellule étant d'environ −65 mV si la référence $V = 0$ est le milieu extérieur. Ce *potentiel de membrane* peut varier de ±30 % d'un type de cellule à l'autre. Pour en mesurer la valeur à l'aide d'un voltmètre, il faut mettre en contact l'une des électrodes avec l'intérieur de la cellule (figure 5.26).

À cette différence de potentiel correspond un champ électrique de module $E = \Delta V/d \approx 1{,}4 \times 10^7$ V/m. Pour produire ce champ considérable (quatre fois le champ disruptif dans l'air), des densités de charge $+\sigma$ et $-\sigma$ doivent s'être accumulées de part et d'autre de la membrane. Selon l'équation $E = \sigma/\varepsilon_0\kappa$ (équation 2.19), on a $\sigma \approx 64{,}0\ \text{nC/cm}^2$. Un champ aussi considérable est produit par cette charge modeste, malgré la polarisation, en raison de l'épaisseur minuscule de la membrane.

Dans un condensateur métallique, les charges sur les armatures sont des surplus ou des déficits d'électrons. Pour une membrane, les charges accumulées sont plutôt



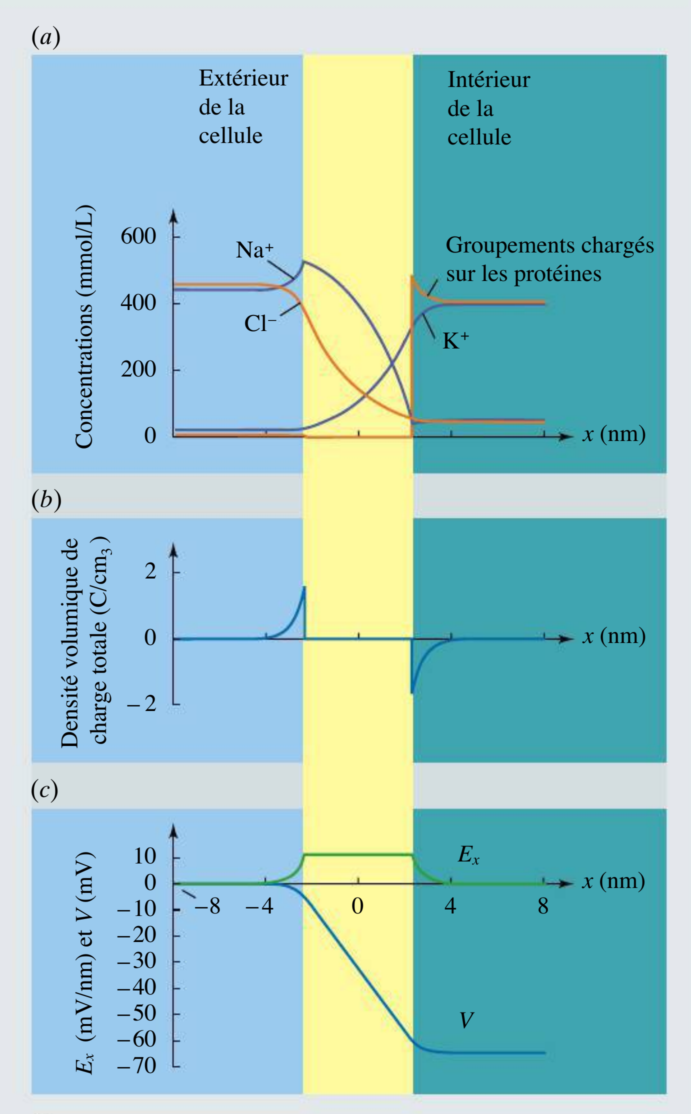
des ions en solution : le milieu extérieur est plus concentré en Na^+ et en Cl^-, et le milieu intérieur, en K^+ et en diverses macromolécules chargées négativement. Les volumes intérieur et extracellulaire *demeurent électriquement neutres*, mais les différences de concentration ioniques qu'on y trouve font en sorte qu'une très mince couche de part et d'autre de la membrane acquiert une charge. Cette couche est représentée par un dégradé de couleur à la figure 5.25*a*.

L'apparition de cette fine couche chargée est due au fait que la membrane est percée de canaux ioniques dont chacun ne laisse passer qu'un type d'ions, tout en étant imperméable aux macromolécules, trop grandes pour traverser. Même si on imagine qu'il n'y a pas de champ électrique initialement, le mouvement thermique aléatoire des ions fait en sorte que chaque espèce ionique tend à diffuser vers le côté où elle est moins concentrée. Le K^+ ayant tendance à quitter la cellule, la face interne de la membrane devient chargée négativement.

La figure 5.27 montre les concentrations stationnaires de part et d'autre de la cellule et dans les canaux ioniques. Notons que le champ électrique s'étend dans une petite zone hors de la membrane, donc qu'il attire les protéines et les ions Na^+ vers la membrane et en repousse les ions Cl^- et K^+. Cela accentue la charge portée par les couches de part et d'autre de la membrane et renforce le champ. La situation illustrée n'est *pas un équilibre*, car chaque espèce ionique continue de s'écouler au travers de la membrane. Il s'agit plutôt d'une situation *stationnaire* : le courant *total* étant nul et la réserve d'ions de chaque côté étant extrêmement grande, la forme des courbes illustrées est constante dans le temps.

Qu'est-ce qui « charge » le condensateur ?

Au début du XXe siècle, la raison pour laquelle les concentrations ioniques sont différentes à l'intérieur et à l'extérieur de la cellule était un mystère. En particulier, le champ électrique *aide* Na^+ à entrer dans la cellule ; il était donc évident que la cellule devait disposer d'un mécanisme, alors inconnu, permettant *au moins* de « pomper » les ions Na^+ à l'extérieur pour compenser leur lente traversée vers l'intérieur. Ce pompage requiert *un travail non conservatif* pour donner aux ions Na^+ l'énergie potentielle électrique qu'ils acquièrent en traversant la membrane. Sur ce plan, le mécanisme cellulaire de pompage est analogue à une pile électrique* dont le rôle est de charger le condensateur-membrane.



▲ **Figure 5.27**

Situation stationnaire qu'on obtient en simulant deux réservoirs infinis séparés par une membrane homogène percée de multiples canaux cylindriques ne laissant passer chacun qu'une espèce ionique lui étant propre. (*a*) Concentration des espèces ioniques dans les canaux et dans les réservoirs. (*b*) Charge correspondant aux ions accumulés. (*c*) Potentiel et composante de champ électrique. Les valeurs numériques présentées sont celles mesurées chez le calmar.

En 1957, le chimiste Jens C. Skou (né en 1918) élucida ce mystère, ce qui lui valut un prix Nobel en 1997. À partir de membranes cellulaires issues de pattes de crabe, il isola une protéine enzymatique qui consomme de l'énergie chimique sous forme de molécules d'adénosine triphosphate (ATP) et dont l'activité augmente en présence d'ions Na^+ et K^+. D'autres expériences ont permis d'établir que cette protéine, souvent appelée *pompe Na/K*, a un fonctionnement cyclique qui lui permet, pour chaque molécule d'ATP consommée, d'extraire trois ions Na^+ de la cellule et d'y faire entrer deux ions K^+.

* Même si la différence de potentiel n'est pas constante, la pompe Na/K joue les deux mêmes rôles qu'une pile : maintenir une différence de potentiel et fournir l'énergie pour « soulever » la charge contre la force du champ électrique associé à cette différence de potentiel.

Le fait que la pompe Na/K fasse sortir de la cellule 1,5 fois plus de charge positive qu'elle n'en fait entrer est le facteur principal expliquant que le potentiel intérieur soit inférieur au potentiel extérieur. Même pour un être humain au repos, près du quart de l'énergie tirée de l'alimentation sert uniquement à faire fonctionner les pompes Na/K de toutes ses cellules. Cela révèle l'importance et l'omniprésence de ce processus.

Le potentiel de membrane peut se faire modifier

Toutes les cellules, même les primitives bactéries possèdent des pompes Na/K, donc une différence de potentiel de part et d'autre de leur membrane. Même s'il demeure constant, ce qui est le cas dans bien des cellules, le potentiel de membrane joue de nombreux rôles : il guide dans le bon sens les parties chargées de macromolécules qui traversent la membrane, il permet de stocker de l'énergie pouvant être utilisée à d'autres fins (voir l'exemple 4.6), etc. Mais on connaît aussi des mécanismes qui permettent de modifier le potentiel de membrane et d'autres qui sont déclenchés quand ce potentiel est modifié.

Pour modifier le potentiel de membrane, le plus simple est de décharger partiellement la « membrane-condensateur ». Cela requiert de relier ses deux « armatures » par un passage conducteur temporaire. Or, nous avons déjà mentionné ci-dessus l'existence d'un tel passage conducteur : les canaux ioniques. Les cellules dont le potentiel de membrane peut être modifié comportent un très grand nombre de canaux ioniques, mais la grande majorité d'entre eux sont normalement fermés, de sorte que la membrane n'est pas différente de celle de la figure 5.27. Toutefois, divers facteurs peuvent augmenter leur probabilité d'ouverture et engendrer un changement soudain du potentiel de membrane.

En effet, comme toutes les protéines, les canaux adoptent une conformation, c'est-à-dire une forme tridimensionnelle, qui minimise leur énergie (voir le sujet connexe de la section 1.5). Si un facteur modifie l'énergie potentielle de la protéine, il peut causer un changement de conformation qui fait en sorte qu'un canal qui était « fermé » se retrouve « ouvert ».

Chez les *canaux mécanosensibles*, ce facteur est l'étirement mécanique de la membrane. Ce type de canal est notamment à la base de notre sens du toucher : lors du contact d'un objet contre la peau, les membranes des cellules de la peau sont étirées et de nombreux canaux mécanosensibles s'ouvrent. Cela crée un passage conducteur temporaire au travers de la membrane, lequel décharge la fine couche chargée située de part et d'autre.

D'autres canaux s'ouvrent lorsqu'une molécule spécifique appelée *ligand* s'attache à un *récepteur* faisant face à l'extérieur de la cellule. De nombreux médicaments et drogues, dont l'alcool, agissent en imitant suffisamment de tels ligands pour se lier aux récepteurs à leur place.

Chez les *canaux tensiodépendants*, (figure 5.28), c'est le potentiel de membrane qui détermine la probabilité d'ouverture. (Le préfixe *tensio* utilisé dans leur nom désigne en effet une tension électrique et non une tension mécanique.) Quand le potentiel intérieur a sa valeur normale de −65 mV, les canaux tensiodépendants sont presque tous fermés. Mais la probabilité d'ouverture atteint 50 % quand le potentiel de membrane augmente jusqu'à une valeur de l'ordre de −25 mV.

Chaque canal, indépendamment de ce qui déclenche son ouverture, permet plus facilement le passage de certains ions plus que d'autres. Par exemple, le canal tensiodépendant illustré à la figure 5.28 est 50 fois plus difficile à traverser pour un ion Na^+ que pour un ion K^+ (voir l'exemple 4.15). En première approximation, on peut considérer que ce type de canal n'est perméable qu'au K^+. D'autres canaux tensiodépendants ne sont perméables qu'au Na^+.

En comparant les trois types de canaux que nous avons présentés, on déduit que l'ouverture de canaux mécanosensibles ou de canaux ligand-dépendants peut augmenter le potentiel de membrane et que, à son tour, cette augmentation peut causer l'ouverture de canaux tensiodépendants. Cette réaction en chaîne est à la base du *potentiel d'action*. Nous verrons que l'influx nerveux consiste en un potentiel d'action qui se propage le long d'une membrane.

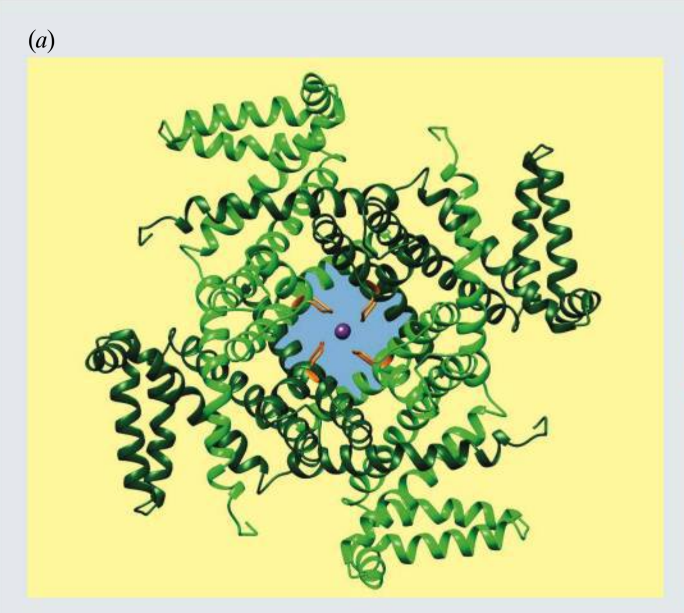
Le potentiel d'action local

Nous allons maintenant décrire en quoi consiste un potentiel d'action. Pour ce faire, considérons tout d'abord une portion de membrane assez petite pour qu'on puisse considérer que son potentiel de membrane, même s'il varie avec le temps, est uniforme dans l'espace. Dans ce contexte, ce qu'on appelle *potentiel d'action* est un événement au cours duquel le potentiel de membrane inverse momentanément son signe et revient ensuite à la normale.

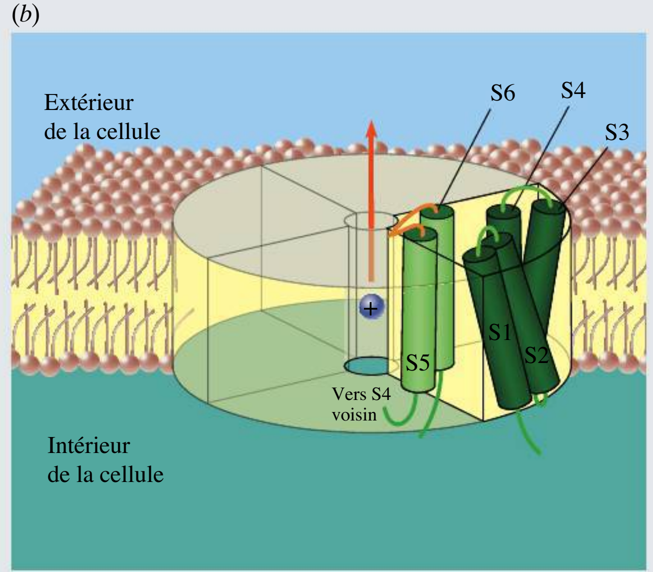
Pour simplifier le problème, on considère que la portion de membrane ne contient que deux types de canaux tensiodépendants, l'un perméable au K^+, et l'autre, au Na^+. Les canaux à K^+ n'ont que deux états possibles : ouvert ou fermé. Quand le potentiel de membrane augmente, leur probabilité d'ouverture augmente, mais ce changement nécessite un « long » délai de l'ordre de 10 ms. Les canaux à Na^+ réagissent de la même façon, mais



(*a*)



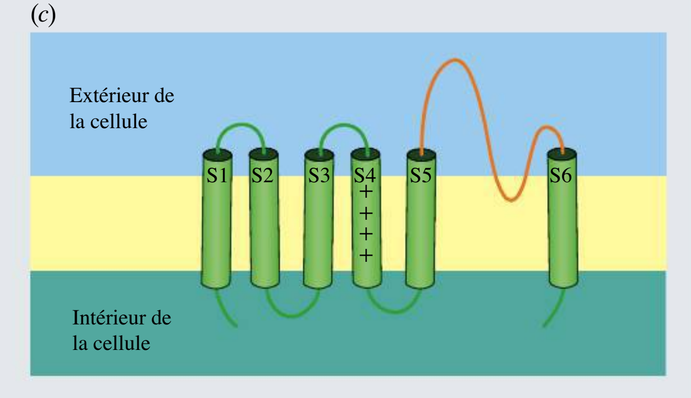
(*b*)



▲ **Figure 5.28**

Un exemple de canal tensiodépendant perméable aux ions K^+. (*a*) Structure du canal, le squelette peptidique étant représenté sous forme de ruban comme à la figure 1.22 (p. 22). (*b*) Schéma montrant que le canal est formé de quatre polypeptides identiques. (*c*) Un des quatre polypeptides, déplié pour permettre de voir sa forme. La portion en orange, visible sur les trois figures, forme le «filtre de sélectivité» qui favorise de beaucoup le passage d'ions dont la taille et la charge correspondent à celles des ions K^+. Un ion K^+, en mauve, est représenté en (*a*) et (*b*) en train de traverser le canal ouvert. Un segment, appelé S4 en (*b*) et (*c*), agit comme un «détecteur de tension»: il comporte plusieurs chaînes latérales positivement chargées. Si le potentiel de membrane varie, la variation de force électrique sur cette charge positive est suffisante pour modifier la forme de la protéine, ouvrant ou fermant le passage aux ions K^+.

(*c*)

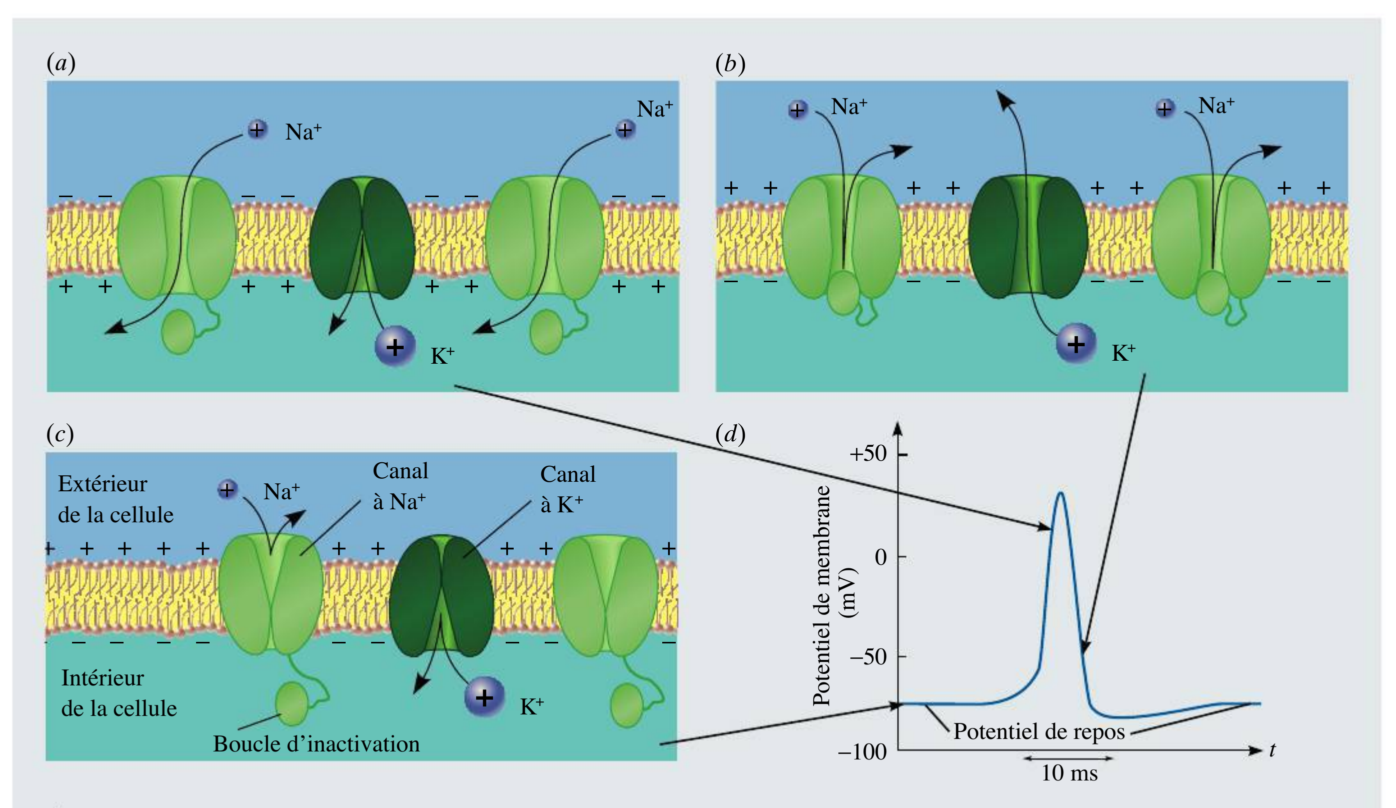


bien plus rapidement (≈1 ms). En plus de pouvoir être ouvert ou fermé, un canal à Na^+ peut aussi être *inactivé* ou non, ce qui lui donne quatre états possibles. L'inactivation survient quand une portion de la protéine appelée *boucle d'inactivation* obstrue le passage. Pour que les ions puissent traverser, le canal doit être ouvert *et* ne doit pas être inactivé. La traversée des ions Na^+ ne dure donc jamais bien longtemps : quand le canal s'ouvre, son inactivation survient dans un délai de ≈10 ms et le canal demeure inactivé tant qu'il ne se referme pas. On peut imaginer un canal à Na^+ comme possédant deux portes : l'une, initialement fermée, s'ouvre très vite (1 ms), et l'autre, initialement ouverte, se ferme en 10 ms.

La figure 5.29 montre ce qui se produit quand le potentiel de membrane est à sa valeur de repos et qu'une légère perturbation (due, par exemple, à l'ouverture d'un canal mécanodépendant) le rend moins négatif. Les canaux à Na^+ et à K^+ auront tous tendance à s'ouvrir, mais le délai de réaction des canaux à Na^+ est 10 fois plus rapide. Ce sont donc les ions Na^+ qui traversent la membrane en premier.

Le nombre d'ions Na^+ qui traverse est insuffisant pour affecter la concentration de Na^+ de part et d'autre de la membrane, puisqu'il faudrait remplir tout le volume cellulaire. Par contre, la traversée d'un relativement faible nombre d'ions Na^+ suffit à décharger rapidement la petite couche chargée, épaisse d'à peine 1 nm, de part et d'autre de la membrane. Ainsi, l'entrée dans la cellule de ces ions rend le potentiel de membrane moins négatif. Notons que cela *augmente encore plus la probabilité* d'ouverture des canaux à Na^+.

Dans un conducteur ordinaire, les ions Na^+ traverseraient jusqu'à ce que la «membrane-condensateur» soit déchargée, c'est-à-dire jusqu'à ce que le potentiel de membrane soit nul. Mais ce n'est pas ce qu'on observe : même quand la membrane est entièrement déchargée, des ions Na^+ *continuent d'entrer dans la cellule.* Cela est dû au fait qu'ils sont cinq fois plus nombreux à l'extérieur qu'à l'intérieur (voir la figure 5.27), donc que leurs simples mouvements thermiques aléatoires font qu'à 0 V, il en entre davantage qu'il n'en sort. Le potentiel de membrane atteint donc une valeur *positive*, ce qui



▲ **Figure 5.29**

Les étapes du déroulement d'un potentiel d'action. (*a*) L'ouverture des canaux à Na^+ fait augmenter *V*. (*b*) Les canaux à Na^+ s'inactivent en même temps que les canaux à K^+ s'ouvrent ; *V* diminue à nouveau. (c) Des mécanismes autres que les canaux tensiodépendants ramènent *V* à sa valeur de repos.

signifie que le potentiel est momentanément plus élevé à l'intérieur de la cellule qu'à l'extérieur (figure 5.29*a*). La « membrane-condensateur » a inversé sa polarité !

Quand un délai d'environ 10 ms s'est écoulé, les canaux à K^+ se sont finalement ouverts. De plus, ce délai fait aussi en sorte que les canaux à Na^+ se sont inactivés (bloqués). En première approximation, la membrane cesse donc d'être perméable au Na^+ et devient perméable au K^+. Puisque le potentiel de membrane est momentanément positif, c'est en *sortant* de la cellule que les ions K^+ minimisent leur énergie potentielle électrique. Rapidement, la petite couche chargée de part et d'autre de la membrane reprend sa polarité initiale (figure 5.29*b*).

La concentration interne des ions K^+ étant 20 fois plus grande que leur concentration externe, le mouvement aléatoire continue de causer plus de traversées vers l'extérieur même quand le potentiel de membrane devient négatif, si bien que celui-ci décroît jusqu'à une valeur inférieure à sa valeur de repos.

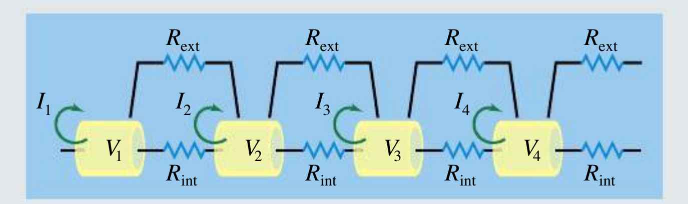
Pour que le potentiel de membrane reprenne sa valeur de repos, il faut rendre l'intérieur moins négatif. Une forte proportion des canaux à Na^+ ayant été récemment inactivés ne sont plus d'aucune utilité. S'il n'y a pas de courants parallèles à la membrane, seule la lente traversée d'ions Cl^-, qui n'empruntent pas des canaux tensiodépendants, permet au potentiel de membrane de reprendre sa valeur de repos (figure 5.29*c*). Ensuite, les pompes Na/K restituent (très lentement) les ions qui ont traversé.

L'événement au cours duquel le potentiel de membrane augmente puis diminue à nouveau en réponse à une perturbation initiale, c'est-à-dire le potentiel d'action, est illustré à la figure 5.29*d*. On note que l'amplitude de ce phénomène, de l'ordre de 100 mV, est toujours quasi identique, et ce, même si celle de la perturbation initiale qui a engendré le phénomène varie considérablement d'une fois à l'autre.

La propagation du potentiel d'action

Jusqu'ici, nous avons considéré une petite portion de membrane. Voyons maintenant comment un potentiel d'action se propage le long de la membrane d'une cellule. Pour mieux le visualiser, on considérera le cas des *neurones* (cellules nerveuses). Chaque neurone comporte un *axone*, un long prolongement cylindrique qui achemine le potentiel d'action. On considère d'abord un axone *non myélinisé*, où la membrane a partout la même épaisseur. À la figure 5.30, cet axone est modélisé comme une succession de compartiments qu'on peut choisir suffisamment petits pour considérer que leur potentiel de membrane est uniforme ; en somme, chacun est un condensateur. Le milieu aqueux étant conducteur, on a





▲ **Figure 5.30**

L'axone d'un neurone peut être considéré comme une succession de compartiments reliés par des résistances.

représenté que les « armatures » (c'est-à-dire les milieux interne et externe) de condensateurs consécutifs sont reliés par des résistances (voir la section 6.4). Sur cette figure, les flèches courbées I_i représentent les courants d'ions qui traversent la membrane et qui doivent être distingués des courants qui circuleront dans les résistances entre les compartiments.

Si un potentiel d'action se produit dans le compartiment 1, le potentiel interne V_1 augmente momentanément. Par conséquent, il s'établit une différence de potentiel $V_1 - V_2$ *entre* les compartiments 1 et 2. Un courant (interne à l'axone) circule donc vers le compartiment 2. La membrane-condensateur du compartiment 2 sera donc affectée : le courant entrant fait augmenter V_2 et le potentiel d'action est déclenché dans le compartiment 2. Quand V_2 atteint sa valeur maximum (et affecte déjà V_3), V_1 est déjà redescendu, de sorte que $V_2 > V_1$. Cette différence de potentiel entre les compartiments fait maintenant circuler dans la cellule un courant vers la gauche sur la figure, lequel aide V_1 à rétablir sa valeur de repos sans avoir à attendre l'arrivée d'ions Cl^-. À l'extérieur de la cellule, une perturbation similaire se produit.

La phase ascendante du potentiel d'action se propage donc de compartiment en compartiment, précédée par un courant circulant le long de l'intérieur de l'axone vers la droite, alors que la phase descendante du potentiel d'action se propage elle aussi dans le même sens, suivie par un courant circulant vers la gauche. C'est cette propagation qui constitue l'influx nerveux. Grâce à ce phénomène, une perturbation initiale à une extrémité du neurone peut causer, une fraction de seconde plus tard, un effet à l'autre extrémité du neurone, à *des mètres* de la perturbation initiale.

Chez les vertébrés, dont l'être humain, l'évolution a fait encore mieux : environ le tiers de nos axones sont presque entièrement « emballées » dans une gaine de *myéline*, un diélectrique. Dans un axone *myélinisé*, seules de petites portions appelées *nœuds de Ranvier*, régulièrement espacées d'environ 2 mm, ont une membrane exposée au milieu extérieur. Sur la figure 5.30, cela équivaut à multiplier par 100 l'épaisseur de la membrane dans 99 % des compartiments. Une épaisseur plus grande signifiant une capacité plus petite (voir l'équation 5.3), il faut transférer 100 fois moins de charge pour causer la même variation de leur différence de potentiel. Cela accélère énormément l'influx nerveux, qui semble littéralement bondir d'un nœud de Ranvier à l'autre. De plus, aucun ion ne peut traverser les membranes de compartiments myélinisés, ce qui signifie qu'il faut aussi 100 fois moins d'énergie, sous forme d'ATP, pour repomper les ions utilisés après le passage de chaque potentiel d'action. On comprend donc que les animaux qui bénéficient de tels neurones soient les plus évolués et que des maladies qui détruisent la myéline, comme la sclérose en plaques, aient un impact si sévère.

En plus des neurones, des potentiels d'action peuvent se produire dans toute une catégorie de cellules appelées *cellules excitables*. Par exemple, des potentiels d'action interviennent dans la contraction musculaire, dans la réponse immédiate d'un ovule après la fécondation, etc. Au sujet connexe de la section 7.3, nous reviendrons sur la contraction musculaire.

RÉSUMÉ

Un condensateur est un dispositif qui emmagasine la charge et l'énergie électrique. Il est composé de deux armatures conductrices séparées par un isolant. Si les armatures portent les charges $\pm Q$ et ont entre elles une différence de potentiel ΔV, la capacité du condensateur est définie comme la valeur absolue de la quantité de charge sur une armature divisée par la valeur absolue de la différence de potentiel ΔV entre les armatures :

$$C = \frac{Q}{\Delta V} \quad (5.2)$$

La capacité dépend des dimensions et de la forme des armatures ainsi que du matériau présent dans l'espace entre les armatures. Elle *ne dépend pas* de Q ni de ΔV séparément. Pour un condensateur plan dont les armatures sont séparées par du vide, on obtient

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} \qquad (5.3)$$

Lorsque N condensateurs sont associés en série ou en parallèle, la capacité équivalente est respectivement donnée par

(en série) $$\frac{1}{C_{\text{éq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_N} \qquad (5.7)$$

(en parallèle) $$C_{\text{éq}} = C_1 + C_2 + \ldots + C_N \qquad (5.8)$$

Lorsqu'on charge un condensateur, il y a transfert des charges positives du potentiel faible au potentiel élevé. Le travail effectué par l'agent extérieur (comme une pile) est emmagasiné sous forme d'énergie potentielle :

$$U_E = \tfrac{1}{2}Q\Delta V = \frac{Q^2}{2C} = \tfrac{1}{2}C\Delta V^2 \qquad (5.9)$$

Si la capacité d'un condensateur est C_0 en l'absence de matériau entre ses armatures, sa capacité augmente lorsqu'on remplit l'espace entre les armatures d'un matériau diélectrique et devient

$$C_{\text{D}} = \kappa C_0 \qquad (5.13)$$

κ étant appelée constante diélectrique du matériau. Dans un diélectrique, un champ électrique résultant est divisé par le facteur κ et a la valeur

$$E_{\text{D}} = E_0/\kappa \qquad (5.12)$$

où E_0 est le module du champ qui existerait en l'absence de diélectrique.

TERMES IMPORTANTS

association en parallèle (p. 183)
association en série (p. 183)
capacité (p. 177)
condensateur (p. 176)
constante diélectrique (p. 190)
diélectrique (p. 190)
effet de bord (p. 177)
farad (p. 177)
polarisation (p. 193)
rigidité diélectrique (p. 191)
tension (p. 176)

RÉVISION

R1. Quel est l'effet d'une diminution de la distance entre les plaques sur la capacité d'un condensateur plan ?

R2. Vrai ou faux ? La capacité d'un condensateur cylindrique reste constante si on double la longueur et les rayons des cylindres.

R3. Vrai ou faux ? La capacité d'un agencement de condensateurs en parallèle est toujours plus grande que la capacité du plus grand condensateur de l'ensemble.

R4. Vrai ou faux ? Dans un agencement de condensateurs en série, c'est aux bornes du plus petit condensateur que s'établit la plus grande différence de potentiel.

R5. Dans l'expression $U_E = \frac{1}{2}C\Delta V^2$, on pourrait croire que l'énergie emmagasinée dans un condensateur est directement proportionnelle à sa capacité, tandis que l'expression $U_E = \frac{1}{2}Q^2/C$ donne à penser qu'elle est inversement proportionnelle à sa capacité. Montrez qu'il n'y a pas de contradiction entre ces deux expressions.

R6. Vrai ou faux ? Pour accumuler le plus d'énergie possible dans un condensateur rempli de diélectrique, on devrait utiliser un matériau qui combine une forte constante diélectrique et une faible rigidité diélectrique.

R7. L'introduction d'un diélectrique entre les armatures d'un condensateur fait augmenter sa capacité. Expliquez dans quel cas cette augmentation provient (a) d'une augmentation de la charge du condensateur ; (b) d'une diminution de la différence de potentiel aux bornes du condensateur.

R8. Expliquez comment l'introduction d'un diélectrique entre les armatures d'un condensateur chargé qui n'est pas relié à une pile affecte le champ électrique présent.

R9. Vrai ou faux ? L'introduction d'un diélectrique entre les armatures d'un condensateur chargé qui n'est pas relié à une pile s'accompagne d'une perte d'énergie dans le condensateur.

QUESTIONS

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

Q1. Lorsqu'on relie une pile aux bornes d'un condensateur, les charges sur les armatures sont-elles toujours de même grandeur et de signes opposés, même si les armatures sont de tailles différentes ?

Q2. Deux conducteurs ont-ils une capacité, même si leurs charges ne sont pas de même grandeur et de signes opposés ?

Q3. Lorsqu'on introduit un diélectrique dans un condensateur plan chargé, l'énergie emmagasinée augmente-t-elle ou diminue-t-elle, sachant que (a) la pile reste branchée ; (b) la pile est d'abord débranchée ?

Q4. On double la différence de potentiel aux bornes d'un condensateur. Comment varient les grandeurs suivantes : (a) la capacité ; (b) la charge emmagasinée ; (c) l'énergie emmagasinée ?

Q5. Avec une pile donnée, doit-on relier deux condensateurs en série ou en parallèle pour qu'ils emmagasinent : (a) la charge totale maximale ; (b) l'énergie totale maximale ?

Q6. On charge un condensateur plan, puis on le débranche de la pile. Si l'on écarte les armatures, la différence de potentiel va-t-elle augmenter, diminuer ou rester la même ? Quel effet cela a-t-il sur l'énergie emmagasinée ?

Q7. Un condensateur plan est relié à une pile. Supposons qu'on rapproche les armatures. (a) Quel effet cela a-t-il sur la charge, la différence de potentiel et l'énergie ? (b) Le travail externe accompli pour déplacer les armatures est-il positif ou négatif ?

Q8. Reprenez la question Q7 pour un condensateur plan chargé, la pile étant débranchée.

Q9. Donnez deux raisons justifiant l'utilisation des diélectriques dans les condensateurs.

Q10. L'eau a une constante diélectrique élevée. Pourquoi n'est-elle pas souvent utilisée dans les condensateurs ?

Q11. Quelle est la différence entre la constante diélectrique et la rigidité diélectrique d'un matériau ?

Q12. On introduit entre les armatures d'un condensateur plan une feuille de métal d'épaisseur négligeable (figure 5.31). (a) Quel effet cela a-t-il sur la capacité ? (b) La position de la feuille a-t-elle de l'importance ? (c) Qu'arrive-t-il si la feuille a une épaisseur non négligeable ?

▲ **Figure 5.31**
Question 12.

Q13. Peut-on s'attendre à ce que la constante diélectrique d'une substance polaire dépende de la température ? Si oui, va-t-elle augmenter ou diminuer si la température s'élève ?

Q14. Montrez que F/m = $C^2/(N{\cdot}m^2)$.

Q15. Vrai ou faux ? Quand on dit qu'un condensateur porte une quantité de charge Q, cela signifie que chacune des armatures porte $Q/2$.

Q16. Environ 30 % de nos neurones sont recouverts de *myéline*, un diélectrique, ce qui augmente d'un facteur 100 l'épaisseur effective de leur membrane. (a) Quel effet cela a-t-il sur la capacité surfacique de la membrane ? (b) Pourquoi cela présente-t-il un avantage ? (*Indice* : Lors du passage d'un influx nerveux, le potentiel interne de la cellule doit augmenter d'environ 100 mV.)

Q17. Pourquoi peut-il être dangereux de manipuler un condensateur chargé même après le débranchement de la pile ? Expliquez ce comportement des charges.

Q18. En plus de la capacité surfacique d'une membrane cellulaire, laquelle ou lesquelles des grandeurs suivantes faut-il aussi mesurer si on veut déterminer sa constante diélectrique ? 1) La densité de charge de chaque côté, 2) l'épaisseur de la membrane, 3) le diamètre de la cellule, 4) la surface de la membrane.

Sauf mention du contraire, on suppose l'absence de diélectriques.

5.1 Capacité

E1. (I) Un condensateur a des armatures circulaires de rayon 6 cm séparées par une distance de 2 mm. Déterminez : (a) sa capacité ; (b) la charge sur chaque armature lorsque le condensateur est relié à une pile de 12 V.

E2. (I) (a) Quelle est la capacité par unité de longueur d'un long câble coaxial rectiligne dont le fil intérieur a un rayon de 0,5 mm et la gaine conductrice extérieure un rayon de 0,5 cm ? (b) Lorsqu'on lui applique une différence de potentiel de 24 V, quelle est la quantité de charge emmagasinée sur 2,5 m du fil ?

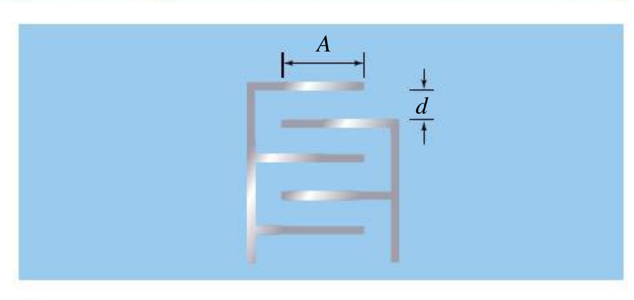
E3. (I) Un condensateur plan de 240 pF a des charges de ±40 nC sur ses armatures qui sont distantes de 0,2 mm. Déterminez : (a) l'aire de chaque armature ; (b) la différence de potentiel entre les armatures ; (c) le module du champ électrique entre les armatures.

E4. (I) Dans un condensateur plan, les armatures sont séparées de 0,8 mm. Les armatures portent des charges ±60 nC et un champ électrique de module 3×10^4 V/m règne entre les armatures. Déterminez : (a) la différence de potentiel entre les armatures ; (b) la capacité ; (c) l'aire d'une armature.

E5. (I) La Terre (de rayon 6400 km) est entourée d'une couche d'atmosphère conductrice appelée ionosphère. Considérons que cette couche est une sphère conductrice à 50 km au-dessus de la surface et qu'il règne dans l'atmosphère un champ électrique constant de 100 V/m orienté verticalement vers le bas. (a) Quelle est la densité surfacique de charge à la surface de la Terre ? (b) Quelle est la capacité du système ? (c) Comparez la réponse obtenue à la question (b) avec la capacité de la Terre considérée comme une sphère conductrice isolée.

E6. (I) Un long câble coaxial rectiligne a un fil intérieur de rayon $r = 1$ mm et une gaine extérieure conductrice de rayon r_2. Lorsqu'on lui applique une différence de potentiel de 27 V, la densité de charge linéique sur le fil intérieur est de 4 nC/m. Trouvez r_2.

E7. MonLab (II) Un condensateur est constitué de deux ensembles de plaques intercalées (figure 5.32). La distance de séparation des plaques et l'aire utile correspondante sont indiquées sur la figure. Quelle est la capacité de ce système ?



▲ **Figure 5.32**
Exercice 7.

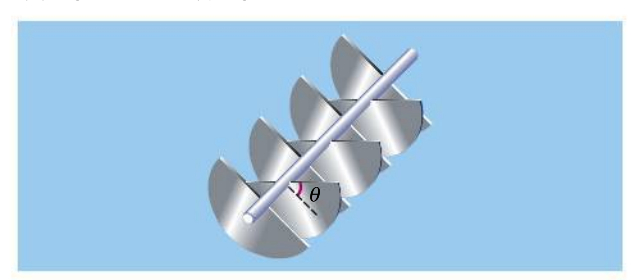
E8. (I) Un condensateur plan de 24 pF a des armatures dont l'aire est égale à 0,06 m^2. (a) Quelle est la différence de potentiel nécessaire pour provoquer une décharge entre les armatures ? Le module du champ disruptif (le champ nécessaire pour ioniser les molécules d'air et produire une étincelle) dans l'air est 3×10^6 V/m. (b) Quelle serait la charge sur les armatures correspondant à cette différence de potentiel ?

E9. (I) Lorsque 10^{12} électrons sont transférés d'une armature à l'autre, la différence de potentiel aux bornes d'un condensateur initialement non chargé atteint 20 V. Quelle est sa capacité ?

E10. (I) Une pile de 12 V est reliée aux deux sphères concentriques d'un condensateur sphérique. Les rayons des sphères sont 15 cm et 20 cm. Quelle est la charge sur chaque sphère ?

E11. (I) Un condensateur de capacité $C_1 = 4$ µF est relié aux bornes d'une pile de 20 V. On enlève la pile et on relie le condensateur à un autre condensateur de capacité $C_2 = 6$ µF, non chargé. Quelles sont les charges et les différences de potentiel finales des condensateurs ?

E12. (II) Un condensateur variable comprend sept armatures en forme de demi-cercles de rayon 2 cm (figure 5.33). Les armatures sont distantes de 1 mm. Trouvez la capacité lorsque l'angle θ est : (a) nul ; (b) égal à 45° ; (c) égal à 135°.



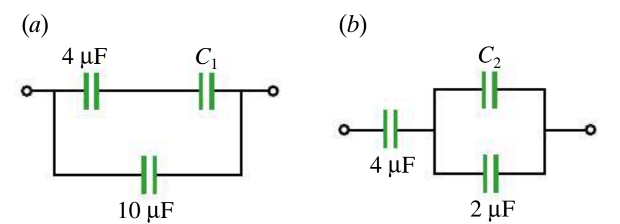
▲ **Figure 5.33**
Exercice 12.

E13. (I) Un condensateur sphérique comprend une sphère intérieure de rayon 3 cm et une sphère extérieure de rayon 11 cm. (a) Quelle est sa capacité ? (b) Combien d'électrons doivent être transférés d'une sphère à l'autre pour créer une différence de potentiel de 5 V ?

5.2 Condensateurs en série et en parallèle

E14. (I) Étant donné deux condensateurs de capacités C_1 = 0,1 µF et C_2 = 0,25 µF, et une pile de 12 V, trouvez la charge et la différence de potentiel pour chacun s'ils sont reliés (a) en série; (b) en parallèle avec la pile.

E15. MonLab (I) Les trois condensateurs de la figure 5.34*a* ont une capacité équivalente de 12,4 µF. Trouvez C_1.

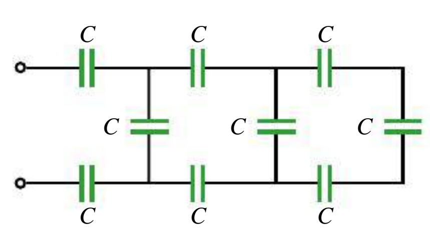


▲ **Figure 5.34**
Exercices 15 et 16.

E16. (I) Les trois condensateurs de la figure 5.34*b* ont une capacité équivalente de 2,77 µF. Quelle est la valeur de C_2 ?

E17. (I) On vous donne quatre condensateurs de 10 µF. Trouvez la configuration ayant une capacité de (a) 4 µF; (b) 2,5 µF.

E18. MonLab (I) Tous les condensateurs de la figure 5.35 sont identiques, avec C = 1 µF. Quelle est leur capacité équivalente ?



▲ **Figure 5.35**
Exercice 18.

E19. MonLab (II) Deux condensateurs de capacité C_1 = 2 µF et C_2 = 4 µF sont reliés en série avec une pile de 18 V. On enlève la pile et on relie entre elles les armatures de même signe. Trouvez la charge et la différence de potentiel finales pour chaque condensateur.

E20. (II) Deux condensateurs de capacité C_1 = 2 µF et C_2 = 6 µF sont en parallèle avec une pile de 60 V. On enlève la pile et on relie entre elles les armatures de signes contraires. Trouvez la charge et la différence de potentiel finales pour chaque condensateur.

E21. MonLab (II) Un condensateur de capacité C_1 = 3 µF possède une différence de potentiel initiale de 12 V et un deuxième condensateur, C_2 = 5 µF, a une différence de potentiel initiale de 10 V. Trouvez les charges et différences de potentiel finales pour chaque condensateur si leurs armatures sont reliées de la manière suivante : (a) armatures de même signe reliées ensemble; (b) armatures de signes contraires reliées ensemble.

E22. (II) On vous donne trois condensateurs de capacité C_1 = 1 µF, C_2 = 2 µF et C_3 = 4 µF. Combien de capacités différentes pouvez-vous produire avec ces trois condensateurs ? Indiquez les valeurs obtenues.

5.3 et 5.4 Énergie et densité d'énergie

E23. (I) Quelle est la capacité requise pour emmagasiner une énergie de 100 MeV sous une différence de potentiel de 12 V entre les armatures ?

E24. (I) Étant donné deux condensateurs de 50 µF et une pile de 20 V, trouvez l'énergie emmagasinée totale lorsque les condensateurs sont reliés: (a) en parallèle; (b) en série avec la pile.

E25. (I) Les armatures d'un condensateur plan ont une aire de 40 cm^2 et sont distantes de 2,5 mm. Le condensateur est relié à une pile de 24 V. Déterminez: (a) la capacité; (b) l'énergie emmagasinée; (c) le module du champ électrique entre les armatures; (d) la densité d'énergie dans le champ électrique.

E26. (I) Dans un condensateur plan, la distance entre les armatures est égale à 0,6 mm et chaque armature porte une charge de ±0,03 µC. Si le module du champ électrique entre les armatures est égal à 4×10^5 V/m, trouvez: (a) la capacité; (b) l'énergie emmagasinée.

E27. (I) Les armatures d'un condensateur plan de 400 pF sont distantes de 1,2 mm. Trouvez la densité d'énergie lorsqu'on applique une différence de potentiel de 250 V entre les armatures.

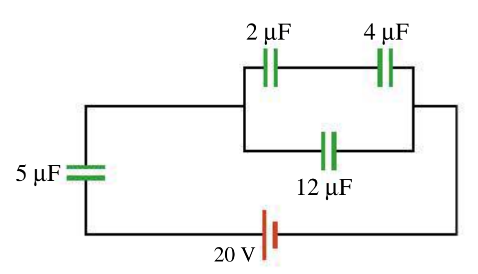
E28. (I) Étant donné deux condensateurs, C_1 = 3 µF et C_2 = 5 µF, déterminez l'énergie emmagasinée dans chacun d'entre eux lorsqu'ils sont reliés: (a) en parallèle, (b) ou en série avec une pile de 20 V.

E29. MonLab (II) Deux condensateurs, C_1 = 2 µF et C_2 = 5 µF, sont reliés en série avec une pile de 20 V. On enlève la pile et on relie entre elles les armatures de même signe. (a) Trouvez les énergies emmagasinées initiale et finale pour chaque condensateur. (b) L'énergie est-elle conservée ? Justifiez pourquoi. (c) Trouvez à nouveau l'énergie finale demandée en (a) en considérant qu'on relie plutôt les armatures de signes opposés.

E30. (II) Deux condensateurs, C_1 = 2 µF et C_2 = 5 µF, sont en parallèle avec une pile de 40 V. On enlève la pile et on relie entre elles les armatures de signes contraires. (a) Trouvez les énergies emmagasinées initiale et finale pour chaque condensateur. (b) L'énergie est-elle conservée ? Justifiez pourquoi. (c) Répondez à nouveau à la question (a) en considérant que

les condensateurs avaient plutôt été reliés en série pendant la charge.

E31. MonLab (II) On considère l'association de condensateurs représentée à la figure 5.36. Déterminez l'énergie emmagasinée dans (a) le condensateur de 5 μF; (b) le condensateur de 4 μF.



▲ **Figure 5.36**

Exercice 31.

E32. (I) Un condensateur plan de 5 pF a une différence de potentiel de 25 V entre ses armatures. L'aire des armatures est égale à 40 cm^2. Déterminez: (a) l'énergie emmagasinée; (b) la densité d'énergie dans le champ.

E33. (I) Les armatures d'un condensateur plan ont une aire A et sont séparées d'une distance d. On introduit un bloc métallique d'épaisseur ℓ à mi-chemin entre les armatures (figure 5.37). (a) Trouvez une expression pour la capacité de ce condensateur modifié. (b) Que devient cette expression si l'on déplace le bloc de sorte qu'il touche l'une des armatures?



▲ **Figure 5.37**

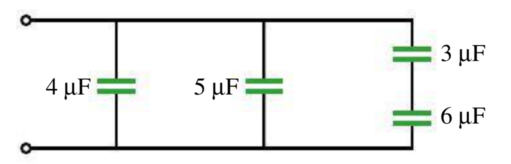
Exercice 33 et problème 2.

E34. (I) Un condensateur plan dont les armatures sont distantes de d est relié à une pile avec une différence de potentiel ΔV. Tout en maintenant le condensateur branché à la pile, on éloigne les armatures l'une de l'autre jusqu'à ce qu'elles soient distantes de $2d$. Quelle est la variation subie par les grandeurs suivantes: (a) la différence de potentiel; (b) la charge sur chaque armature; (c) l'énergie emmagasinée dans le condensateur?

E35. (II) Reprenez l'exercice E34 avec un condensateur chargé, la pile étant débranchée.

E36. (I) On considère l'association de condensateurs de la figure 5.38. L'énergie emmagasinée dans le condensateur de 5 μF est égale à 200 mJ. Quelle est l'énergie emmagasinée dans (a) le condensateur de 4 μF; (b) le condensateur de 3 μF?

E37. (I) Le module du champ électrique à la pointe de l'aiguille d'un microscope à effet de champ (voir la



▲ **Figure 5.38**

Exercice 36.

figure 4.43, p. 161) est d'environ 4,5 × 10^8 V/m. Quelle est la densité d'énergie dans un tel champ?

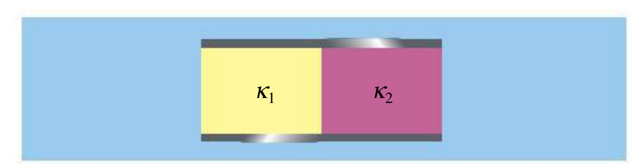
E38. (I) Par beau temps, il règne à la surface de la Terre un champ électrique de 120 V/m vertical et dirigé vers le bas. Quelle est l'énergie électrique contenue dans une enceinte cubique d'arête 10 m?

E39. (I) Les armatures d'un condensateur plan sont distantes de 1 mm. Pour quelle différence de potentiel la densité d'énergie est-elle égale à 1,8 × 10^{-4} J/m^3?

E40. (I) Un condensateur plan de 15 pF est relié à une pile de 48 V. L'aire de chaque armature est égale à 80 cm^2. Quelle est la densité d'énergie dans le champ?

5.5 et 5.6 Diélectriques

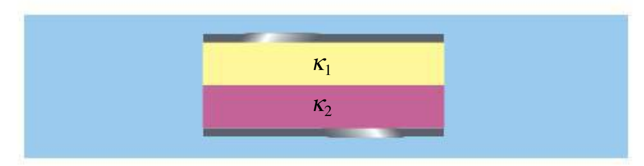
E41. (I) L'espace entre les armatures d'un condensateur plan est rempli de deux diélectriques de mêmes dimensions (figure 5.39). Quelle est la capacité résultante du condensateur en fonction de κ_1, de κ_2 et de C_0, sa capacité lorsque ses armatures sont séparées par le vide?



▲ **Figure 5.39**

Exercice 41.

E42. (II) Un condensateur plan est rempli à moitié d'une couche de diélectrique de constante κ_1, alors que l'autre moitié contient une couche de constante κ_2 (figure 5.40). Quelle est la capacité résultante? Exprimez votre réponse en fonction de κ_1, de κ_2 et de C_0, la capacité du condensateur en l'absence de diélectrique.

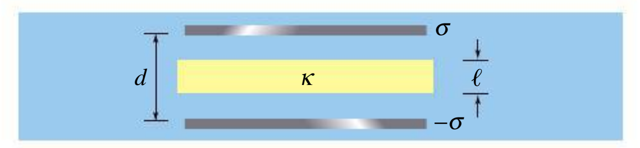


▲ **Figure 5.40**

Exercice 42.

E43. (II) Les armatures d'un condensateur plan portent une densité surfacique de charge σ. On place entre les armatures une couche de diélectrique d'épaisseur ℓ et de constante diélectrique κ (figure 5.41). On

donne d = 1 cm, ℓ = 0,3 cm, σ = 2 nC/m^2, κ = 5, A = 40 cm^2. Déterminez (a) la différence de potentiel ; (b) la capacité du condensateur modifié.



▲ **Figure 5.41**

Exercice 43.

E44. (I) Un condensateur plan de 0,1 μF est relié à une pile de 12 V. Le condensateur étant maintenu branché à la pile, on introduit un diélectrique (κ = 4) de manière à ce qu'il occupe entièrement l'espace entre les armatures. Trouvez la charge additionnelle transférée sur les armatures.

E45. MonLab (II) Un condensateur plan dont le diélectrique est une feuille de mica a une capacité de 50 pF. Si la distance séparant les armatures est égale à 0,1 mm et que le diélectrique occupe entièrement l'espace, trouvez : (a) l'aire des armatures ; (b) la différence de potentiel maximale que peut supporter le condensateur.

E46. (I) Un diélectrique est introduit dans l'espace entre les armatures d'un condensateur de manière à l'occuper entièrement. Déterminez la constante diélectrique dans chacun des cas suivants : (a) la capacité augmente de 50 % ; (b) la différence de potentiel diminue de 25 % ; (c) la charge emmagasinée double de valeur.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

Sauf mention du contraire, on suppose l'absence de diélectriques.

5.1 Capacité

E47. (I) Une sphère conductrice isolée a une capacité de 4,2 pF et un potentiel de 1000 V. (a) Quel est son rayon ? (b) Quelle est sa densité surfacique de charge ?

E48. (I) Deux plaques conductrices circulaires et identiques sont éloignées de 4 mm et forment un condensateur plan de 6 pF. Quel est le rayon de chacune des plaques ?

E49. (I) Quand une différence de potentiel de 12 V est appliquée entre les deux armatures d'un condensateur plan, une densité surfacique de charge de ±15 nC/m^2 apparaît sur chacune des armatures. Quelle distance sépare les armatures ?

E50. (I) Un condensateur cylindrique a une capacité de 15 pF pour chaque 12 cm de longueur. Le rayon du cylindre extérieur est de 0,7 cm. (a) Quel est le rayon du cylindre intérieur ? (b) Évaluez la densité linéique de charge sur l'un ou l'autre des conducteurs lorsqu'une différence de potentiel de 24 V règne entre les deux cylindres.

5.2 Condensateurs en série et en parallèle

E51. (II) Un condensateur C_1 = 20 μF a une différence de potentiel de 26 V. Lorsqu'il est branché à un autre condensateur C_2 non chargé, la différence de potentiel sur chaque condensateur tombe à 16 V. Quelle est la capacité de C_2 ?

5.3 Énergie dans un condensateur

E52. (I) Un condensateur de 50 μF possédant une différence de potentiel de 240 V se décharge complètement en 0,2 ms. Quelle puissance moyenne libère-t-il ?

E53. (I) Considérez à nouveau la situation de l'exercice E14. Dans chacun des deux cas décrits dans cet exercice, calculez l'énergie emmagasinée dans les deux condensateurs et comparez-la à celle emmagasinée dans le condensateur équivalent.

5.5 et 5.6 Diélectriques

E54. (II) Le cœur non polaire de la membrane d'une cellule musculaire a une épaisseur d = 4 nm et une constante diélectrique κ = 20. (a) Quelle est la capacité surfacique de la membrane ? Exprimez votre réponse en microcoulombs par centimètre carré. (b) Lors de la contraction musculaire, le potentiel interne de la cellule augmente d'environ 100 mV. Pour 1 cm^2 de membrane, combien d'ions Na^+ ont dû entrer dans la cellule à cette fin ? (c) Le milieu extérieur à la cellule contient initialement 0,150 mol/L d'ions Na^+ en solution. Si on considère qu'il s'étend à 1 μm de la cellule, quelle y est la diminution de la concentration de Na^+ immédiatement après le changement de potentiel ? (d) Estimez le nombre de fois que le processus peut être répété avant l'épuisement de la réserve d'ions Na^+.

E55. (I) La membrane d'un neurone non myélinisé a une capacité surfacique c = 1 μF/cm^2. Un stimulus fait en sorte que des charges traversent cette membrane vers l'intérieur de la cellule. On estime que 80 nC traversent chaque centimètre carré de membrane à chaque milliseconde. (a) Après combien de temps le potentiel interne de la cellule a-t-il augmenté de 100 mV et quelle charge totale (par centimètre carré de membrane) a dû traverser ? (b) Répondez aux deux mêmes questions dans le cas d'un neurone myélinisé, dont la membrane a une épaisseur effective 100 fois plus grande. Justifiez la différence.

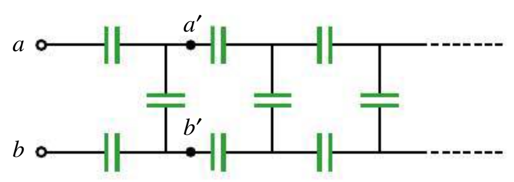
P1. (I) Un condensateur plan est rempli d'un matériau de constante diélectrique κ. Montrez que la densité d'énergie dans un diélectrique est $\frac{1}{2}\kappa\varepsilon_0 E^2$, où E est le champ dans le diélectrique. Ce résultat dépend-il de la présence d'une pile reliée au condensateur ?

P2. (I) Un condensateur plan dont les armatures d'aire A sont distantes de d est relié à une pile de différence de potentiel ΔV. Un bloc métallique d'épaisseur ℓ est placé à mi-chemin entre les armatures (figure 5.37, p. 205). Quel est le travail nécessaire pour enlever le bloc, sachant que la pile reste reliée au condensateur ?

P3. (I) Reprenez le problème P2 sachant que l'on débranche la pile avant d'enlever le bloc.

P4. MonLab (I) Deux condensateurs plans identiques sont reliés en série à une pile de 12 V. L'aire des armatures est égale à 16 cm^2 et elles sont séparées de 0,4 mm. (a) Trouvez la charge et la différence de potentiel pour chaque condensateur. (b) On introduit dans l'un des condensateurs un bloc de diélectrique (κ = 5) qui remplit complètement l'espace entre les armatures. Quelles sont les nouvelles valeurs de la charge et de la différence de potentiel pour chaque condensateur ?

P5. (II) L'association de condensateurs identiques, de capacité 50 pF, représentée à la figure 5.42 se poursuit indéfiniment. Quelle est la capacité équivalente entre les bornes a et b ? (*Indice* : Puisque la configuration est infinie, la capacité entre les points a' et b' est la même qu'entre les points a et b.)

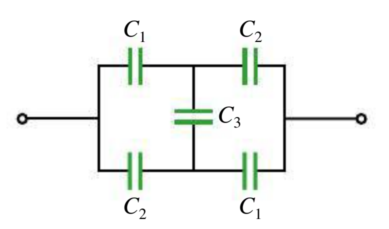


▲ **Figure 5.42**
Problème 5.

P6. (II) Quelle est la capacité équivalente de la combinaison représentée à la figure 5.43 ? On donne C_1 = 2 µF, C_2 = 4 µF et C_3 = 3 µF. (*Indice* : Appliquez une différence de potentiel entre les bornes. Cette différence de potentiel est la même quel que soit le trajet entre les bornes. Quelle est la relation entre les charges sur les armatures ?)

P7. (II) Les armatures d'un condensateur plan ont une aire égale à A et sont séparées d'une distance d. Les charges sur les armatures sont $\pm Q$. Quelle est la force entre les armatures sachant que la pile a été enlevée ? S'agit-il d'une force d'attraction ou de répulsion ? (*Indice* : Utilisez $F_x = -\mathrm{d}U/\mathrm{d}x$.)

P8. (I) À l'aide d'une pile, dont la différence de potentiel est ΔV, on charge un condensateur plan de capacité C.



▲ **Figure 5.43**
Problème 6.

On débranche la pile et on introduit un diélectrique de constante κ qui remplit complètement l'espace entre les armatures. Trouvez l'énergie emmagasinée dans le condensateur.

P9. (I) Reprenez le problème P8 dans le cas où la pile reste reliée au condensateur.

P10. (II) Un condensateur cylindrique a un conducteur central de rayon a et une gaine extérieure de rayon b. Montrez que si $b - a \ll b$, la capacité devient celle d'un condensateur plan.

P11. (II) Un condensateur sphérique est composé de deux sphères concentriques de rayons R_1 et R_2. (a) Montrez que si $R_2 - R_1 \ll R_2$, la capacité devient celle d'un condensateur plan. (b) Montrez qu'il existe un cas limite dans lequel la capacité du condensateur sphérique se réduit à celle d'une sphère isolée.

P12. (II) (a) Déterminez la densité d'énergie en fonction de r pour un condensateur cylindrique ayant un fil intérieur de rayon a et un conducteur extérieur de rayon b. (b) Quelle est l'énergie totale emmagasinée sur une longueur L du condensateur ? (c) Comparez votre résultat avec celui que donne le calcul à partir de $\frac{1}{2}C\Delta V^2$ ou de $Q^2/2C$.

P13. (I) On introduit entre les armatures d'un condensateur plan un bloc de diélectrique de constante κ remplissant tout l'espace. Montrez que la densité surfacique de charges liées σ_p sur le diélectrique et la densité surfacique de charges libres σ sur les armatures du condensateur sont reliées par

$$\sigma_\mathrm{p} = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa}\sigma$$

P14. (I) Soit une membrane cellulaire d'épaisseur d et de constante diélectrique κ. On considère un canal tensiodépendant à K^+, enchâssé dans cette membrane, comme celui illustré à la figure 5.28 (p. 198). Quand le potentiel de membrane passe d'une valeur V_i à une valeur V_f, les détecteurs de tension du canal (ce sont les quatre parties chargées appelées S4 à la figure 5.28, p. 198) se déplacent. Si on estime à $d/3$ la composante de ce déplacement qui est perpendiculaire à la membrane, donnez l'expression du travail effectué par le champ électrique sur les détecteurs de tension du canal. Considérez $q = +4e$ pour chaque détecteur de tension.

CHAPITRE 6

COURANT ET RÉSISTANCE



SOMMAIRE

Ce filament d’ampoule est tellement chaud qu’il émet de la lumière, phénomène qui permet de tirer une importante déduction : quand des charges circulent dans un matériau plus ou moins conducteur, formant un courant électrique, elles y dissipent de l’énergie. Dans ce chapitre, nous expliquerons l’origine de cette énergie et la cause de ce mouvement de charges.

Dans les chapitres précédents, tous les conducteurs que nous avons présentés étaient à l’équilibre électrostatique, ce qui signifie qu’en chaque point de leur volume, le champ électrique résultant était nul, le potentiel était le même et les charges étaient macroscopiquement immobiles. Il est évident que cela n’est pas une règle générale. Par exemple, quand une pile est branchée à un condensateur, il faut bien que la charge se déplace dans le fil conducteur avant l’atteinte d’un équilibre.

Nous allons maintenant étudier des conducteurs *hors d’équilibre*, dans lesquels on maintient un champ électrique et une différence de potentiel. Dans un tel conducteur, la charge est en mouvement, c’est-à-dire qu’elle forme un *courant électrique*. La question au cœur de ce chapitre est de savoir comment le courant circulant dans un fil conducteur dépend de la différence de potentiel appliquée entre ses extrémités ou, ce qui est équivalent, comment il dépend du champ électrique qui règne dans le fil.

Les notions de différence de potentiel et de courant électrique se sont précisées peu à peu au cours du XVIII[e] siècle, mais, pour diverses raisons, on ne parvenait pas à définir la relation existant entre elles. Tout d'abord, on ne disposait pas de source de courant continu. Jusqu'en 1800, la seule manière de produire un courant électrique dans un fil consistait à y décharger un condensateur (bouteille de Leyde). L'effet obtenu était bien sûr uniquement transitoire. Deuxièmement, on ne s'expliquait pas encore si le fil conducteur n'était là que pour permettre au « fluide » électrique de circuler ou s'il jouait un rôle plus actif. Troisièmement, on ne disposait pas d'instruments de mesure, ce qui nuisait considérablement à l'évolution des connaissances dans ce domaine. Les chercheurs devaient avoir recours à leur corps, à leur langue ou même à leurs yeux pour déceler les courants électriques. Les électroscopes (voir la section 1.4) pouvaient détecter une « électrification », c'est-à-dire la charge portée par un objet, mais l'on ne savait jamais exactement la grandeur qui était mesurée.

Malgré toutes ces limites pratiques, Henry Cavendish (1731-1810) fut le premier à formuler une explication analogue à celle acceptée aujourd'hui : en comparant les chocs qu'il ressentait quand il déchargeait au travers de son propre corps des bouteilles de Leyde plus ou moins chargées, il écrivit que la « vitesse » d'écoulement du fluide électrique (courant) croît avec le « degré d'électrification » (différence de potentiel). Il ne publia malheureusement pas ses résultats.

Ce n'est qu'après l'invention de la pile voltaïque en 1799 (voir l'aperçu historique de la section 6.1) que la recherche expérimentale put se poursuivre et permettre d'établir quantitativement un lien entre la différence de potentiel et le courant, ce qu'accomplit Georg Ohm (1789-1854) en 1827. Comme nous le verrons, la différence de potentiel est la *cause* du déplacement des charges, c'est-à-dire du courant : plus la différence de potentiel appliquée entre les extrémités d'un conducteur est élevée, plus le courant qui y circule est proportionnellement élevé. En effet, un champ électrique correspond à cette différence de potentiel et exerce une force sur les charges contenues dans le fil.

6.1 LE COURANT ÉLECTRIQUE

Considérons l'écoulement de la charge à travers la surface imaginaire représentée à la figure 6.1*a*. Si, pendant l'intervalle de temps Δt, une charge ΔQ traverse la surface, l'intensité moyenne du **courant électrique** est définie par

Intensité moyenne du courant électrique

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad (6.1a)$$

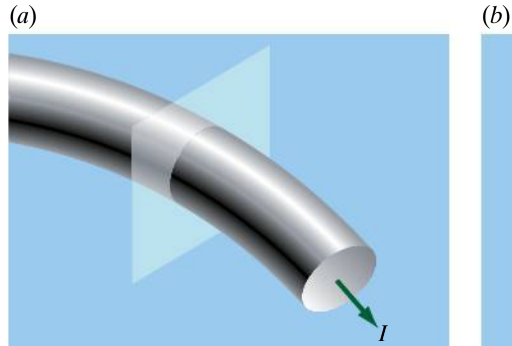
Si ce taux n'est pas constant, l'intensité instantanée du courant électrique I est définie par

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \qquad (6.1b)$$

Le courant électrique est le *débit* d'écoulement des charges à travers une surface. L'unité SI de courant est l'**ampère** (A). D'après l'équation 6.1,

$$1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$$

(*a*) (*b*)



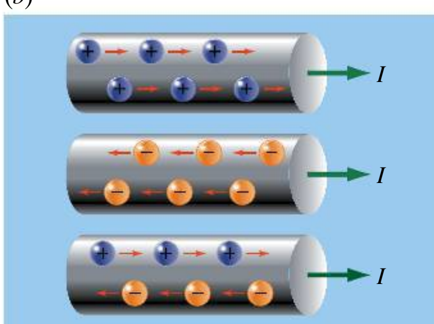


Figure 6.1

(*a*) Un courant est défini comme le débit avec lequel la charge traverse une surface. (*b*) Le courant produit par des particules chargées positives en mouvement dans un sens donné est le même que le courant créé par un nombre égal de particules chargées négatives en mouvement dans le sens opposé ou par une combinaison appropriée des deux. Le courant ne peut donc *pas* être défini comme la simple direction d'écoulement des particules chargées, puisqu'il doit être le même dans ces trois cas.

(Notez que c'est l'ampère qui est une unité SI fondamentale. En d'autres termes, c'est le coulomb qui est formellement défini à partir de l'ampère et non le contraire. Nous verrons à la section 9.2 comment l'ampère, lui, est défini.)

Le *sens* du courant reste à définir. En effet, comme le montre la figure 6.1*b*, il est impossible de simplement définir le sens du courant comme celui des particules chargées. En effet, un même courant peut être engendré de façon équivalente par un flux de particules chargées positivement dans un sens, par un flux de particules chargées négativement dans l'autre sens ou par une combinaison appropriée des deux flux. Ainsi, on suit la convention suivante, qui provient historiquement de la théorie du « fluide » électrique de Franklin :

Sens conventionnel du courant

Le sens conventionnel du courant I est celui du mouvement des charges *positives*.

La convention ci-dessus peut paraître mal choisie si on se limite à étudier des conducteurs métalliques, où les seules particules chargées qui peuvent se déplacer sont négatives donc voyagent *toujours en sens contraire* du courant. Ce sont en effet des **électrons libres**, aussi appelés **électrons de conduction** (voir la section 1.2). Toutefois, ailleurs que dans un conducteur métallique, des particules *positives* peuvent bel et bien se déplacer et entraîner un courant, que ce soit des protons en mouvement dans le vide, des ions positifs dans un gaz ionisé ou dans un **électrolyte** (liquide contenant des ions en solution), des « trous » dans un semi-conducteur (voir la section 11.7 du tome 3) ou encore des protéines ionisées dans un gel d'électrophorèse. De même, des particules chargées négativement autres que des électrons peuvent aussi donner lieu à un courant.

L'avantage de la convention ci-dessus est qu'on peut ignorer complètement la nature des particules chargées si on ne s'intéresse qu'au courant : on peut comprendre chacun des trois cas illustrés à la figure 6.1*b en imaginant qu'une charge positive se déplace dans le sens du courant.*

Il arrive qu'on ignore le sens du courant dans un conducteur, comme ce sera souvent le cas à la section 7.4, et qu'on doive alors définir arbitrairement un sens positif. Il ne faut pas y voir une contradiction avec la convention que nous venons de présenter : une valeur négative du courant signifiera simplement un courant dans le sens opposé à celui qui a été défini comme positif, ce qui ne change pas le fait que, dans un sens ou dans l'autre, le courant peut être constitué de particules positives qui circulent dans le sens du courant, de particules négatives qui circulent en sens inverse ou d'une combinaison des deux.

Les courants qui traversent une membrane cellulaire sont une illustration de cette dernière idée : il arrive que des ions de même signe, par exemple K^+ et Na^+, traversent en des sens inverses (voir le sujet connexe du chapitre 5). On décrète donc que les courants qui quittent la cellule sont positifs et que ceux qui entrent sont négatifs. Mais cela ne change pas le fait, conformément à la convention donnée ci-dessus, qu'un courant positif puisse correspondre à des ions Na^+ qui quittent la cellule ou à des ions Cl^- qui y entrent.

Exemple 6.1

Un courant constant de 1 A circule dans un fil. Combien d'électrons passent en un point donné en 1 s ?

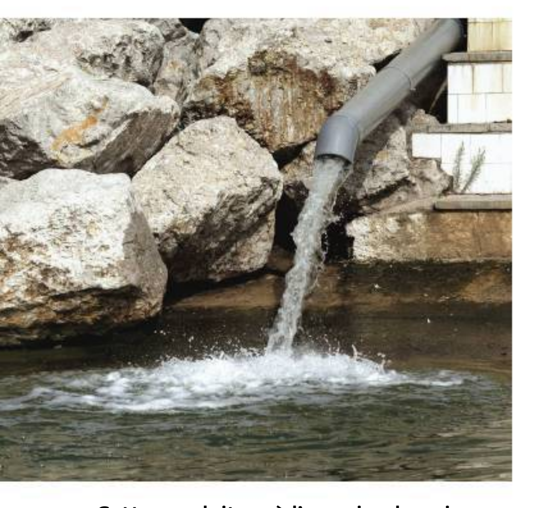
Solution

Le courant étant constant, l'équation 6.1*a* s'applique : $\Delta Q = I\Delta t = (1\ \text{A})\ (1\ \text{s}) = 1\ \text{C}$. Comme $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C, cette charge correspond à $(1\ \text{C})/(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C}) = 6{,}3 \times 10^{18}$ électrons.

Ce nombre peut paraître énorme, mais nous verrons qu'il est minuscule si on le compare au nombre total d'électrons libres que contient le fil.

La cause du courant

Bien que nous ayons défini le courant, nous n'avons pas encore expliqué sa cause. Au tome 1, nous avons vu qu'une particule au repos ne peut se mettre en mouvement que si elle subit une force. Une masse qui déboule une pente en percutant des obstacles, par exemple, « tombe » en raison de son poids. De façon équivalente, on peut dire qu'elle se déplace de façon à diminuer son énergie potentielle gravitationnelle. Collectivement, les électrons ou les autres particules chargées qui se mettent en mouvement dans un fil conducteur ne font pas exception : une charge q subit une force électrique ($\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}$) ou, de façon équivalente, se déplace de façon à diminuer son énergie potentielle électrique ($U = qV$). Le fait que le tout ne se déroule pas dans le vide fait en sorte que la charge qui « tombe » le fait en rencontrant des obstacles, mais cela ne change rien au fait qu'elle « tombe ».



Cette conduite, où l'eau circule uniquement grâce au champ gravitationnel, est analogue à un fil conducteur, où la charge circule uniquement grâce au champ électrique. Plus la conduite est inclinée (plus ses extrémités ont une grande « différence d'altitude »), plus l'eau coule rapidement. De même, plus les extrémités du fil ont une grande différence de potentiel, plus le courant est élevé.

Si le fil conducteur est « débranché », il est à l'équilibre électrostatique, ce qui signifie que le champ $\vec{\mathbf{E}}$ dans le fil est nul et que le potentiel V est une constante dans tout le volume du fil. Les particules chargées ne subissent donc aucune force et restent macroscopiquement immobiles.

Pour qu'un courant circule dans un fil conducteur, on *doit* avoir établi un champ dans le fil ou, ce qui est équivalent, une différence de potentiel le long du fil. (Rappelons que le champ est dirigé des potentiels les plus élevés vers les potentiels les plus faibles.) Pour ce faire, on peut brancher les extrémités de ce fil à une *pile électrique*.

L'analogie entre l'altitude et le potentiel fonctionne toujours (voir la section 4.1) : un peu comme une masse a tendance à tomber vers les endroits de plus basse altitude, une charge *positive* a tendance à « tomber » vers les endroits de plus bas potentiel. Comme le sens conventionnel du courant correspond à celui des particules chargées positivement, on peut écrire :

Sens du courant et potentiel

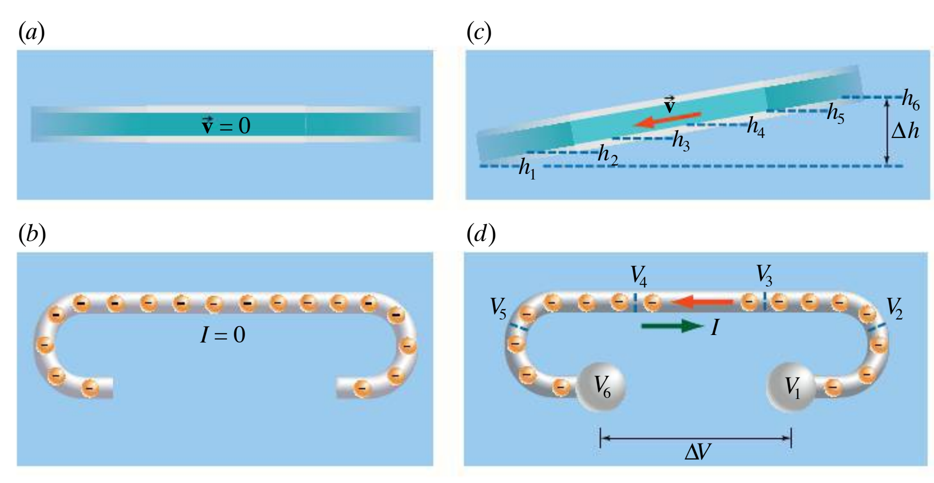
Le courant circule du potentiel le plus élevé vers le potentiel le moins élevé.

De façon équivalente, on peut aussi écrire :

Sens du courant et champ électrique

Le courant circule dans le sens où pointe le champ électrique qui le cause.

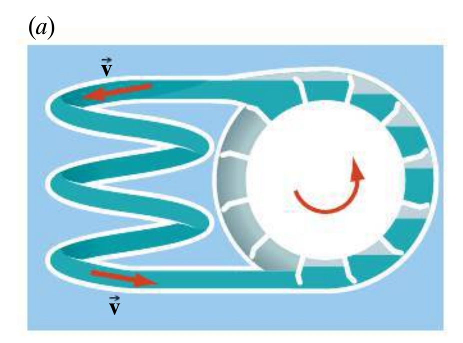
Quand un courant circule dans un fil, c'est un grand nombre de particules chargées qui s'y déplacent, et non une seule. De plus, lorsque la charge pénètre à une extrémité du fil, une quantité égale quitte l'autre extrémité ; le fil lui-même n'acquiert pas une quantité de charge qui croît avec le temps. On peut comparer le mouvement de ces particules chargées à celui des molécules dans un tuyau infiniment long rempli d'eau : quand le tuyau est à l'horizontale (aucune différence de hauteur), il est rempli d'eau immobile (figure 6.2*a*), comme un fil « débranché » (aucune différence de potentiel) est rempli d'une charge macroscopique immobile (figure 6.2*b*). Si on incline le tuyau, de façon à établir une *différence de hauteur* entre deux de ses points, le champ gravitationnel fait en sorte que, malgré le frottement contre les parois, l'eau à toute position le long du tuyau commence simultanément à s'écouler vers le bas (figure 6.2*c*). De même, si on établit une différence de potentiel entre les extrémités du fil, le champ électrique fait en sorte que, malgré les obstacles microscopiques, la charge à toute position le long du fil se met à s'écouler vers le potentiel le plus bas (figure 6.2*d*).

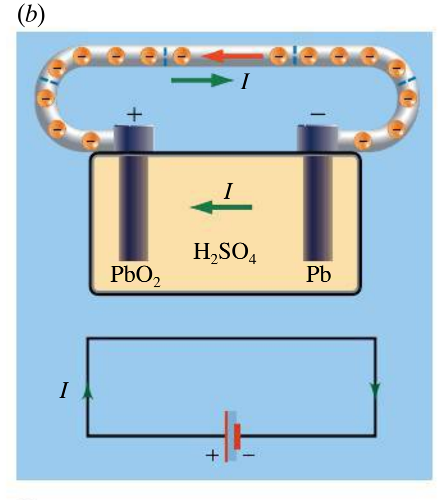


▲ **Figure 6.2**

(*a*) Dans un tuyau infini horizontal, l'eau est immobile. (*b*) De même, dans un fil sans différence de potentiel, la charge est immobile. (*c*) S'il y a une différence de hauteur, l'eau s'écoule vers les hauteurs plus faibles. (*d*) S'il y a une différence de potentiel, la charge s'écoule vers les potentiels plus faibles. Les électrons sont négatifs, alors leur mouvement se fait dans le sens contraire de la circulation du courant.

Dans un tuyau de longueur réelle qui demeure plein d'eau, l'écoulement ne peut être constant que s'il existe un *parcours fermé* muni d'une roue à aubes qu'on actionne pour soulever l'eau du bas du tuyau vers le haut du tuyau (figure 6.3*a*). De façon analogue, pour que le courant électrique continue de circuler dans le fil conducteur, il doit exister un *parcours conducteur fermé* (appelé **circuit électrique**) muni d'une pile électrique qui « ramène » la charge du potentiel bas vers le potentiel élevé (figure 6.3*b*). Cela illustre les deux rôles que joue une pile électrique : 1) produire la différence de potentiel entre les extrémités du fil conducteur ; 2) fournir l'énergie requise pour « soulever » la charge vers le potentiel plus élevé. Nous reviendrons sur le rôle de la pile à la section 7.1.





▲ **Figure 6.3**

(*a*) L'eau circule dans un tuyau de façon constante car la roue à aube la déplace vers une hauteur plus élevée à mesure qu'elle descend. (*b*) Un courant circule dans un fil de façon constante car la pile « soulève » la charge macroscopique vers un potentiel plus élevé à mesure qu'elle « descend ». À la différence de la roue à aube, la pile sert aussi à établir la différence de potentiel entre les extrémités du fil. Le sens conventionnel du courant *I* est dans le sens contraire du mouvement des électrons.

Comme toutes les analogies, celle-ci a des failles. Premièrement, il faut imaginer un tuyau *déjà rempli d'eau* et non un boyau d'arrosage vide qui se remplit après l'ouverture d'un robinet. Deuxièmement, l'eau peut se déplacer dans une conduite sous l'effet de différences de pression, ce qui n'est *pas du tout* analogue au courant électrique : ce n'est *pas* le fait d'insérer de la charge à une extrémité qui « pousse » sur la charge contenue dans le fil ; l'analogie entre débit d'eau et courant n'est donc valable que si l'écoulement de l'eau est *le seul fait de la gravité*. Troisièmement, dans un tuyau, la roue à aubes a pour seul rôle de « soulever » l'eau et non d'incliner le tuyau, alors qu'une pile électrique joue les deux rôles : non seulement elle soulève la charge vers le potentiel plus élevé, mais c'est elle qui *produit la différence de potentiel* entre les extrémités du fil.

Exemple 6.2

Un fil conducteur de 20 cm est branché en ligne droite entre les bornes d'une pile de 12 V, de sorte qu'un champ électrique uniforme apparaît le long du fil. Donner l'énergie potentielle électrique d'un électron (a) à la borne négative, (b) au milieu du fil et (c) à la borne positive. Considérer que la référence de potentiel $V = 0$ est à la borne négative.

Solution

Puisque la borne négative a un potentiel $V = 0$, la borne positive a un potentiel $V_+ = 12$ V. Dans un champ électrique uniforme, le potentiel varie linéairement (voir la section 4.3) de sorte qu'il vaut $V_m = 6$ V au milieu du fil. ■

(a) À la borne négative, l'électron a une énergie nulle, car le potentiel est nul.

(b) On a $U = qV_m = (-e)V_m = (-1{,}60 \times 10^{-19}\ \text{C})(6\ \text{V}) = -9{,}6 \times 10^{-19}$ J.

(c) De même, $U = qV_+ = -1{,}92 \times 10^{-18}$ J.

On aurait pu aussi écrire directement que les trois énergies sont respectivement 0, −6 eV et −12 eV. Peu importe l'unité de mesure utilisée, on voit que l'énergie potentielle de l'électron diminue quand celui-ci se déplace dans le fil. ■

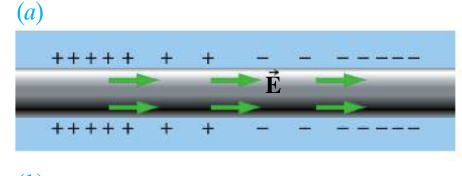
Les charges sources qui produisent le champ électrique dans un fil conducteur

À la figure 6.3*b*, il est facile de concevoir que la pile produit une différence de potentiel et que celle-ci se communique aux extrémités du fil. Il est plus difficile de comprendre pourquoi les équipotentielles ont la forme illustrée. De telles équipotentielles signifient qu'il y a un champ électrique qui conserve en tout point une composante *parallèle au fil*. Un tel champ *ne peut pas* être produit seulement par les charges sources positives et négatives que la pile maintient sur ses bornes.

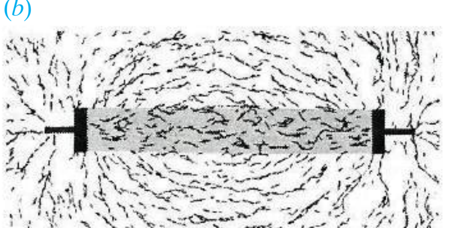
Pour expliquer correctement qu'il y a un champ le long du fil, on doit admettre qu'il y a des charges sources situées sur le fil lui-même : lorsqu'un fil est relié aux bornes d'une pile, une partie de la charge est transmise à la *surface* du fil, selon une densité surfacique de charge qui diminue avec la distance à partir de chaque borne. La figure 6.4*a* montre ces charges de surface et le champ électrique qu'elles produisent pour le cas d'un fil rectiligne ; on voit que le champ dans le matériau métallique est alors *parallèle* au fil. La figure 6.4*b* montre que ce champ s'étend aussi à l'extérieur du fil rectiligne.

Les fils conducteurs sont rarement rectilignes. Lorsque le courant est instauré dans un fil qui présente un virage (figure 6.5), les électrons de conduction s'accumulent rapidement sur la paroi du fil située à l'extérieur du virage et repoussent ensuite les autres qui arrivent. Cette charge locale *s'ajoute* à la distribution de charge décrite à la figure 6.4*a*. La faible force exercée par quelques

(*a*)



(*b*)



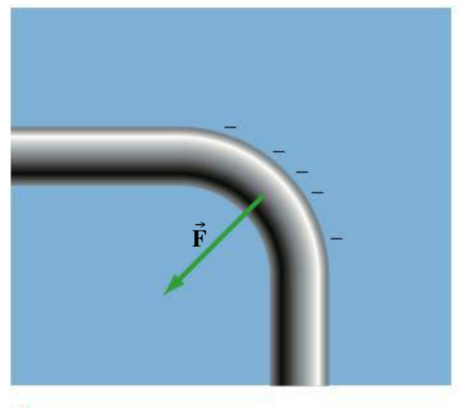


Figure 6.4

(*a*) Un fil relié à une pile acquiert une faible charge de surface non uniforme. Ces charges produisent le champ électrique dans le fil. (*b*) Champ électrique due à une courte longueur de fil rectiligne. À l'intérieur du fil, on voit que le champ est partout parallèle au fil, mais pas à l'extérieur.

Figure 6.5

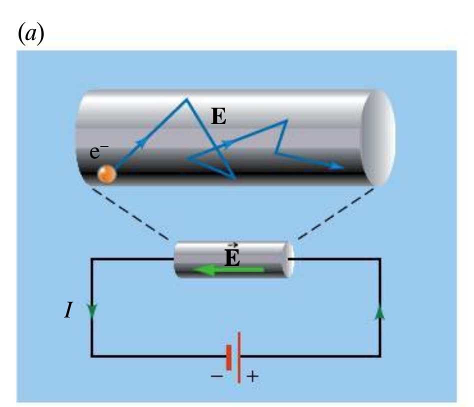
Quand on donne une forme non rectiligne à un fil où circule un courant, quelques électrons s'accumulent rapidement sur la paroi extérieure au virage et « font tourner » les autres qui arrivent ensuite.

électrons suffit à « faire tourner » le courant. Notez que cette situation ne peut s'expliquer que grâce à des charges de surface, et montre de façon éloquente qu'il n'est pas valable d'attribuer le champ électrique dans le fil uniquement à des charges qui resteraient situées sur les bornes de la pile.

La nature du courant dans un fil conducteur

Même si le courant est constant, ce qui signifie que la charge macroscopique se déplace à un taux constant dans le fil, la trajectoire d'un électron de conduction individuel est très désordonnée (figure 6.6*a*). Son mouvement résulte de la superposition de deux phénomènes. Premièrement, les électrons de conduction se comportent un peu comme les molécules de gaz dans un contenant : même en l'absence de différence de potentiel, alors que le conducteur est à l'équilibre macroscopique, ils se déplacent dans tous les sens à vitesse élevée et entrent souvent en collision avec les ions essentiellement immobiles (voir la section 6.5). Le nombre d'électrons qui se déplacent dans un sens donné compense exactement le nombre de ceux qui se déplacent dans le sens opposé. Deuxièmement, lorsqu'on le relie à une pile, un champ électrique apparaît dans le fil. Ce champ fait que, dans son mouvement erratique, chaque électron a *légèrement* tendance à se déplacer dans le sens opposé au champ plutôt que dans l'autre sens. Le mouvement d'un électron de conduction ressemble à celui d'une bille d'acier roulant

(*a*)



(*b*)

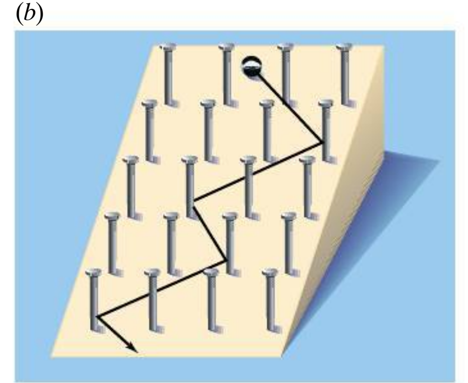


Figure 6.6

(*a*) Les électrons de conduction entrent en collision avec les ions positifs du métal et suivent des trajectoires en zigzag. Lorsqu'on relie une pile, les électrons ont légèrement tendance à se déplacer dans le sens opposé au sens conventionnel du courant. (*b*) Le mouvement des électrons est analogue à celui d'une bille d'acier roulant vers la base d'un plan incliné planté de clous.

sur un plan incliné planté de clous (figure 6.6*b*). Le déséquilibre du flux d'électrons, qui ne représente que près de 1 électron sur 10^4, constitue le courant.

On peut tracer une analogie entre le vent et le courant électrique. Les molécules de l'air ont des vitesses thermiques aléatoires dont la valeur moyenne, à température ambiante, est d'environ 330 m/s. Le vent correspond à un flux de molécules dans un sens donné et sa vitesse, de l'ordre de 10 m/s, est très inférieure aux vitesses aléatoires des molécules. De la même façon, les électrons de conduction dans un fil ont des vitesses thermiques aléatoires pouvant aller jusqu'à 10^6 m/s environ. Lorsqu'on applique une différence de potentiel, ils acquièrent une vitesse de dérive très faible ($\approx 10^{-4}$ m/s) qui se superpose au mouvement thermique aléatoire (voir la prochaine section).

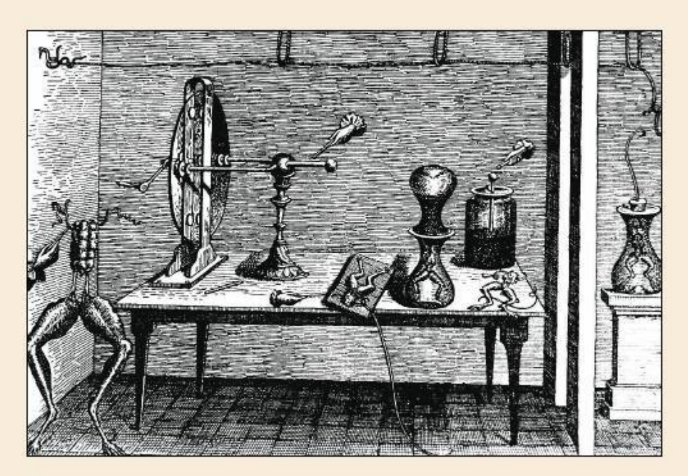
La distinction entre la vitesse instantanée (rapide) et la vitesse de dérive (lente) s'applique aussi quand le conducteur n'est pas un métal. Par exemple, elle s'applique aux protéines ionisées qui dérivent dans un gel d'électrophorèse (voir la section 2.5).

APERÇU HISTORIQUE

La naissance de la pile électrique

L'invention de la pile électrique est un moment important dans l'histoire de la théorie électromagnétique, car les recherches ultérieures purent bénéficier grâce à elle d'une source de courant continu. Cette invention est l'aboutissement d'une succession de découvertes scientifiques, échelonnées sur plus de deux décennies.

La première de ces découvertes, réalisée en 1780, est celle d'un phénomène qui a été baptisé « électricité animale » par le physiologiste Luigi Galvani (1737-1798). La figure 6.7 représente certains des instruments qu'il utilisa pour ses travaux. Il utilisait notamment un générateur électrostatique pour étudier les effets des décharges électriques dans les tissus biologiques. Un jour, après la dissection d'une grenouille, son générateur produisit une étincelle à l'instant où, par hasard, Galvani touchait la grenouille avec son scalpel. Il remarqua avec surprise que les muscles de la grenouille s'étaient contractés plusieurs fois. Les tissus réagissaient ainsi au courant transitoire qui les avait traversés (nous clarifierons le lien entre un courant et la contraction musculaire au sujet connexe de la section 7.3).

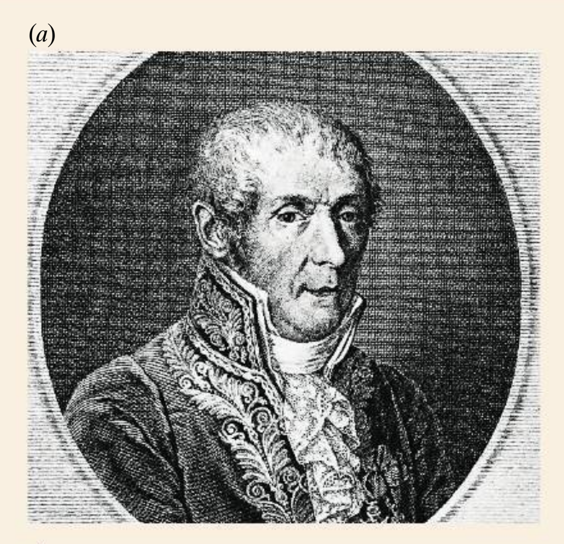


▲ **Figure 6.7**
Une collection d'instruments utilisés par Luigi Galvani (1737-1798) pour étudier « l'électricité animale ».

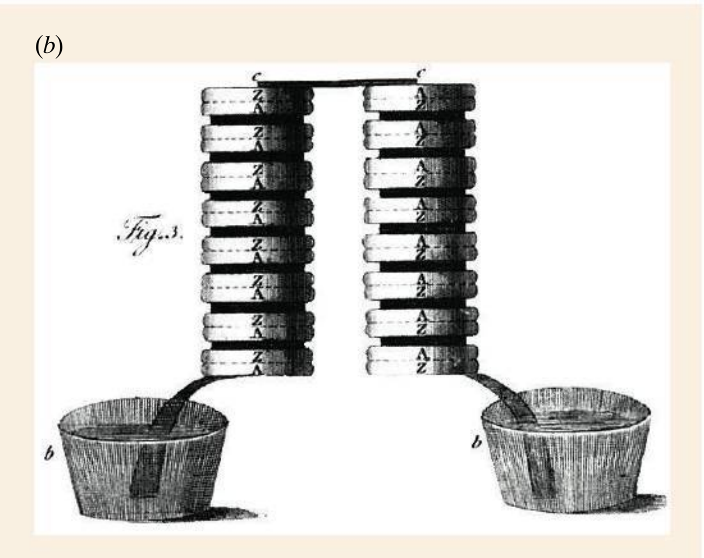
Plus tard, Galvani confirma qu'une cuisse de grenouille, suspendue par un nerf, était animée de contractions saccadées coïncidant avec des éclairs. Cela lui donna l'idée d'utiliser la grenouille pour détecter un phénomène bien connu alors : l'électricité de l'air par beau temps. Il suspendit une grenouille à une tringle en fer et attacha un crochet de laiton à sa moelle épinière. Comme rien ne se passait, il fit un geste impatient et toucha par mégarde la tringle avec le crochet : aussitôt, les muscles se contractèrent plusieurs fois. Il obtint le même effet en plaçant la grenouille sur une table en fer et en mettant le crochet de laiton en contact avec la table. Par la suite, il s'aperçut que d'autres paires de métaux, comme le cuivre et le zinc, produisaient également des contractions.

Aujourd'hui, on interprète ces résultats en disant que le contact de métaux différents provoque une différence de potentiel, laquelle fait circuler un courant dans les tissus biologiques. Mais quand il publia ses résultats en 1791, Galvani donna à ce phénomène le nom d'« électricité animale » : il pensait que la cause résidait dans les tissus biologiques et non la paire de métaux.

(*a*)



(*b*)

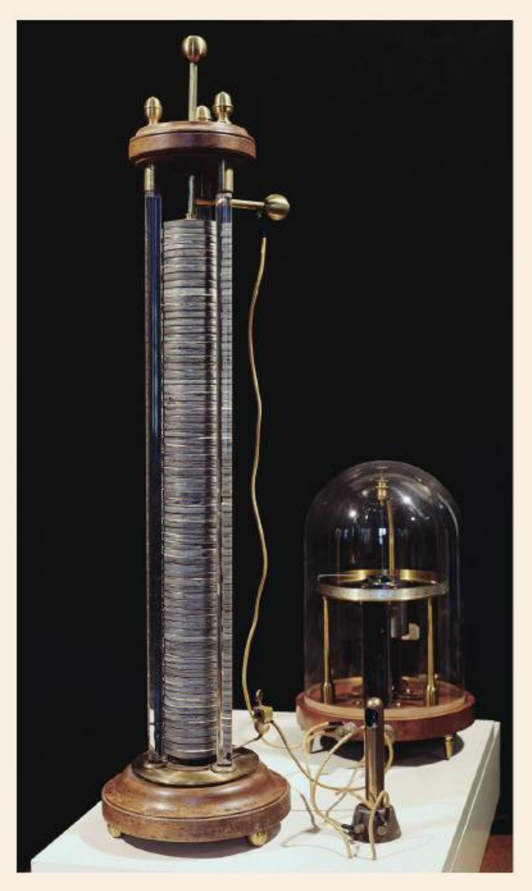


▲ **Figure 6.8**

(*a*) Alessandro Volta (1745-1827). (*b*) Une « pile voltaïque ».

Le physicien Alessandro Volta (figure 6.8*a*) refit l'expérience en admettant tout d'abord la notion d'électricité animale. Il s'aperçut que, en mettant bout à bout les extrémités de deux bandes métalliques, d'argent et de zinc par exemple, et en plaçant les autres extrémités de chaque côté de la langue, on observait un goût et une sensation bien particuliers. Volta utilisa même les différences de goûts produits pour catégoriser les propriétés électriques des métaux. En 1796, il découvrit que des plaques de cuivre et de zinc pouvaient se charger simplement en étant mises en contact. Il finit par changer d'interprétation : il affirma alors que ces effets dépendaient de l'utilisation de *métaux différents en contact* et que le tissu biologique ne jouait que le rôle de milieu conducteur entre ces métaux. Galvani n'était pas d'accord et une certaine controverse l'opposa à Volta.

Pour montrer la supériorité de sa théorie, Volta tenta d'augmenter les différences de potentiel produites en empilant alternativement des disques de cuivre et de zinc, sans parvenir toutefois à obtenir l'effet voulu. Il eut alors une idée d'une importance cruciale. Il était bien connu, depuis l'Antiquité grecque, que la torpille (un poisson) et la gymnote (une anguille) étaient capables de produire des décharges électriques. Volta savait que les organes électriques de ces animaux avaient une structure en couches remplie de fluide. Partant de cette idée, il intercala entre les paires de disques de cuivre et de zinc des rondelles de carton trempées dans une solution saline ou acide. (Nous reviendrons sur les détails du fonctionnement des piles électriques modernes à la section 7.1.) Grâce à ce montage, Volta fut capable de produire des étincelles et de chauffer jusqu'à incandescence des fils assez fins, sans qu'un tissu biologique ne soit présent. En 1799, il publia son invention sous le nom de *pile voltaïque* (figure 6.8*b*). Cette invention, qui tire son nom du fait qu'elle est un simple *empilement*, fut la première source de courant continu. Sans elle, le développement de la théorie électromagnétique au cours du siècle suivant n'aurait pas pu se produire.



Pile de Volta (Musée national des techniques, Paris).

6.2 LA VITESSE DE DÉRIVE ET LA DENSITÉ DE COURANT

Puisque le mouvement aléatoire des électrons de conduction ne contribue pas au courant, nous allons envisager seulement l'effet de la faible vitesse de dérive acquise par les électrons. Cela équivaut à ne considérer que la vitesse de la charge macroscopique. La figure 6.9 représente des électrons de charge $q = -e$ se déplaçant avec une vitesse de dérive moyenne $\vec{\mathbf{v}}_{\rm d}$ le long d'un fil. S'il y a n électrons libres par unité de volume, la charge totale (en valeur absolue) à l'intérieur d'un cylindre de longueur ℓ et d'aire A est égale à $\Delta Q = n(A\ell)e$. Cette charge met un temps $\Delta t = \ell/v_{\rm d}$ pour franchir une distance ℓ et donc traverser entièrement l'extrémité du cylindre. L'intensité du courant, donnée par $I = \Delta Q/\Delta t$, est donc

▲ **Figure 6.9**
Pour calculer le courant en fonction du mouvement des électrons, on néglige leur mouvement aléatoire et on ne tient compte que de la faible vitesse de dérive acquise par le «gaz d'électrons libres» dans son ensemble.

Relation entre le courant et la vitesse de dérive

$$I = nAev_{\rm d} \tag{6.2}$$

Cette équation suppose qu'il y a un seul type de particules chargées qui sont à l'origine du courant et qu'elles ont une charge $q = \pm e$. Sinon, il faut simplement adapter la démonstration que nous venons d'en donner.

Exemple 6.3

Un fil de cuivre transporte un courant de 10 A. L'aire de sa section transversale est égale à 0,05 cm^2. Calculer (a) le nombre d'électrons libres par unité de volume; (b) le module de leur vitesse de dérive. La masse volumique du cuivre est $\rho = 8{,}9$ g/cm^3, la masse molaire est $M = 63{,}5$ g/mol et chaque atome de cuivre possède un électron libre par atome.

Solution

(a) Le nombre d'électrons libres est égal au nombre d'atomes, donc on doit d'abord trouver le nombre d'atomes par unité de volume, $n_{\rm a}$. Selon les données disponibles,

$$\begin{aligned} n_{\rm a} &= \left(\frac{\text{nbre d'atomes}}{\text{masse}}\right)\left(\frac{\text{masse}}{\text{volume}}\right) \\ &= \left(\frac{\text{nbre d'atomes}}{\text{nbre de moles}}\right)\left(\frac{\text{nbre de moles}}{\text{masse}}\right)\left(\frac{\text{masse}}{\text{volume}}\right) \\ &= N_{\rm A} \qquad \frac{1}{M} \qquad \rho \end{aligned}$$

En substituant dans l'équation le nombre d'Avogadro $N_{\rm A} = 6{,}02 \times 10^{23}$ atomes/mol, la masse molaire $M = 63{,}5$ g/mol et la masse volumique $\rho = 8{,}9$ g/cm^3 $= 8{,}9 \times 10^3$ kg/m^3, on trouve

$$\begin{aligned} n_{\rm a} &= \frac{(8{,}9 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(6{,}02 \times 10^{23} \text{ atomes/mol})}{63{,}5 \times 10^{-3} \text{ kg/mol}} \\ &= 8{,}43 \times 10^{28} \text{ atomes/m}^3 \end{aligned}$$

Dans le cuivre, chaque atome cède un électron au gaz d'électrons libres et le nombre que nous venons de trouver est donc égal à n, le nombre d'électrons libres par unité de volume. ■

(b) D'après l'équation 6.2, le module de la vitesse de dérive est

$$\begin{aligned} v_{\rm d} &= \frac{I}{nAe} \\ &= \frac{10 \text{ A}}{(8{,}43 \times 10^{28} \text{ m}^{-3})(5 \times 10^{-6} \text{ m}^2)(1{,}6 \times 10^{-19} \text{ C})} \\ &= 1{,}48 \times 10^{-4} \text{ m/s} \end{aligned}$$

La vitesse avec laquelle le gaz d'électrons dans son ensemble circule dans le fil est extrêmement faible.

L'exemple précédent montre que, pour les courants et les grosseurs de fils usuels, la vitesse de dérive est extrêmement petite. À des vitesses de dérive inférieures à 1 mm/s, les électrons prennent plusieurs dizaines de minutes pour parcourir 1 m de fil. Or, quand on branche un appareil électrique, il se met à fonctionner de façon presque instantanée. Cela confirme qu'il ne faut pas

imaginer que les électrons qui entrent par une extrémité du fil doivent parvenir à l'appareil avant que celui-ci se mette à fonctionner. Au contraire, le rôle de la pile est d'établir une différence de potentiel (c'est-à-dire un champ électrique) qui met en mouvement *tous* les électrons libres que *contient déjà* le fil conducteur. Quand on branche un fil à une pile, le potentiel est modifié (c'est-à-dire que le champ électrique est établi) à la façon d'une vague qui part de chaque borne de la pile et se propage à une vitesse proche de celle de la lumière (300 000 km/s) vers le milieu du fil. Tous les électrons libres commencent donc *presque simultanément* à subir une force électrique qui les fait dériver. C'est pourquoi l'analogie gravitationnelle évoquée à la section précédente reposait sur le fait que les tuyaux étaient *déjà pleins* d'eau : si un tel tuyau est posé sur le sol et qu'on soulève une de ses extrémités, l'eau située en chaque point du tuyau se met simultanément à couler vers le bas. On n'a pas à attendre que l'eau du haut du tuyau atteigne l'extrémité du bas pour que de l'eau commence à en sortir.

La densité de courant

D'après l'équation 6.2, le courant dépend de l'aire transversale A du fil conducteur. Nous définissons maintenant la *densité de courant*, une grandeur qui ne dépend pas de la géométrie du fil, et dont la valeur (moyenne) est le courant par unité d'aire :

$$J = \frac{I}{A} \qquad (6.3)$$

L'unité SI de densité de courant est l'ampère par mètre carré (A/m^2). Alors que le courant est un scalaire, la densité de courant est une grandeur vectorielle parallèle à la vitesse de dérive, mais dont l'orientation est fixée par celle du courant. D'après l'équation 6.2,

$$\vec{\mathbf{J}} = nq\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{d}} \qquad (6.4)$$

Dans un conducteur métallique, on a $\vec{\mathbf{J}} = -ne\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{d}}$. On constate alors que $\vec{\mathbf{J}}$ est opposée à $\vec{\mathbf{v}}_{\mathrm{d}}$, car $q = -e < 0$.

On note que le courant I est un scalaire mesuré à l'échelle macroscopique ; il est défini en fonction de la charge traversant une surface. La densité de courant $\vec{\mathbf{J}}$ est plutôt un vecteur exprimé en fonction de grandeurs microscopiques et peut varier d'un point à l'autre, par exemple si le fil n'a pas une section uniforme ou est fait d'un matériau dont les propriétés ne sont pas les mêmes en chaque endroit. Si la densité de courant n'est pas uniforme, le courant traversant une surface est donné par $I = \int \vec{\mathbf{J}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{A}}$. Ainsi, de façon générale, on peut dire que I est le flux de $\vec{\mathbf{J}}$ au travers de la section du fil.

6.3 LA RÉSISTANCE

En 1729, Stephen Gray fit la distinction entre les isolants et les conducteurs, mais, faute d'instruments adéquats, ne put comparer quantitativement les propriétés conductrices de différents matériaux. Les premiers progrès en cette matière furent réalisés en 1772 par Henry Cavendish. Dans une de ses expériences, il fit passer la décharge d'une bouteille de Leyde dans des tubes d'eau pure et d'eau de mer. En modifiant les longueurs des tubes de manière à obtenir des décharges de même intensité (qu'il mesurait en utilisant son corps en guise de détecteur), il s'aperçut « qu'une solution saturée d'eau de mer conduit 720 fois mieux que l'eau douce ». Il essaya également de comparer le pouvoir conducteur

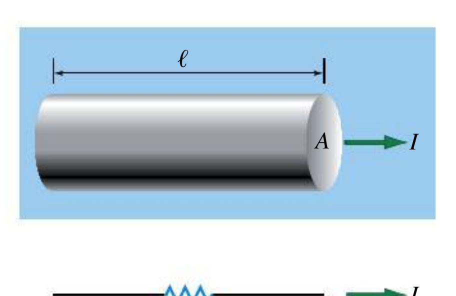
de différents métaux en tenant à deux mains des longueurs connues de fil dans lesquelles il faisait passer une décharge.

Supposons qu'un courant I circule dans un conducteur lorsqu'on applique une différence de potentiel ΔV entre deux points*. La **résistance** du conducteur entre ces points est définie par

Définition de la résistance électrique

$$R = \frac{\Delta V}{I} \tag{6.5}$$

L'unité SI de résistance est l'**ohm** (Ω). D'après l'équation 6.5, on voit que 1 Ω = 1 V/A. L'équation 6.5 est une simple définition qui ne signifie *pas* que la résistance d'un conducteur donné est une constante. Par exemple, nous verrons que la résistance dépend de la température et peut parfois dépendre de la différence de potentiel, du sens du courant ou de son intensité.



▲ **Figure 6.10**

Le courant circulant dans un fil auquel est appliquée une différence de potentiel donnée dépend de la longueur, de l'aire de la section du fil et de la résistivité du matériau dont il est fait. Ces caractéristiques physiques du fil déterminent donc sa résistance.

Dans tous les cas, la résistance d'un conducteur dépend du matériau dont il est fait ainsi que de ses caractéristiques géométriques (dimensions et forme). Afin de déterminer l'influence des caractéristiques géométriques sur la résistance, considérons des fils conducteurs identiques de longueur ℓ et de section A dont on suppose que la résistance a la valeur constante R_0 (figure 6.10). Si on applique une différence de potentiel ΔV entre les extrémités de l'un des fils, un courant $I_0 = \Delta V/R_0$ le traverse (équation 6.5).

Si on prend deux de ces fils identiques, qu'on les relie *bout à bout* et qu'on applique une différence de potentiel ΔV entre les extrémités de l'ensemble, la différence de potentiel aux bornes de chacun des fils égale $\Delta V/2$; par l'équation 6.5, le courant dans chaque fil est $I_0/2$. C'est aussi la valeur du courant total, puisque le même courant passe successivement par les deux fils. Si on considère l'ensemble des deux fils, le courant est divisé par 2 bien qu'on applique la différence de potentiel ΔV: la résistance de l'ensemble égale donc $2R_0$. On détermine ainsi que la résistance est directement proportionnelle à la longueur d'un fil.

Si on prend deux fils identiques, qu'on les place *un à côté de l'autre* et qu'on applique une différence de potentiel ΔV entre les extrémités de l'ensemble, la différence de potentiel aux bornes de chacun des fils égale encore ΔV. Le courant dans chaque fil est encore I_0, et le courant total vaut donc $2I_0$. Le courant étant multiplié par 2 bien qu'on applique la différence de potentiel ΔV, la résistance de l'ensemble des deux fils vaut $R_0/2$. Or, deux fils placés côte à côte sont équivalents à un fil dont la section est 2 fois plus grande. On détermine ainsi que la résistance est inversement proportionnelle à la section du fil.

L'analyse que nous venons de faire nous permet d'affirmer que la résistance d'un fil de longueur ℓ et de section A équivaut à

Relation entre la résistance et la résistivité

$$R = \frac{\rho \ell}{A} \tag{6.6}$$

* Pour que l'équation 6.5 puisse être utilisée, on évalue toujours ΔV dans le sens où elle est positive. En effet, le courant I et la résistance R sont toujours des quantités positives. Pour alléger la notation, nous éviterons d'écrire $R = |\Delta V|/I$.

où ρ est une constante de proportionnalité que l'on appelle **résistivité** et qui dépend du matériau dont est fait le fil. Dans le SI, elle s'exprime en ohms-mètres (Ω·m) ; le tableau 6.1 donne quelques valeurs types de ρ. On définit aussi la **conductivité** $\sigma = 1/\rho$. Un bon conducteur électrique a une faible résistivité et une conductivité élevée. *(Attention de ne pas confondre : Les mêmes symboles ρ et σ sont aussi utilisés, respectivement, pour désigner la densité volumique et surfacique de charge statique. De plus, le symbole ρ est aussi utilisé pour désigner la masse volumique, comme à l'exemple 6.3. Ces grandeurs n'ont aucun lien avec la résistivité et la conductivité. La signification de ces symboles doit donc être interprétée selon le contexte.)*

Pour obtenir l'équation 6.6, nous avons fait l'hypothèse que la résistance d'un fil donné est une constante. Mais cette équation s'applique aussi quand la résistance dépend de la température, car c'est en fait la résistivité qui est affectée par la température.

Tableau 6.1
Résistivités à 20 °C

Matériau	Résistivité ρ (Ω·m)	Coefficient thermique de résistivité α (°C^{-1})
Mica	2×10^{15}	-50×10^{-3}
Verre	$10^{12} - 10^{13}$	-70×10^{-3}
Caoutchouc dur	10^{13}	
Silicium	2200	−0,7
Germanium	0,45	−0,05
Carbone (graphite)	$3{,}5 \times 10^{-5}$	$-0{,}5 \times 10^{-3}$
Nichrome	$1{,}2 \times 10^{-6}$	$0{,}4 \times 10^{-3}$
Manganin	44×10^{-8}	5×10^{-7}
Acier	40×10^{-8}	8×10^{-4}
Platine	11×10^{-8}	$3{,}9 \times 10^{-3}$
Aluminium	$2{,}8 \times 10^{-8}$	$3{,}9 \times 10^{-3}$
Cuivre	$1{,}7 \times 10^{-8}$	$3{,}9 \times 10^{-3}$
Argent	$1{,}5 \times 10^{-8}$	$3{,}8 \times 10^{-3}$

Exemple 6.4

Le rayon d'un fil de cuivre de calibre 8 est égal à 1,63 mm. On applique une différence de potentiel de 0,06 V entre les extrémités d'un segment de 20 m de ce fil. Trouver : (a) sa résistance ; (b) le courant.

Solution

(a) D'après le tableau 6.1, la résistivité du cuivre est $\rho = 1{,}7 \times 10^{-8}$ Ω·m. L'aire de la section transversale est $A = \pi r^2$. L'équation 6.6 donne donc

$$R = \frac{\rho\ell}{A} = \frac{(1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m})(20\ \text{m})}{\pi(1{,}63 \times 10^{-3}\ \text{m})^2} = 0{,}0407\ \Omega$$

(b) Le courant est $I = \Delta V/R = (0{,}06\ \text{V})/(0{,}0407\ \Omega) = 1{,}47$ A.

Comme nous l'avons fait dans le cas du courant (équation 6.3), nous allons maintenant écrire une version de l'équation 6.5 qui ne dépend pas de la géométrie. Dans un milieu conducteur simple, on peut combiner successivement les équations 6.3, 6.5 et 6.6, d'où

$$J = \frac{I}{A} = \frac{\Delta V}{RA} = \frac{\Delta V}{\rho \ell} \tag{6.7}$$

Puisque le champ électrique dans le fil correspond à $E = \Delta V/\ell$ (voir l'équation 4.10*b*), on peut écrire la relation vectorielle

$$\vec{\mathbf{J}} = \frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{E}} = \sigma\vec{\mathbf{E}} \tag{6.8}$$

La démonstration que nous venons de faire aurait pu s'appliquer à un segment infinitésimal de conducteur pour lequel ℓ et A tendent vers zéro, de sorte que l'équation 6.8 relie la densité de courant *en un point* avec sa cause, le champ électrique *en ce point*.

L'équation 6.8 peut être considérée comme une *définition* de la résistivité ρ (ou de la conductivité σ). En effet, on aurait pu débuter par l'équation 6.8 et suivre le raisonnement en sens inverse pour obtenir l'équation 6.5. L'équation 6.8 ne sous-entend *pas* que la résistivité d'un matériau est constante.

L'équation 6.8 peut être appliquée à tous les matériaux, y compris les gaz ionisés, les électrolytes, etc. Elle peut aussi être appliquée aux isolants, dans la mesure où on s'intéresse au faible courant de fuite qui peut les traverser (voir les isolants au tableau 6.1). Le vide a une conductivité nulle : aucune densité de courant ne résulte quand on y applique un champ électrique.



Variation de la résistivité en fonction de la température

On mesure que la résistivité d'un matériau dépend généralement de la température. Voici comment la résistivité ρ d'un métal à la température T s'exprime en fonction de la résistivité ρ_0 à une température de référence T_0 :

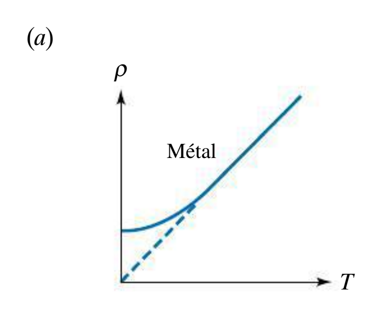
$$\rho = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \tag{6.9}$$

où α est le **coefficient thermique de résistivité**, mesuré en degrés Celsius à la puissance moins un ($°C^{-1}$). L'équation 6.9 est valable uniquement dans une plage de températures bien définie. La figure 6.11*a* montre comment la résistivité d'un métal type varie en fonction de la température, l'équation 6.9 ne représentant que la portion linéaire de la courbe.

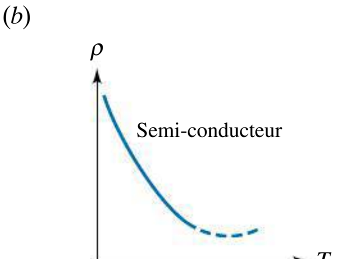
Selon la physique classique, c'est la combinaison de plusieurs phénomènes qui expliquerait la forme de la courbe à la figure 6.11*a*. Tout d'abord, les électrons entrent en collision avec les ions positifs du réseau cristallin. Or, ces ions vibrent autour de leurs positions d'équilibre. Au fur et à mesure que la température s'élève, l'amplitude des vibrations augmente et gêne de plus en plus l'écoulement des électrons. De plus, ceux-ci ont une agitation thermique plus grande, ce qui contribue aussi à les faire entrer plus fréquemment en collision avec les ions du réseau. Il n'est donc pas surprenant que la résistivité d'un métal augmente avec la température. Les explications classiques sont toutefois insuffisantes pour prédire quantitativement la forme de cette courbe quand la température décroît vers 0 K. Une explication valable exigerait le recours à un modèle plus élaboré, fondé sur la physique quantique (qui fait l'objet de plusieurs chapitres du tome 3).

Deux autres types de matériaux méritent d'être mentionnés ici. La résistivité des **semi-conducteurs** purs, comme le silicium, le germanium et le carbone, diminue lorsque la température augmente (figure 6.11*b*). Ce phénomène est lié à l'augmentation du nombre d'électrons qui deviennent libres et participent à la

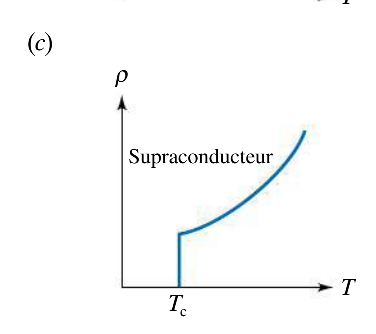
(*a*)



(*b*)



(*c*)



▲ **Figure 6.11**

(*a*) La résistivité d'un métal normal varie linéairement avec la température sur une large plage de températures. Selon la physique classique, la valeur non nulle de la résistivité à $T = 0$ K est due aux collisions des électrons avec les impuretés et les imperfections. (*b*) La résistivité d'un semi-conducteur pur diminue lorsque la température augmente parce que davantage de porteurs de charge se libèrent et prennent part à la conduction. (*c*) La résistivité d'un supraconducteur s'annule brutalement à une température critique qui dépend du matériau.

conduction. Bien qu'elles permettent d'interpréter la courbe de la figure 6.11*b*, ces explications classiques sont encore une fois insuffisantes sur le plan quantitatif. Une caractéristique encore plus intéressante des semi-conducteurs est que l'on peut agir sur leur résistivité en ajoutant certaines impuretés au matériau pur. C'est cette propriété qui est utilisée dans la fabrication des transistors et des circuits intégrés. Dans d'autres matériaux, appelés **supraconducteurs**, la résistivité devient nulle en dessous d'une température critique T_c (figure 6.11*c*). Lorsqu'un courant est établi dans un supraconducteur, il persiste indéfiniment à condition que la basse température soit maintenue. Les semi-conducteurs et les supraconducteurs sont étudiés de manière plus détaillée au chapitre 11 du tome 3.

Exemple 6.5

La résistance d'un thermomètre à résistance de platine augmente de 75 Ω à 80 Ω. Quelle est la variation de température ayant causé ce changement ?

Solution

Si l'on suppose que les dimensions du fil n'ont pas changé sous l'effet de la variation de température, on peut réécrire l'équation 6.9 en fonction de la résistance comme suit :

$$R = R_0(1 + \alpha\Delta T)$$

Donc,

$$\Delta T = \frac{R - R_0}{\alpha R_0} = 17{,}1\,°\text{C}$$

où on a utilisé $\alpha = 3{,}9 \times 10^{-3}\,°\text{C}^{-1}$, valeur tirée du tableau 6.1.

6.4 LA LOI D'OHM

En 1827, Georg Ohm (figure 6.12) établit une relation expérimentale qui est valable pour la plupart des conducteurs. En termes actuels, la **loi d'Ohm** stipule que

Loi d'Ohm

Le courant qui traverse un dispositif est directement proportionnel à sa cause, la différence de potentiel entre les bornes de ce dispositif.

Dans cet énoncé, le dispositif peut être un simple fil mais aussi toute une portion de circuit électrique. Mathématiquement, cette loi peut s'écrire

Loi d'Ohm

$$\Delta V = RI \qquad (6.10)$$

où R est une constante. Pour éviter une difficulté conceptuelle, il serait préférable d'écrire l'équation 6.10 sous la forme $I = \Delta V/R$, car c'est ΔV qui est la cause et I qui est l'effet, et non l'inverse. La forme $\Delta V = RI$ est toutefois plus répandue*.

▲ **Figure 6.12**
Georg Simon Ohm (1789-1854).

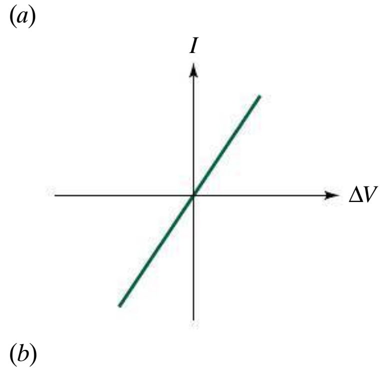
* De la même façon, on écrit $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$ et non $\vec{\mathbf{a}} = \Sigma\vec{\mathbf{F}}/m$, bien que la seconde forme exprime mieux que c'est l'accélération qui est la conséquence de la force et non l'inverse.

Dans le contexte d'un circuit, le mot **tension** est souvent employé pour désigner la différence de potentiel aux bornes d'un composant, par exemple dans le contexte d'application de la loi d'Ohm. Nous considérerons ces deux termes comme des synonymes. On rencontre aussi le mot *voltage*, qui veut dire la même chose, mais il s'agit d'un anglicisme.

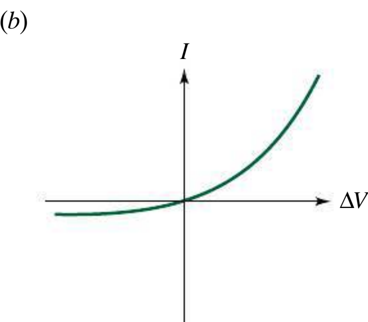
L'équation 6.10 semble identique à la définition de la résistance (équation 6.5), mais il n'en est rien : ici, on part du fait que *R est une constante*, indépendante de ΔV ou de I. Les matériaux pour lesquels la résistance est constante sont appelés *ohmiques*, car leur comportement est décrit par la loi d'Ohm ; les autres matériaux sont *non ohmiques*.

Puisque ΔV et I sont des grandeurs mesurées à l'échelle macroscopique, l'équation 6.10 est appelée forme macroscopique de la loi d'Ohm, à condition que R soit constante, indépendante de ΔV ou de I. L'équation 6.8 ($\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{E}}/\rho$) est appelée forme microscopique de la loi d'Ohm, à condition que ρ soit constante, indépendante de J ou de E. La section précédente a montré que ces deux équations sont en effet équivalentes. La première est due à Ohm, alors que la seconde a été formulée par Gustav Kirchhoff (1824-1887).

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 6.13**

La relation entre I et ΔV pour (*a*) un conducteur ohmique et (*b*) pour une diode à jonction, qui est un dispositif non ohmique. La portion négative des graphiques correspond à une inversion du sens du courant.

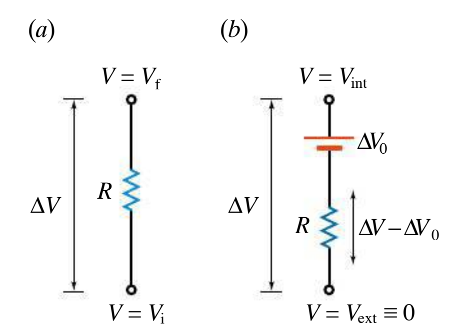
La relation entre I et ΔV pour un dispositif ohmique est représentée graphiquement par une droite (figure 6.13*a*). Dans la pratique, la condition en vertu de laquelle la résistance (ou la résistivité) doit être constante est satisfaite dans les métaux, pourvu que la température soit maintenue constante. Dans certains cas (certains alliages ou le carbone), la loi d'Ohm est vérifiée même lorsque la température varie à l'intérieur d'une plage donnée. Un matériau comme celui des filaments de grille-pain ne respecte pas la loi d'Ohm : en raison de la température, sa résistance croît sensiblement quand le courant augmente. Une fois qu'une température stable est atteinte, on peut toutefois le considérer comme ohmique. La relation entre I et ΔV pour un dispositif *non ohmique* n'est pas représentée par une droite. L'équation $R = \Delta V/I$ peut être utilisée comme une définition de la résistance en tout point sur de telles courbes, mais puisqu'elle n'est pas constante, l'objet n'obéit *pas* à la loi d'Ohm. La figure 6.13*b* donne l'exemple d'une diode à jonction (voir la section 11.8 du tome 3). On y voit que la résistance d'une diode dépend du sens de circulation du courant. La pile électrique est un autre dispositif non ohmique : si on essaie d'y faire circuler un courant, par exemple pour la recharger, celui-ci ne sera pas proportionnel à la différence de potentiel appliquée (voir la section 7.1), de même que la bougie d'allumage (la résistance du gaz entre les électrodes, d'abord élevée, devient très faible quand le gaz s'ionise, puis décroît avec l'intensité du courant). Même dans un métal ordinaire, des phénomènes non ohmiques divers, autres que ceux dus au changement de température, apparaissent si le métal est soumis à un champ électrique extrême.

Dans cet ouvrage, on considère que tous les conducteurs métalliques ont une résistance constante, sauf mention du contraire. En particulier, on néglige les effets des changements de température sauf quand le contexte dit l'inverse.

Les solutions aqueuses qui composent l'intérieur et l'extérieur de cellules vivantes sont essentiellement des matériaux ohmiques. Le sujet connexe à la fin de cette section décrira les conséquences d'y faire circuler un courant trop important.

Toutefois, les canaux ioniques qui traversent les membranes ne sont *pas* ohmiques, puisqu'une espèce ionique donnée y circule *à la fois* en raison de la différence de potentiel ΔV de part et d'autre de la membrane et de la différence de concentration ($c_{\text{int}}/c_{\text{ext}} \neq 1$) de cette espèce ionique de part et d'autre de la membrane

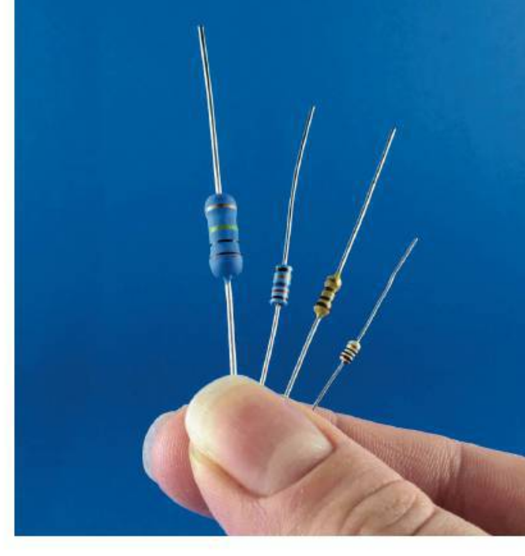
(voir la figure 5.27, p. 196). Ainsi, le courant qui traverse les canaux n'est *pas* proportionnel à ΔV. Plus précisément, pour un rapport $c_{\text{int}}/c_{\text{ext}}$ donné d'une espèce ionique de charge q, il existe une valeur de $\Delta V = \Delta V_0$ qui fait en sorte que le courant de cette espèce ionique est nul*. Le courant qui s'écoule est donc d'autant plus important que la *différence* $\Delta V - \Delta V_0$ est grande. Un modèle simple consiste à considérer qu'il est proportionnel à cette différence, ce qui présente un avantage: celui de pouvoir se représenter les canaux comme une résistance en série avec une pile (figure 6.14). Ce modèle est couramment utilisé dans des simulations informatiques de cellules musculaires ou nerveuses. ●



▲ **Figure 6.14**

Le courant traversant un milieu ohmique est $I = \Delta V/R$, R étant une constante. (*b*) Le courant (d'une espèce ionique donnée) traversant une membrane est approximativement $I = (\Delta V - \Delta V_0)/R$, où R dépend de la proportion des canaux qui sont ouverts.

Une *résistance*, aussi appelée *résisteur* (figure 6.15), est un dispositif simple qui possède une résistance donnée et qu'on peut insérer dans un circuit électrique. On peut en confectionner à l'aide d'un fil fin ou d'une plaque de céramique. Comme la résistivité du carbone est pratiquement constante sur une grande plage de températures, on l'utilise souvent dans la fabrication des résistances. Dans ce chapitre et le suivant, nous supposerons que les résistances obéissent à la loi d'Ohm (équation 6.10). On peut utiliser une résistance pour agir sur le courant qui circule dans une branche donnée d'un circuit. Deux résistances placées en série peuvent servir à diviser une différence de potentiel fixe, comme celle créée par une pile, en différences de potentiel plus petites dont on a besoin pour d'autres éléments, comme des transistors. On peut obtenir une différence de potentiel variable au moyen d'un contact qui glisse sur un fil. Nous reviendrons sur de telles situations lors de notre étude des circuits, au prochain chapitre.



▲ **Figure 6.15**

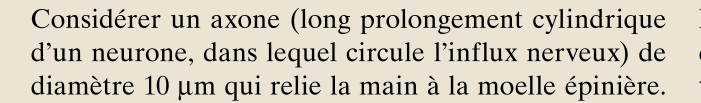
Une résistance est un dispositif, souvent en carbone, qu'on ajoute dans un circuit pour en augmenter la résistance. (L'usage veut malheureusement qu'on utilise le même mot pour désigner à la fois la composante et sa propriété électrique.)

Quelques erreurs conceptuelles fréquentes

Les erreurs conceptuelles fréquentes au sujet des circuits se manifestent souvent dans le vocabulaire utilisé. Tout d'abord, il faut comprendre que le courant *traverse* une résistance lorsqu'il existe une différence de potentiel *aux bornes* de cette résistance. En particulier, *le potentiel ne se déplace pas le long du fil*. L'analogie entre le potentiel et la hauteur peut faciliter la compréhension de cette nuance.

Une autre erreur fréquente consiste à imaginer que le courant est «consommé» quand il traverse une résistance. Il est juste que la charge perd de l'énergie potentielle électrique qui est convertie en énergie thermique. Malgré tout, la charge qui entre à l'une des extrémités est exactement égale à celle qui sort à l'autre extrémité. S'il n'en était pas ainsi, le principe de conservation de la charge serait violé ou la résistance acquerrait une charge sans cesse croissante et produirait un champ électrique dont les effets se feraient inévitablement sentir aux environs du circuit! Davantage d'erreurs conceptuelles seront décrites à la section 7.4.

Exemple 6.6



Considérer un axone (long prolongement cylindrique d'un neurone, dans lequel circule l'influx nerveux) de diamètre 10 µm qui relie la main à la moelle épinière. Le milieu aqueux intérieur de l'axone a une résistivité de 1,1 Ω·m. (a) Estimer la résistance entre les extrémités de l'axone. (b) En réponse à un stimulus (choc sur

* Puisque la traversée de la membrane vers le côté plus concentré représente alors une barrière d'énergie $q\Delta V_0$, celle-ci est reliée au rapport de concentration par le facteur de Boltzmann (voir la section 18.6 du tome 1): $c_{\text{int}}/c_{\text{ext}} = \exp(-q\Delta V_0/kT)$ ou encore $\Delta V_0 = -(kT/q)\ln(c_{\text{int}}/c_{\text{ext}})$, où $k = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K est la constante de Boltzmann.

la main), le potentiel intérieur de l'axone augmente localement de 100 mV. Si on considère l'axone comme un conducteur ordinaire, quel courant cela cause-t-il d'une extrémité à l'autre ?

Solution

(a) La distance entre la main et la moelle épinière est de l'ordre de 1 m. On a donc

$$R = \frac{\rho \ell}{A} = \frac{(1{,}1\ \Omega \cdot \text{m})(1\ \text{m})}{\pi (5 \times 10^{-6}\ \text{m})^2} = 1{,}4 \times 10^{10}\ \Omega$$

(b) La loi d'Ohm donne $I = \Delta V/R = (0{,}1\ \text{V})/(1{,}4 \times 10^{10}\ \Omega) = 7{,}1 \times 10^{-12}\ \text{A} = 7{,}1\ \text{pA}$.

Ce courant est environ 10^3 fois plus petit que celui réellement mesuré, ce qui montre que l'axone n'est *pas* un conducteur ordinaire. Dans un axone réel, de la charge supplémentaire traverse la membrane vers l'intérieur quand l'influx nerveux circule ; les courants le long de l'axone demeurent *locaux* (voir le sujet connexe du chapitre 5). ■

Exemple 6.7

On établit une différence de potentiel ΔV entre les extrémités d'un fil cylindrique de résistivité ρ, de longueur L, et ayant une section transversale uniforme d'aire A. Trouver (a) le module du champ électrique dans le fil, (b) la densité de courant. Que deviennent les réponses si on remplace le fil par un fil identique, mais (c) deux fois plus long ; (d) de rayon deux fois plus grand ?

Solution

Le courant est le même du début à la fin du fil. La section transversale étant uniforme, la densité de courant est la même en chaque point du fil. Puisque la densité de courant et le champ électrique en un même point sont proportionnels entre eux ($\vec{\mathbf{J}} = \frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{E}}$), le champ est donc le même en chaque point du fil. ■

(a) Le champ électrique étant uniforme, son module est $E = \Delta V/L$ (équation 4.10*b*).

(b) La forme microscopique de la loi d'Ohm donne directement $J = E/\rho$.

(c) Dans un fil deux fois plus long, le champ est deux fois plus faible (la différence de potentiel varie moins vite dans l'espace), donc la densité de courant aussi.

(d) Le champ et la densité de courant sont identiques. L'aire de la section étant plus élevée, le courant $I = JA$ augmente, mais pas la densité de courant.

SUJET CONNEXE

Les dangers de l'électrisation et l'électrocution

On entend souvent parler des dangers que comporte l'utilisation inappropriée d'appareils électriques. Que doit-on penser des appels à la prudence que lancent à répétition les entreprises de distribution d'électricité dans leurs campagnes de prévention ? Pour en juger, nous allons décrire ici les effets physiologiques du passage d'un courant électrique à travers le corps humain.

Le corps humain est un bon conducteur d'électricité. À la différence des métaux conducteurs, dans lesquels ce sont les électrons libres qui assurent le passage du courant, ce sont les nombreux ions en solution dans les milieux extracellulaires qui permettent la circulation électrique dans notre organisme. Comme nous l'avons vu dans le sujet connexe du chapitre 5, notre système nerveux contrôle la plupart de nos organes par l'intermédiaire de variations des concentrations ioniques le long du réseau complexe formé par les neurones. Ainsi, la circulation d'un courant provenant d'une source extérieure peut provoquer des effets dévastateurs en interférant avec les différences de potentiel que maintiennent ces concentrations ioniques de part et d'autre des membranes cellulaires du système nerveux.

Pour qu'un courant s'établisse dans une personne, il faut que le corps devienne partie intégrante d'un circuit fermé. Le seul fait de toucher à un fil de distribution électrique dénudé ne suffit pas nécessairement. Pour que le courant *passe*, il lui faut un chemin de retour. Malheureusement (de ce point de vue, du moins), les

êtres humains sont généralement en contact avec le sol. Or, la terre, par son immense capacité, constitue un réservoir naturel vers lequel peuvent passer les charges électriques. Ainsi, on peut toucher à un fil de distribution électrique dénudé et éviter d'être traversé par un courant électrique si on se coupe de tout contact avec le sol. Des bottes munies d'une semelle faite d'un matériau isolant peuvent nous protéger. De même, si un fil de distribution électrique tombe sur une voiture, les passagers sont en sécurité puisque les pneus forment une barrière isolante entre la terre et le véhicule. Dans cette situation particulière, il faut éviter de quitter la voiture puisque pendant un court instant le corps humain pourrait servir de lien fatal entre la voiture chargée et le sol. Un phénomène semblable se produit lorsque la foudre frappe un avion en plein vol. Puisque l'avion n'est pas en contact avec la terre, il n'y a aucun danger pour les passagers ; la charge acquise par l'avion s'échappera lentement dans l'air jusqu'à l'atterrissage.

Lorsque le contact est établi et qu'un courant arrive à circuler, on dit que la personne subit une *électrisation*, aussi appelée *décharge électrique*. Si l'électrisation entraîne la mort, on l'appelle plutôt *électrocution*. La gravité des conséquences dépend uniquement de l'intensité du courant qui circule dans le corps. Un courant aussi faible que 1 mA suffit à produire une sensation de douleur. À partir de 10 mA, l'interférence avec le système nerveux est telle que la plupart des muscles se contractent, rendant très difficile, pour ne pas dire impossible, la simple action de lâcher volontairement la source de courant. Au-delà de 100 mA, c'est le cœur qui est touché. Le muscle cardiaque est alors victime de fibrillations ventriculaires associées à une désynchronisation du mécanisme de pompage du sang (voir le sujet connexe de la section 7.3). Ce dérèglement fait chuter le débit sanguin global du corps en deçà du minimum nécessaire au maintien de la vie. Par contre, on peut survivre à un courant de plusieurs ampères s'il est de courte durée. Une telle décharge a pour effet de paralyser complètement le cœur. Celui-ci peut reprendre son rythme normal une fois le choc passé. On exploite d'ailleurs cette capacité du cœur lorsqu'on a recours au *défibrillateur*, un appareil qui envoie une brève mais intense décharge au cœur, dans l'espoir de lui faire reprendre son rythme normal. En plus des effets sur le système nerveux et les muscles, les forts courants produisent aussi des brûlures par simple effet Joule (figure 6.16).

Cette description des effets de l'électrisation est relative aux valeurs des courants en cause. Nous savons que le courant d'un circuit est fonction de la différence de potentiel appliquée et de la valeur de la résistance dans le circuit. Les sources de tension auxquelles nous risquons d'être exposés sont diverses. Elles sont de 120 V ou de 240 V dans le cas d'un circuit domestique, de 25 000 V dans le cas d'un circuit typique de distribution d'une grande ville et de 735 000 V dans celui du réseau de transport. La donnée manquante pour établir l'importance du danger auquel on s'expose en manipulant une source de tension donnée est donc la résistance du corps humain, qui n'est pas simple à évaluer. D'un bout à l'autre du corps, à divers points de contact sur la peau, notre résistance varie de 10^4 à 10^6 Ω si la peau est sèche. À une tension de 120 V, on ne s'expose donc qu'à un courant de quelques milliampères, ceux qui ne provoquent qu'une douleur sensible et, au-delà de 10 mA, des contractions musculaires. Ainsi, à première vue, on risque de se tirer d'affaire à la suite d'un contact accidentel avec la plus faible des tensions auxquelles nous sommes exposés. Malheureusement, du seul fait de la transpiration, notre peau est rarement complètement sèche. Or, la résistance de la peau humide chute à $\approx 10^3$ Ω. Cela provoque une augmentation notable du courant, laquelle s'accompagne de brûlures qui ont tôt fait de briser la barrière naturelle que constitue la peau (figure 6.16). Une fois qu'un contact avec *l'intérieur* du corps est établi, le courant ne rencontre plus qu'une résistance de quelques dizaines d'ohms en raison de la faible résistivité de la solution ionique dans laquelle baignent les cellules. Pire, au fur et à mesure que de forts courants y circulent, des membranes cellulaires se rompent, ce qui rend le corps encore plus conducteur.



▲ **Figure 6.16**

L'électrisation peut causer des brûlures importantes.

De toute évidence, le corps humain est très vulnérable aux courants électriques. La prudence et le respect des règles de sécurité s'imposent dès qu'on manipule des conducteurs où circule du courant.

6.5 UNE EXPLICATION MICROSCOPIQUE DE LA LOI D'OHM

Nous allons maintenant voir comment on peut déduire qu'un métal obéit à la loi d'Ohm, à partir d'une interprétation microscopique de la conduction électrique dans ce type de matériau. Nous nous basons sur un modèle, fondé sur la physique classique, proposé en 1900 par Paul K. Drude (1863-1906), peu après la découverte de l'électron.

Considérons qu'un métal est composé d'un réseau d'ions positifs et d'un gaz parfait d'électrons libres, lesquels se déplacent dans le vide entre les ions. Le modèle du gaz parfait suppose que les électrons n'ont aucune interaction *entre eux*; ils peuvent toutefois entrer en collision avec les ions. En l'absence de champ électrique extérieur, les vitesses thermiques des électrons sont orientées de façon aléatoire, de sorte que, vectoriellement, leur vitesse thermique moyenne est nulle: il n'y a aucun écoulement mesurable d'électrons dans un sens donné. Mais lorsqu'on applique un champ électrique, chaque électron est soumis à une accélération $\vec{\mathbf{a}} = -e\vec{\mathbf{E}}/m$. Durant un intervalle de temps Δt, la variation de vitesse d'un électron est donc

$$\Delta\vec{\mathbf{v}} = -\frac{e\vec{\mathbf{E}}}{m}\Delta t \qquad \text{(i)}$$

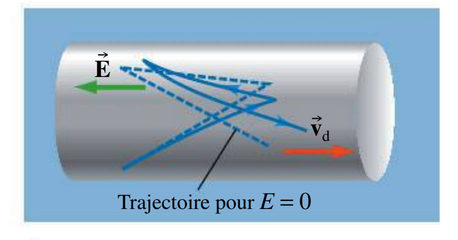


Figure 6.17
Lorsqu'on applique un champ électrique, la trajectoire d'un électron de conduction passe des lignes pointillées aux lignes en trait plein.

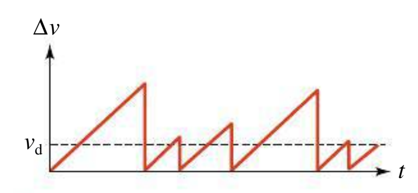
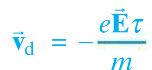


Figure 6.18
La variation de vitesse Δv acquise par un électron entre les collisions fluctue dans le temps. La moyenne des variations calculées sur tous les électrons correspond à la vitesse de dérive v_d.

À cause des collisions avec les ions disposés en réseau, $\Delta\vec{\mathbf{v}}$ n'augmente pas indéfiniment. À chaque collision, un électron cède toute l'énergie *excédentaire* venant du champ pour la transformer en énergie de vibration des ions*. Les collisions ont donc tendance à briser le mouvement ordonné, de sorte que les électrons ne gardent que leur vitesse thermique aléatoire après chaque collision. En l'absence de champ électrique, les trajectoires d'un électron entre les collisions sont des lignes droites. En présence d'un champ, ces trajectoires sont paraboliques, comme on le voit à la figure 6.17. Les temps écoulés entre les collisions dépendent du module et de l'orientation de la vitesse de l'électron après chaque collision, de même que de la distance entre les ions. Le module de la variation de vitesse d'un électron donné peut ressembler au graphe de la figure 6.18. Puisque les temps écoulés entre les collisions peuvent prendre diverses valeurs, nous avons besoin de calculer une moyenne sur l'ensemble des électrons. C'est ce que l'on appelle le temps moyen entre collisions, τ. Utilisant ce temps dans l'équation (i), nous voyons que le gaz d'électrons dans son ensemble acquiert une vitesse de dérive moyenne donnée par



$$\vec{\mathbf{v}}_d = -\frac{e\vec{\mathbf{E}}\tau}{m}$$

D'après l'équation 6.4, $\vec{\mathbf{v}}_d = \vec{\mathbf{J}}/nq$, où $q = -e$, la densité de courant est donc

$$\vec{\mathbf{J}} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{\mathbf{E}} = \frac{1}{\rho}\vec{\mathbf{E}}$$

avec

$$\rho = \frac{m}{ne^2\tau} \qquad (6.11)$$

* Si on intensifie la vibration des ions, on augmente la température du conducteur. Cette augmentation de température et la dissipation de chaleur qui s'ensuit sont caractéristiques d'un matériau résistif.

Si cette expression de la résistivité ρ est indépendante de $\vec{\mathbf{E}}$, on a démontré la forme microscopique de la loi d'Ohm. Il suffit pour cela que la constante τ ne dépende pas du champ électrique. Selon le modèle que nous venons d'utiliser, cette condition est respectée si la vitesse de dérive est nettement inférieure aux vitesses thermiques.

Nous pouvons utiliser l'équation 6.11 pour calculer la valeur de τ. Pour le cuivre, on trouve

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{m}{ne^2\rho}\\ &= \frac{(9{,}1 \times 10^{-31}\ \text{kg})}{(8{,}5 \times 10^{28}\ \text{m}^{-3})(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})^2(1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega{\cdot}\text{m})}\\ &= 2{,}46 \times 10^{-14}\ \text{s}\end{aligned}$$

Si l'on traite les électrons de conduction comme un gaz parfait, leur énergie cinétique moyenne est donnée par le théorème d'équipartition (voir le chapitre 18 du tome 1):

$$K_{\text{moy}} = \frac{1}{2}mv_{\text{qm}}^2 = \frac{3}{2}kT$$

La valeur de la vitesse quadratique moyenne v_{qm} donne une bonne idée de l'ordre de grandeur du module de la vitesse associée aux mouvements thermiques. À 300 K, la vitesse quadratique moyenne serait égale à environ 10^5 m/s. À l'aide de cette valeur, on peut calculer la distance parcourue entre les collisions, appelée *libre parcours moyen*:

$$\lambda = v_{\text{qm}}\tau = 25 \times 10^{-10}\ \text{m}$$

On peut comparer cette valeur avec l'espace interatomique, voisin de $2{,}5 \times 10^{-10}$ m. En physique classique, on s'attendrait à ce que le libre parcours moyen dépende de l'espace interatomique et de la taille des atomes.

Le modèle de Drude a des limites. En physique classique, la vitesse thermique varie en fonction de la température selon $v_{\text{qm}} \propto \sqrt{T}$. Comme $\tau = \lambda/v_{\text{qm}}$, l'équation 6.11 implique que la résistivité devrait être proportionnelle à $\sqrt{T}$. En fait, comme le montre la figure 6.11*a* (p. 222), on mesure que la résistivité des métaux est directement proportionnelle à la température dans les limites d'une plage étendue de températures (sauf aux très basses températures). Au fur et à mesure que la température baisse, le libre parcours moyen augmente. À basse température, il peut dépasser 1 mm! La physique classique ne parvient pas à expliquer comment les électrons peuvent éviter les collisions avec des ions aussi nombreux.

Ces problèmes furent résolus avec l'avènement de la mécanique quantique où les électrons libres ont un comportement ondulatoire. Ainsi, c'est la notion même de collision entre un électron et un ion qui est incorrecte. De plus, les énergies des électrons ne sont pas réparties selon le théorème d'équipartition. À la section 11.7 du tome 3, nous étudierons un modèle quantique de la conductivité, celui de la théorie des bandes.

6.6 LA PUISSANCE ÉLECTRIQUE

Considérons un flux de particules chargées en mouvement sous l'effet d'un champ électrique. Lorsqu'une charge donnée q franchit une différence de potentiel fixe ΔV, son énergie potentielle varie de $\Delta U = q\Delta V$. Le taux d'énergie

cédée par le champ électrique à la charge est la puissance fournie, c'est-à-dire $P = \Delta U/\Delta t = (\Delta q/\Delta t)\Delta V$, ou

Puissance électrique fournie

$$P = I\Delta V \tag{6.12}$$

Si les particules chargées sont des électrons en mouvement dans un milieu résistif, l'énergie électrique est convertie en énergie thermique étant donné que les électrons subissent des collisions inélastiques avec les ions positifs du fil (voir la section précédente). L'équation ci-dessus donne alors la puissance *dissipée*. Si on substitue la définition de la résistance $R = \Delta V/I$, la puissance dissipée peut également s'écrire

Puissance dissipée dans une résistance

$$P = I\Delta V = RI^2 = \frac{\Delta V^2}{R} \tag{6.13}$$



Hydro-Québec ne mesure pas l'énergie consommée en joules (J), mais plutôt en kilowattheures (kWh), une unité plus commode.

James Prescott Joule (1818-1889) a été le premier à démontrer que la puissance électrique dissipée dans une résistance est proportionnelle au carré du courant qui la traverse. Ainsi, lorsqu'on parle de la chaleur libérée par le passage du courant dans une résistance, on la désigne souvent par l'expression **effet Joule**.

La puissance s'exprime en **watts** (W), une unité qui équivaut à des joules par seconde (J/s). Les appareils électriques courants ne consomment pas tous la même puissance. Les producteurs d'électricité, comme Hydro-Québec, ne facturent que l'énergie que chaque client utilise. L'unité SI d'énergie (J) correspondant à une trop petite quantité, ils utilisent le **kilowattheure** (kWh) pour établir les comptes à payer. Un kilowattheure correspond à l'énergie utilisée pendant une heure par un appareil consommant 1000 J/s, ce qui équivaut à $3{,}6 \times 10^6$ J. Attention : un kilowattheure (kWh) n'est pas du tout un kilowatt *par* heure (kW/h), ce qui ne serait pas une unité d'énergie. En effet, un kilowatt a des dimensions de [énergie/temps], alors on doit le *multiplier* par des heures, une grandeur ayant des dimensions de temps, pour obtenir des dimensions d'énergie.

Exemple 6.8

L'élément chauffant d'un radiateur consomme une puissance de 1000 W lorsqu'il fonctionne à 120 V. (a) Quel courant le traverse dans ces conditions normales ? (b) Quelle puissance consommerait-il si la différence de potentiel diminuait à 110 V ? (c) Combien en coûterait-il alors de le faire fonctionner 10 heures par jour du 1er novembre au 28 février, si le coût moyen de l'électricité est de 0,07 $/kWh ?

Solution

(a) D'après l'équation 6.13,

$$I = \frac{P}{\Delta V} = \frac{1000\ \text{W}}{120\ \text{V}} = 8{,}33\ \text{A}$$

(b) Nous devons d'abord trouver la résistance de l'élément :

$$R = \frac{\Delta V^2}{P} = \frac{(120\ \text{V})^2}{1000\ \text{W}} = 14{,}4\ \Omega$$

Un filament réel changerait de température, donc de résistance, dans les nouvelles conditions de fonctionnement. Cependant, nous avons dit à la section 6.4 que les conducteurs sont considérés comme ohmiques sauf mention du contraire. La résistance demeure donc 14,4 Ω dans les nouvelles conditions de fonctionnement. ■

Par conséquent, la nouvelle puissance consommée est

$$P = \frac{\Delta V^2}{R} = \frac{(110 \text{ V})^2}{14{,}4\,\Omega} = 840 \text{ W}$$

(c) Pour obtenir le résultat directement en kilowattheures, on doit multiplier des kilowatts par des heures. La puissance consommée étant 840 W = 0,840 kW, on obtient

$$U = P\,\Delta t = (0{,}840 \text{ kW})(10 \text{ h/jour})(120 \text{ jours}) = 1008 \text{ kWh}$$

Le coût serait donc de 70,56 $.

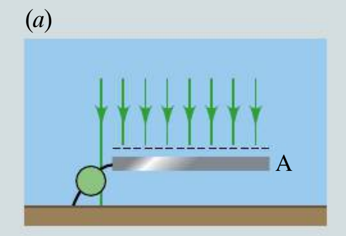
Il serait inutilement long d'effectuer ce calcul en unités SI : il faudrait multiplier la puissance par le nombre de secondes que contiennent les quatre mois, pour obtenir l'énergie en joules. Il faudrait ensuite convertir ces joules en kilowattheures. ■

SUJET **CONNEXE**

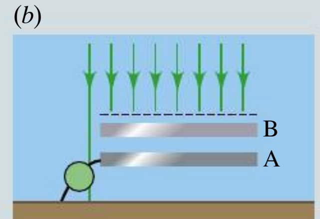
L'électricité atmosphérique

Au milieu du XVIII[e] siècle, Benjamin Franklin expliqua la foudre en la reconnaissant comme un phénomène électrique. Nous allons examiner certains aspects de ce phénomène et voir comment se forment les orages. Nous débutons par un phénomène relativement peu connu : la présence d'un champ électrique dans l'atmosphère, même par beau temps.

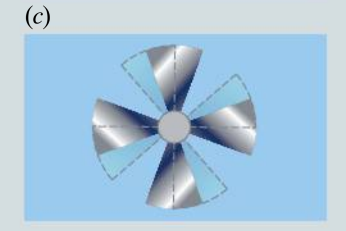
(*a*)



(*b*)



(*c*)



▲ **Figure 6.19**

(*a*) Le champ électrique terrestre induit une charge sur une plaque métallique reliée à la terre. (*b*) Lorsque la plaque est protégée par un écran, la charge s'écoule par le dispositif de détection. (*c*) Dans un « moulin à champ », les plaques supérieure et inférieure ont la forme de pales. Si la pale supérieure tourne, on mesure un courant pulsé.

Le champ électrique par beau temps

Par temps clair, un champ électrique d'environ 100 V/m dirigé vers le bas règne entre la surface terrestre et une couche atmosphérique appelée ionosphère. D'après l'équation $E = |\sigma|/\varepsilon_0$, il y a donc une densité surfacique de charge négative d'environ -10^{-9} C/m^2 sur le sol ; de même, le bas de l'ionosphère, à 50 km d'altitude, est chargé positivement. Le champ décroît avec l'altitude, de sorte que la différence de potentiel entre la terre et l'ionosphère est d'environ 3×10^5 V et non pas (50 km)(100 V/m) = 5 MV.

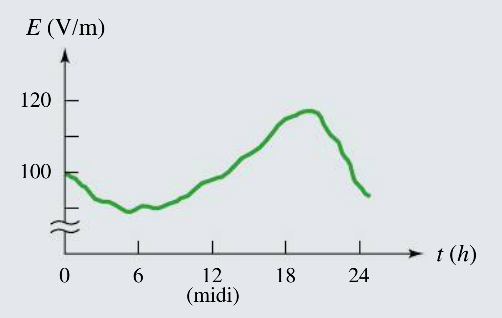
L'atmosphère, rendue légèrement conductrice en raison de la présence des ions d'oxygène et d'azote créés par divers phénomènes naturels, laisse lentement circuler un courant (3×10^{-12} A/m^2 ou 1500 A globalement) qui tend à neutraliser le sol. Mais nous allons voir que le transfert de charge associé à la foudre empêche une neutralisation complète, ce qui maintient le champ par beau temps.

On peut mesurer le module du champ par beau temps à l'aide d'un instrument appelé « *moulin à champ* » dont le principe est le suivant. Lorsqu'on relie à la terre une plaque métallique horizontale A (figure 6.19*a*), sa face supérieure se charge négativement en raison du champ extérieur. Si l'on recouvre soudainement la plaque A par une deuxième plaque B (figure 6.19*b*), les charges induites qui apparaissent sur la plaque B annihilent le champ résultant entre les deux. Plus rien ne retenant la charge que portait la plaque A, cette charge s'écoule dans la terre en traversant un appareil de mesure. Dans la pratique, A et B ont la forme de pales (figure 6.19*c*). En tournant, la plaque supérieure masque alternativement la plaque inférieure. Le courant mesuré consiste en impulsions pouvant être amplifiées et étalonnées pour donner l'intensité du champ.

Le champ par beau temps varie au cours de la journée. En haute mer, loin de toute perturbation, on mesure sa valeur maximale à 19 h TU (temps universel) et sa valeur minimale à 4 h TU en tout point du globe

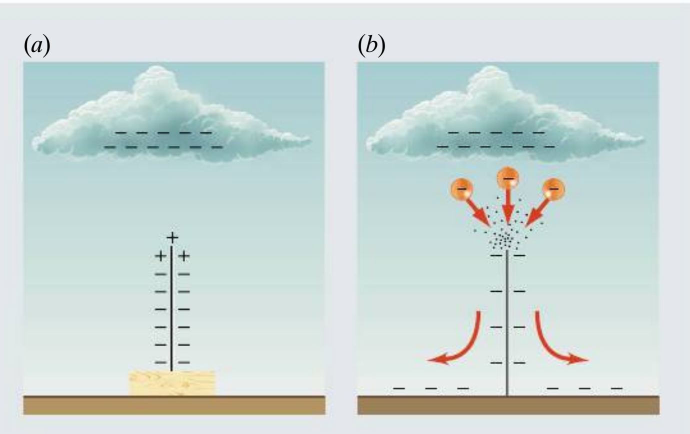


(figure 6.20). Étant donné la conductivité de la terre et de l'ionosphère, les variations locales de densité de charges se dispersent très rapidement autour du globe.



▲ **Figure 6.20**

Le champ par beau temps varie en fonction du temps de la même façon tout autour du globe.



▲ **Figure 6.21**

(*a*) Il y a séparation des charges dans une tige métallique isolée. (*b*) Si la tige est reliée à la terre, un courant constant circule dans la tige.

L'expérience du cerf-volant de Franklin

En 1750, Benjamin Franklin s'aperçut qu'il pouvait décharger rapidement un corps électrifié en approchant de lui un conducteur pointu relié à la terre. Il crut donc que, si les nuages d'orage étaient électrifiés, on pourrait les décharger sans risque et éviter les dégâts provoqués par la foudre. Pour vérifier cette hypothèse, il devait d'abord démontrer que le nuage était chargé. Le raisonnement qu'il adopta à cette fin est décrit ici en termes modernes.

La figure 6.21*a* représente une tige métallique isolée. Sous un nuage d'orage, le champ électrique est en sens inverse du champ par beau temps et a induit une séparation des charges dans la tige. La fuite de charge négative provenant du nuage neutralise une partie des charges positives présentes à la pointe de la tige; celle-ci acquiert ainsi une charge négative en excès. Si on approche de cette tige un conducteur relié au sol, Franklin avait déduit qu'une étincelle devrait se produire. Pour cela, il importe que la tige soit isolée du sol, sinon la charge négative continue de s'écouler* par la tige dans la terre (figure 6.21*b*).

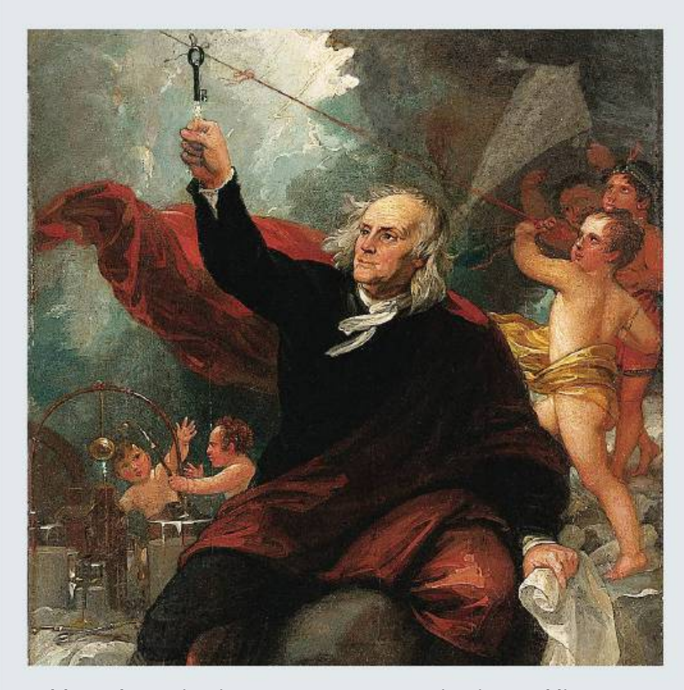


Tableau de Benjamin West montrant Benjamin Franklin en train de réaliser son expérience du cerf-volant.

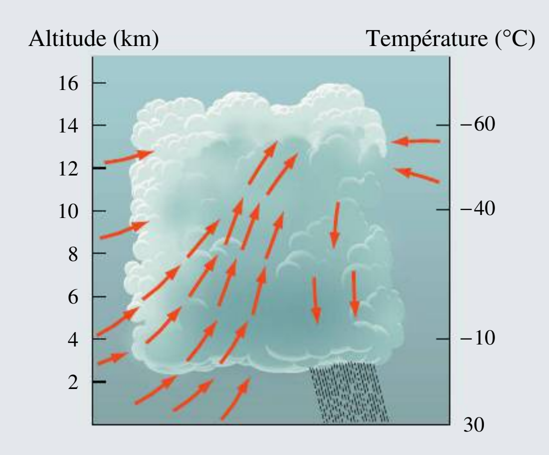
Pour montrer qu'un nuage d'orage est chargé, Franklin proposa de vérifier si on pouvait produire des étincelles en approchant d'une haute tige métallique isolée un fil relié à la terre. Des scientifiques français réalisèrent cette expérience en mai 1752 et obtinrent les étincelles prévues. Sans avoir eu connaissance de leur résultat, Franklin réalisa l'expérience en juin 1752, en utilisant en guise de tige la ficelle d'un cerf-volant, rendue conductrice du fait qu'elle était mouillée par la pluie. Pour l'isoler au moment de faire voler le cerf-volant, il tint la ficelle au moyen d'un isolant. Il avait attaché une clé à la ficelle. Lorsqu'il vit les fils se hérisser, il comprit que la ficelle était électrifiée et, avec le poing, fit jaillir une étincelle à partir de la clé. Cette expérience montrait qu'un nuage d'orage est chargé et indirectement que la foudre est un phénomène électrique. Ces expériences sont très dangereuses: quelques mois plus tard, un professeur fut tué par la foudre en essayant d'en reproduire les résultats.

Les orages

Sur terre, il se produit 40 000 orages par jour et 100 éclairs par seconde. Grâce à un fort courant ascendant d'air

* On peut alors apercevoir une faible lueur, appelée feu Saint-Elme, à la pointe de la tige: le champ électrique intense près de la pointe accélère assez d'électrons pour ioniser des molécules qui, en se recombinant avec d'autres électrons, émettent de la lumière.

chaud et humide, un petit nuage s'étendant entre 2 et 5 km d'altitude peut devenir en quelques minutes un gros nuage d'orage *cumulonimbus* atteignant une altitude de 10 à 15 km. Puisque la pression diminue avec l'altitude, l'air humide du courant ascendant se dilate en montant et sa température baisse. La vapeur d'eau se condense alors en gouttes et libère sa chaleur latente, ce qui rend l'air humide plus chaud que l'air sec environnant et fait continuer sa montée. Près du sommet du nuage, l'air sec environnant se mélange avec le courant d'air ascendant et provoque un refroidissement des gouttes par évaporation. Des cristaux de glace se forment, entrent en collision avec les gouttes d'eau froide et grossissent jusqu'à devenir des grêlons. Lorsque ces grêlons sont trop lourds pour être portés par le courant ascendant, ils commencent à tomber et provoquent un courant descendant dans la partie du nuage extérieure au courant ascendant (figure 6.22). Comme les grêlons fondent en général avant d'arriver au sol, ils produisent une forte averse. Dans les phases finales de l'évolution du nuage, le courant descendant devient prédominant et il produit une pluie fine.

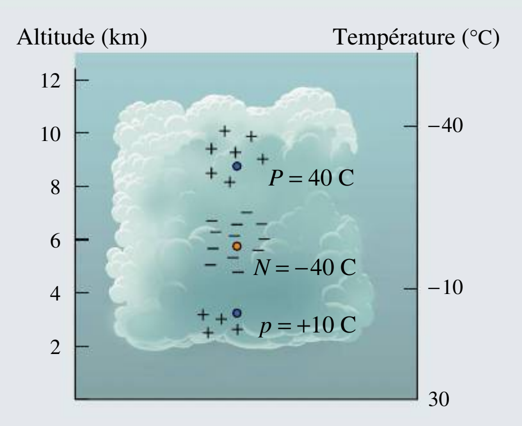


▲ **Figure 6.22**

Un nuage d'orage. Le courant ascendant d'air chaud et humide monte jusqu'à ce que des cristaux de glace se forment. En grossissant, ces cristaux donnent des grêlons qui tombent dans la zone du courant descendant.

La séparation des charges

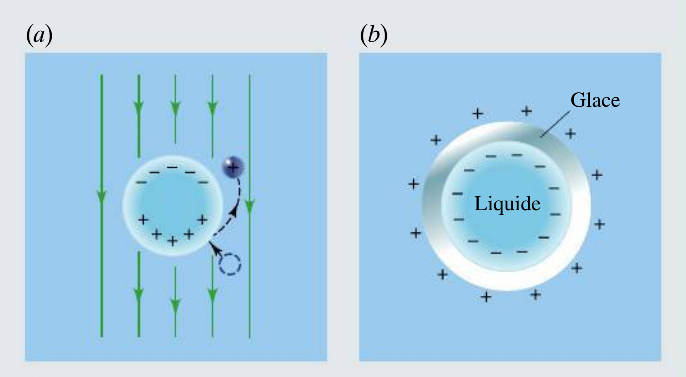
Pendant l'orage, la partie inférieure du *cumulonimbus* acquiert une charge négative ($N = -40$ C), et sa partie supérieure, une charge positive ($P = +40$ C) (figure 6.23). Une plus faible charge positive ($p = +10$ C) est aussi observée à la base du nuage. Ces charges produisent sous le nuage un champ 100 fois plus intense que celui qui règne par beau temps et en sens inverse. La différence de potentiel entre la base du nuage et la terre est d'environ 3 MV.



▲ **Figure 6.23**

La séparation des charges dans un nuage d'orage.

Deux hypothèses expliquent comment le nuage acquiert ces charges. La première est la suivante. Lorsqu'un grêlon tombe, il est polarisé par le champ qui règne par beau temps : sa base est positive alors que son sommet est négatif (figure 6.24*a*). Si une goutte d'eau ou de glace entre en collision avec la base du grêlon, elle acquiert une charge positive. Le grêlon devenu chargé négativement continue de tomber, mais la goutte chargée positivement, plus légère, est entraînée par le courant ascendant. Le champ électrique est renforcé par cette séparation des charges et produit une polarisation encore plus importante des grêlons. Le processus fait intervenir une *rétroaction positive*.



▲ **Figure 6.24**

(*a*) Une gouttelette peut devenir chargée lorsqu'elle entre en collision avec la partie inférieure positive d'un grêlon en train de tomber. (*b*) Lorsqu'une gouttelette d'eau commence à geler, une couche de glace se forme avec les charges indiquées.

La deuxième hypothèse fait intervenir le processus de congélation. On sait que, lorsqu'il y a une différence de température dans un échantillon de glace, la partie chaude se charge négativement parce que les ions H^+, légers, sont plus mobiles que les ions OH^-. Les ions H^+ quittent en plus grand nombre la partie chaude et entraînent ainsi l'apparition d'une charge négative.



Lorsqu'une goutte gèle, une mince couche de glace se forme d'abord sur la surface. Au cours de la congélation du liquide intérieur, celui-ci libère la chaleur latente de fusion, de sorte que la température de la surface intérieure de la pellicule est plus élevée que celle de la surface extérieure. À cause de cet effet *thermoélectrique*, la surface extérieure se charge positivement (figure 6.24*b*). Une collision avec une autre particule peut faire éclater la pellicule et provoquer la formation d'éclats de glace chargés positivement. Très légers, ces éclats peuvent être entraînés par le courant ascendant. Le reste de la goutte est chargé négativement et continue à tomber.

Aucune de ces deux hypothèses ne fait présentement l'unanimité, puisque chacune d'elles serait infirmée si une expérience future mesurait que la séparation des charges se produit avant l'apparition d'un courant descendant.

La foudre

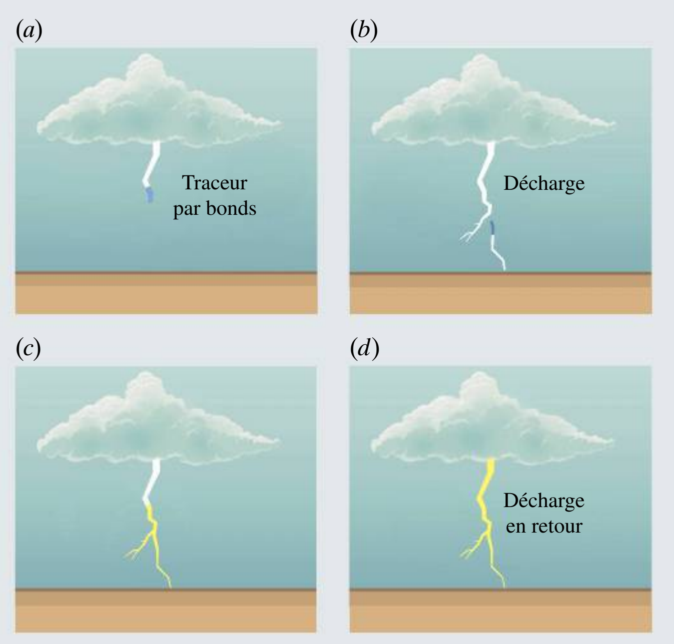
La foudre (figure 6.25) a été étudiée par divers moyens : caméras ultrarapides, émissions en radiofréquences, échos radar et variations du champ électrique au niveau du sol. Un *éclair* est composé de plusieurs *coups*. Le phénomène commence par une faible lueur de 50 ms probablement produite par une décharge à l'intérieur du nuage entre la petite base positive p et la charge négative plus élevée N. La moitié des éclairs d'un orage se produisent entre des nuages qui peuvent être distants de 10 km. Parfois, la décharge va si loin qu'elle atteint une zone dégagée.

Un coup de foudre est déclenché par un *traceur par bonds*. Il s'agit d'un gaz fortement ionisé qui transporte surtout des charges négatives (figure 6.26*a*). Sur film, il apparaît comme une lueur vive qui se déplace de 50 m en 1 μs, s'immobilise pendant 50 μs puis fait un autre « bond ». Sa pointe est à un potentiel de -10^8 V par rapport à la terre et, lorsqu'elle se trouve à 50 m environ du sol, une *décharge* quitte la terre, en général à partir d'un point anguleux (figure 6.26*b*). Lorsqu'elle rencontre le traceur par bonds, il se forme un chemin conducteur ininterrompu entre la terre et la base du nuage. La charge négative dans ce canal ionisé s'écoule très rapidement dans la terre. La partie la plus proche du sol se décharge en premier lieu et produit une lueur intense (figure 6.26*c*). Lorsque les parties plus élevées se déchargent, il se produit une *décharge en retour*, ce qui crée un effet lumineux ascendant (figure 6.26*d*). Le traceur par bonds transporte −5 C en 40 ms environ, ce qui correspond à un courant moyen voisin de 100 A.



▲ **Figure 6.25**

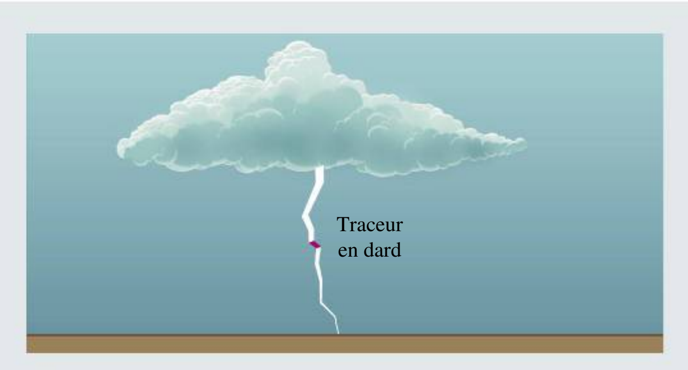
La foudre est un phénomène électrique spectaculaire qui se produit une centaine de fois par seconde sur la planète.



▲ **Figure 6.26**

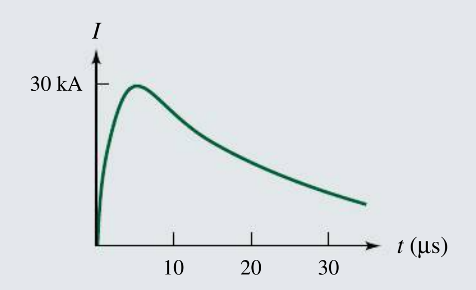
Les quatre phases d'évolution d'une décharge en retour.

Après la décharge en retour, un faible courant continue de circuler dans le canal. Après une pause, un *traceur en dard* descend vers la terre et déclenche une deuxième décharge en retour (figure 6.27). Le traceur en dard transporte 1 C en 2 ms, ce qui donne un courant moyen de 500 A. Un seul éclair, qui dure de 0,3 à 0,5 s, fait intervenir 4 ou 5 décharges en retour, d'une durée de 2 ms chacune, à intervalles de 50 ms. Chaque coup de foudre est visible sous forme d'une lueur vacillante pendant l'éclair. Le courant d'un coup de foudre varie en fonction du temps (figure 6.28). Il augmente jusqu'à 30 kA ou plus en 2 μs environ, puis diminue graduellement. Une charge négative de 10 à 20 C est transférée à la terre en 100 μs.



▲ Figure 6.27

Après la première décharge en retour, d'autres décharges en retour sont déclenchées par les traceurs en dard.



▲ Figure 6.28

La variation du courant durant une décharge en retour.

Pendant la décharge en retour, la température du canal ionisé atteint 30 000 K, ce qui augmente la pression et produit une onde de choc : c'est le tonnerre. Son grondement est dû au fait que le son provenant de diverses régions du coup de foudre arrive à l'auditeur à des instants différents.

Un seul coup de foudre peut faire passer 5 C sous une différence de potentiel de 10^8 V en 10 μs. L'énergie dissipée est de 5×10^8 J et la puissance de 5×10^{13} W ! Cette énergie est dégagée sous forme d'excitation moléculaire, de création d'ions, d'énergie cinétique des particules et de rayonnement. Le courant moyen observé durant un orage est de 1,5 A.

La protection contre la foudre

La foudre est à l'origine de nombreux dégâts matériels et incendies de forêt. Aux États-Unis seulement, elle tue deux cents personnes chaque année. Un *paratonnerre* est une tige métallique pointue reliée à la terre ; il protège de la foudre une zone située autour de lui, comme l'illustrent les lignes pointillées sur la figure 6.29. Franklin pensait que son fonctionnement reposait sur le fait qu'il permettait à la charge contenue dans un nuage de s'écouler, mais il avait plutôt tort, un seul point anguleux ne pouvant pas décharger le nuage, à moins d'être au sommet d'un mât très élevé ou d'un immeuble. Mais si un traceur par bonds s'approche de la région entourant la tige, celle-ci sera frappée par la foudre et transportera la charge sans danger vers la terre.



▲ Figure 6.29

Un paratonnerre « protège » la région délimitée par les lignes pointillées.

Durant un orage, il est préférable d'éviter de toucher des conducteurs reliés à des conduites d'eau (bain, robinets, etc.) En effet, une décharge peut pénétrer dans une maison par les conduites d'eau ou par des câbles. Si on est à l'extérieur, il faut éviter les arbres ou les bâtiments isolés qui sont des cibles évidentes, puis éviter de se baigner. Un risque demeure toutefois : lorsque la foudre frappe la terre, des courants intenses s'y écoulent. La différence de potentiel entre deux points distants de 1 m peut produire un courant mortel pour une personne ou un animal. Mais on peut réduire les effets d'un tel « saut de tension » en gardant les pieds joints.

RÉSUMÉ

L'intensité moyenne du courant électrique est la quantité de charge qui traverse la section d'un conducteur par unité de temps :

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \qquad (6.1a)$$



Le sens conventionnel du courant est celui de l'écoulement des charges positives. Grâce à cette convention, le courant s'écoule toujours dans le même sens que le champ électrique qui le cause, c'est-à-dire du potentiel élevé vers le potentiel faible.

Le module de la vitesse de dérive moyenne des électrons dans un fil métallique de section A est relié à la valeur du courant I qui parcourt le fil selon

$$I = nAev_{\mathrm{d}} \tag{6.2}$$

où n est le nombre d'électrons libres par unité de volume.

Si un courant I circule dans un dispositif ayant une différence de potentiel ΔV entre ses bornes, la résistance est définie comme le rapport

$$R = \frac{\Delta V}{I} \tag{6.5}$$

La différence de potentiel est la *cause* du courant et non le contraire.

Dans le cas particulier d'un fil de longueur ℓ et de section transversale A, la résistance est donnée par

$$R = \frac{\rho\ell}{A} \tag{6.6}$$

où ρ est la résistivité du matériau dont est fait le fil. Pour les métaux, ρ varie avec la température.

La définition de la résistance peut se mettre sous la forme

$$\Delta V = RI \tag{6.10}$$

Cette équation s'applique à tout conducteur, quelle que soit sa forme. Elle *n'exprime pas* forcément la loi d'Ohm. Elle constitue la forme macroscopique de la loi d'Ohm *seulement* si R est constante et indépendante de ΔV et de I.

Si un flux de particules chargées se déplace à travers une différence de potentiel ΔV, le taux du travail fourni par le champ électrique ou par un agent extérieur, c'est-à-dire la puissance fournie, est

$$P = I\Delta V \tag{6.12}$$

La puissance dissipée sous forme d'énergie thermique dans une résistance est

$$P = I\Delta V = RI^2 = \frac{\Delta V^2}{R} \tag{6.13}$$

TERMES IMPORTANTS

ampère (p. 210)
circuit électrique (p. 213)
coefficient thermique de résistivité (p. 222)
conductivité (p. 221)
courant électrique (p. 210)
effet Joule (p. 230)
électrolyte (p. 211)
électron de conduction (p. 211)
électron libre (p. 211)
kilowattheure (p. 230)
loi d'Ohm (p. 223)
ohm (p. 220)
résistance (p. 220)
résistivité (p. 221)
semi-conducteur (p. 222)
supraconducteur (p. 223)
tension (p. 224)
watt (p. 230)

RÉVISION

R1. Décrivez le mécanisme mis au point par Volta pour produire un courant électrique.

R2. Combien d'électrons passent par un point donné d'un fil parcouru par un courant de 1 A pendant 1 s; 1 min; 1 h?

R3. Dessinez un circuit simple comprenant une pile et un fil reliant la borne positive à la borne négative en représentant le sens du courant et le sens du déplacement des électrons.

R4. Vrai ou faux ? Dans un fil, les électrons circulent du potentiel le plus élevé vers le potentiel le moins élevé.

R5. Vrai ou faux ? Lorsqu'on allume l'interrupteur d'une ampoule, les électrons voyagent presque instantanément de l'interrupteur à l'ampoule.

R6. Vrai ou faux ? C'est pour augmenter leur résistance électrique qu'on utilise de très gros fils pour le transport de l'électricité.

R7. Expliquez comment on déduit que la résistance d'un conducteur donné est directement proportionnelle à sa longueur.

R8. Expliquez pourquoi la résistance d'un métal augmente avec sa température.

R9. Dans quelle condition un matériau conducteur obéit-il à la loi d'Ohm ?

R10. Vrai ou faux ? Le mot « tension » est un synonyme de « potentiel ».

R11. Combien de temps faut-il utiliser une ampoule de 100 W pour consommer 1 kWh ?

R12. Vrai ou faux ? Il est plus économique d'utiliser un radiateur électrique de 1000 W fonctionnant sur 220 V qu'un radiateur électrique de 1000 W fonctionnant sur 110 V.

QUESTIONS

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

Q1. La loi d'Ohm est-elle valable seulement pour les fils conducteurs ?

Q2. Si un appareil fait « griller » son propre fusible de 15 A, ou un fusible extérieur de 15 A, est-ce une bonne idée de le remplacer par un fusible de 20 A ?

Q3. Au niveau microscopique, en quoi le courant dans un métal diffère-t-il du courant dans un électrolyte ? Pouvez-vous donner un autre exemple de courant électrique qui diffère qualitativement du courant dans un métal ?

Q4. Pourquoi une ampoule a-t-elle plus de chances de griller au moment où on l'allume ? Pourquoi produit-elle un éclair juste avant de griller ?

Q5. Qu'entend-on par « court-circuit » ? Illustrez votre réponse à l'aide d'un schéma.

Q6. Pourquoi les oiseaux peuvent-ils se percher sur les lignes électriques sans s'électrocuter ?

Q7. Les liquides ont une résistance plus grande au début lorsque la température baisse, car ils sont plus visqueux. L'effet est-il le même sur le débit des charges dans un fil ?

Q8. En supposant toutes les autres grandeurs constantes, comment la vitesse de dérive le long d'un fil dépend-elle de chacun des facteurs suivants : (a) la longueur du fil ; (b) la différence de potentiel ; (c) l'aire de la section transversale ; (d) le courant ?

Q9. Un fil de cuivre et un fil d'argent de même longueur et de même diamètre sont traversés par le même courant. Dans lequel des deux fils l'intensité du champ électrique est-elle la plus grande ?

Q10. De quelle(s) manière(s) le courant du faisceau d'électrons dans un tube de téléviseur est-il différent du courant dans un fil ?

Q11. L'expression $P = RI^2$ indique que la puissance augmente avec la résistance, alors que $P = \Delta V^2/R$ semble indiquer le contraire. Faites concorder ces deux idées apparemment contradictoires.

Q12. On accélère un faisceau d'électrons sans augmenter son aire. La densité de courant varie-t-elle lorsque la vitesse des particules augmente ?

Q13. Quels sont les avantages ou inconvénients relatifs que présente l'utilisation d'un seul brin de fil ou de plusieurs brins ayant la même résistance totale ?

Q14. Vrai ou faux ? Le champ électrique est nul dans un conducteur, même si un courant y circule.

Q15. Vrai ou faux ? La loi d'Ohm $\Delta V = RI$ exprime qu'un courant I cause une différence de potentiel ΔV aux bornes d'un dispositif de résistance R lorsqu'il le traverse.

Q16. Le Soleil éjecte chaque seconde un flux de protons dans l'espace. Sous l'effet de leur vitesse initiale, ces particules se déplacent dans l'espace intersidéral, ce qui forme un courant. Comme elles ne sont entraînées par aucun champ électrique, cela contredit-il l'équation $\vec{\mathbf{J}} = \vec{\mathbf{E}}/\rho = \sigma\vec{\mathbf{E}}$?

Q17. Pour mesurer le pH avec précision, on utilise une sonde à deux électrodes, l'une étant recouverte d'un bulbe qui n'est sensible qu'aux ions H^+, qu'on plonge dans la solution qui fait l'objet de la mesure. Comment expliqueriez-vous le fonctionnement de cet appareil ?

Q18. (a) On instaure un champ électrique de même module E dans deux fils cylindriques en cuivre de même longueur, respectivement de rayons r_1 et r_2 ; comment se comparent les vitesses de dérive des électrons dans les fils ? (b) On met bout à bout les deux fils et on les branche à la même différence de potentiel qu'avant ; le champ dans le fil 1 demeure-t-il identique à celui dans le fil 2 ?

EXERCICES
(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

Dans les exercices et les problèmes, lorsqu'il est fait mention de la vitesse de dérive, de la densité de courant ou du champ électrique, il s'agit du module de ces quantités. Les données du tableau 6.1 sont nécessaires pour résoudre certains exercices et problèmes.

6.1, 6.2 et 6.3 Courant, vitesse de dérive, résistance

E1. (I) Dans un tube écran de téléviseur couleur, le courant du faisceau a une intensité de 1,9 mA. La section transversale du faisceau est circulaire et a un rayon de 0,5 mm. (a) Combien d'électrons frappent l'écran par seconde ? (b) Quelle est la densité du courant ?

E2. (I) Dans un accélérateur, les protons se déplacent à la vitesse de 5×10^6 m/s et produisent un faisceau d'intensité 1 μA. Si le rayon du faisceau vaut 1 mm, trouvez : (a) la densité de courant ; (b) n, le nombre de charges par unité de volume.

E3. (I) Un courant de 200 mA circule dans un fil d'argent de rayon 0,8 mm. Un mètre cube d'argent contient $5{,}8 \times 10^{28}$ électrons libres. Trouvez : (a) la vitesse de dérive des électrons ; (b) le champ électrique à l'intérieur du fil.

E4. MonLab (I) Une longueur de 30 km de câble de transport d'électricité, composé d'un fil de cuivre de diamètre 1 cm, transporte un courant de 500 A. Un mètre cube de cuivre contient $8{,}43 \times 10^{28}$ électrons libres. Trouvez : (a) la densité de courant ; (b) le module du champ électrique à l'intérieur du fil ; (c) la vitesse de dérive ; (d) le temps que met un électron donné pour parcourir la longueur du fil.

E5. (I) Le démarreur d'une automobile est alimenté par 80 A circulant dans un câble en cuivre de rayon 0,3 cm. (a) Quelle est la densité de courant ? (b) Déterminez le champ électrique à l'intérieur du fil.

E6. (I) Un fil de cuivre de calibre 14 et de diamètre 1,628 mm transporte 15 A. Un mètre cube de cuivre contient $8{,}43 \times 10^{28}$ électrons libres. Déterminez : (a) la densité de courant ; (b) la vitesse de dérive.

E7. (I) Dans un atome d'hydrogène, l'électron décrit un cercle de rayon $5{,}3 \times 10^{-11}$ m à la vitesse de $2{,}2 \times 10^6$ m/s. Quel est le courant moyen associé à ce mouvement ?

E8. MonLab (II) Le courant circulant dans un fil est donné par $I = (2t^2 - 3t + 5)$ A, où t est en secondes. Quelle est la charge traversant une section transversale du fil entre $t = 2$ s et 5 s ?

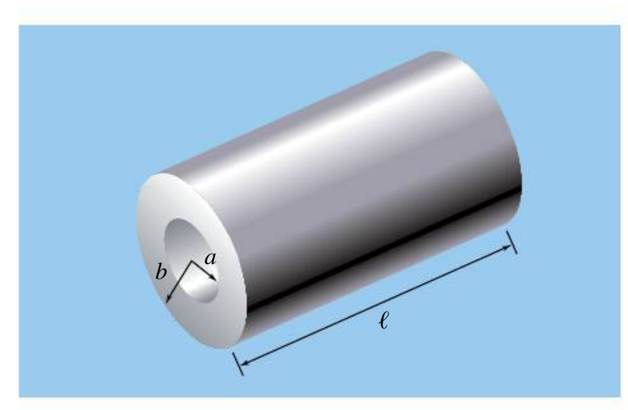
E9. (I) Soit un fil d'aluminium de longueur 10 m et de diamètre 1,5 mm. Il transporte un courant de 12 A. Un mètre cube d'aluminium contient 10^{29} électrons libres. Trouvez : (a) la densité de courant ; (b) la vitesse de dérive ; (c) le champ électrique dans le fil.

E10. (I) Lorsqu'on applique une différence de potentiel de 100 V aux bornes d'un fil de longueur 25 m et de rayon 1 mm, un courant de 11 A circule dans le fil. Trouvez la résistivité du matériau.

E11. (I) Une tige cylindrique de silicium a une longueur de 1 cm et un rayon de 2 mm. Quel est le courant lorsqu'on applique une différence de potentiel de 120 V entre ses extrémités ?

E12. MonLab (II) Un fil de longueur ℓ et de section transversale A possède une résistance R. Quelle est la résistance obtenue si l'on utilise la même quantité de matériau pour réaliser un fil deux fois plus long ?

E13. MonLab (II) Un tube cylindrique de longueur ℓ a un rayon intérieur a et un rayon extérieur b (figure 6.30). La résistivité est ρ. Quelle est la résistance entre les extrémités ?



▲ **Figure 6.30**
Exercice 13.

E14. (I) Un fil d'argent a une résistance de 1,20 Ω à 20 °C. Quelle est sa résistance à 35 °C ? (On néglige les variations de dimensions.)

E15. (I) La résistance d'un fil de cuivre est égale à 0,8 Ω à 20 °C. Lorsqu'on le place dans un four, sa résistance devient égale à 1,2 Ω. Quelle est la température du four ?

E16. (I) Un fil de 4 m de long et de 0,8 mm de diamètre a une résistance de 16 Ω à 20 °C. À 35 °C, sa résistance s'élève à 16,5 Ω. Quel est le coefficient thermique de résistivité ?

E17. (I) Les résistances d'un fil de cuivre et d'un fil d'aluminium sont égales. Quel est le rapport de leur longueur, ℓ_{Cu}/ℓ_{Al}, s'ils ont le même diamètre ?

E18. (II) En associant en série une résistance de carbone et une résistance de nichrome, on peut obtenir une résistance équivalente indépendante de la température. Quel pourcentage de la résistance représente la contribution du carbone ?

E19. (I) Les résistances d'un fil de cuivre et d'un fil d'aluminium sont égales. Quel est le rapport des diamètres, d_{Cu}/d_{Al}, s'ils ont la même longueur ?

E20. (I) La conductance G d'un dispositif est définie comme étant l'inverse de sa résistance, $G = 1/R$. L'unité SI de la conductance est le siemens ($1\ S = 1\ \Omega^{-1}$). Quelle est la conductance d'un dispositif dans lequel circule un courant de 2 A lorsqu'on lui applique une différence de potentiel de 60 V ?

E21. (I) Un fil de rayon 2 mm et de longueur 12 m a une résistance de 0,027 Ω. Quelle est sa résistivité ? Pouvez-vous, à l'aide du tableau 6.1 (p. 221), identifier le matériau ?

E22. (I) La résistance d'une tige de carbone est égale à 0,6 Ω à 0 °C. Quelle est sa résistance à 30 °C ?

E23. (I) Un fil de longueur 10 m et de diamètre 1,2 mm a une résistance de 1,4 Ω. Quelle serait la résistance si le fil avait une longueur de 16 m et un diamètre de 0,8 mm ?

E24. (I) Un fil est relié à une pile de 6 V. À 20 °C, le courant vaut 2 A, alors qu'à 100 °C il vaut 1,7 A. Quel est le coefficient thermique de résistivité ?

E25. (I) Un fil de cuivre a une résistance de 1 Ω à 20 °C. À quelle température la résistance est-elle de 10 % (a) supérieure ; (b) inférieure ?

6.4 et 6.6 Loi d'Ohm, puissance

E26. (I) Un haut-parleur est relié à un amplificateur audio à l'aide d'un fil de cuivre de calibre 18 (diamètre 1,024 mm) de longueur totale 20 m. (a) Quelle est la résistance du fil ? (b) Si le haut-parleur a une résistance de 4 Ω, quel pourcentage de la puissance fournie par l'amplificateur est dissipée dans le fil ? (Pour simplifier, on suppose que la différence de potentiel ne varie pas en fonction du temps et que le haut-parleur est une résistance.)

E27. (I) Une ligne de transport d'électricité de 200 km de long a une résistance de 10 Ω et transporte un courant de 1200 A. Quelle est la différence de potentiel entre deux pylônes séparés de 200 m ?

E28. (I) Selon un code de sécurité, le courant maximal admissible pour un fil de cuivre de calibre 14 (diamètre 1,628 mm) est de 15 A, et il est de 5 A pour un fil de calibre 18 (diamètre 1,024 mm). Quelle serait la différence de potentiel entre les extrémités d'une longueur de 10 m de chaque type de fil pour un courant maximal ?

E29. (I) Une batterie d'automobile de 12 V porte l'inscription 80 A·h. L'ampère-heure (A·h) est une unité de charge qui correspond à un ampère *multiplié* par une heure. (a) Quelle charge (en coulombs) peut-elle « pomper » ? (b) Pendant combien de temps peut-elle fournir une puissance de 25 W, en supposant la différence de potentiel constante ?

E30. (I) Un grille-pain fonctionne à 120 V avec un courant de 7 A. Il met 30 s pour accomplir sa tâche. À raison de 0,06 $ par kilowattheure, combien cela coûte-t-il de griller une tranche de pain ? Le kilowattheure (kWh) est une unité d'énergie qui correspond à un kilowatt *multiplié* par une heure.

E31. (I) Un fil de cuivre de calibre 14 a un diamètre de 1,628 mm, alors qu'un fil de calibre 18 a un diamètre de 1,024 mm. Comparez les pertes de puissance électrique lorsqu'un courant de 8 A circule dans une longueur de 10 m dans chacun des fils.

E32. MonLab (I) Les deux phares d'une automobile demandent un courant total de 10 A sous 12 V. Sachant que la combustion de 1 L d'essence libère 3×10^7 J et que la conversion en puissance électrique a un rendement de 25 %, quelle est la quantité d'essence consommée en 1 h uniquement par les phares ?

E33. (I) Une pile fournit 30 mW à un haut-parleur de 8 Ω. Combien d'électrons quittent la borne négative en 1 min ?

E34. (I) Un fil de cuivre de calibre 12 et de diamètre 2,05 mm est utilisé pour fournir 12 A à un appareil électrique. Quelle est la puissance dissipée dans 20 m de ce fil ?

E35. (I) Un fil d'aluminium a une résistance par unité de longueur de $1{,}8 \times 10^{-3}$ Ω/m et transporte un courant de 200 A. Quelle est la puissance dissipée dans 10 km de ce fil ?

E36. MonLab (II) Un moteur fonctionnant sous une tension de 240 V demande 10 A pour soulever un bloc de 2000 kg verticalement à une vitesse constante de 2,5 cm/s. Trouvez : (a) sa puissance mécanique en chevaux-vapeur britanniques (hp) (consultez le tableau des facteurs de conversion à la fin du livre) ; (b) le rendement (en pourcentage) de conversion de la puissance électrique en puissance mécanique.

E37. (II) Une centrale électrique fournit 100 kW à un réseau par des câbles de résistance totale 5 Ω. Trouvez la perte de puissance dans les câbles si la différence de potentiel aux bornes du réseau est égale à (a) 10^4 V ; (b) 2×10^5 V.

E38. MonLab (II) Une bouilloire fonctionnant sous 120 V chauffe 1,5 L d'eau de 20 °C à 90 °C en 8 min. Quel

est le courant circulant dans la bouilloire ? (Il faut fournir une énergie de 4190 J pour augmenter de 1 °C la température de 1 kg d'eau.)

E39. (II) Un tube en verre de rayon intérieur 1 cm et de longueur 20 cm contient de l'eau parcourue par un courant. Quelle est la différence de potentiel nécessaire pour élever la température de l'eau de 30 °C en 4 min ? La résistivité de l'eau est de 10^{-2} Ω·m, et il faut fournir une énergie de 4190 J pour augmenter de 1 °C la température de 1 kg d'eau.

E40. MonLab (I) Une ampoule à trois intensités utilise deux filaments, seuls ou en série, pour produire trois puissances différentes, soit 41 W, 70 W et 100 W, lorsqu'elle est reliée à une source de 120 V. Trouvez la résistance des deux filaments.

E41. (I) Une ampoule à trois intensités utilise deux filaments, seuls ou en parallèle, pour produire trois puissances différentes, soit 50 W, 100 W et 150 W, lorsqu'elle est reliée à une source de 120 V. Trouvez la résistance des deux filaments.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

6.1 et 6.2 Courant, vitesse de dérive

E42. (II) À la température ambiante, l'aluminium a trois électrons libres par atome. La masse volumique de l'aluminium est de 2700 kg/m^3 ; consultez le tableau périodique de l'annexe D pour connaître sa masse molaire. (a) Déterminez n, le nombre d'électrons libres par unité de volume. (b) Quelle est la vitesse de dérive associée à un courant de 10 A circulant dans un fil d'aluminium de rayon 0,7 mm ?

E43. (II) La charge circulant dans un fil et traversant sa section de 2 cm^2 est décrite par l'expression $q(t) = 3 - 4t + 5t^2$, où t est en secondes et q en coulombs. (a) Trouvez une expression pour $I(t)$. (b) Quelle est la densité de courant à $t = 1$ s ?

E44. (I) La technique du *patch-clamp* (voir la figure 5.26, p. 195) permet de mesurer le courant qui traverse *un seul* canal ionique. Si on mesure un courant de 2×10^{-12} A dans un canal tensiodépendant à Ca^{++} du muscle cardiaque, quel temps moyen met chaque ion pour traverser le canal ? Considérez que la largeur du canal ne permet qu'aux ions de traverser un derrière l'autre.

E45. (I) Une protéine de charge $q = -50e$ dérive de 4,2 cm dans un gel d'électrophorèse où on a fait régner un champ électrique uniforme correspondant à une tension de 150 V. Si les électrodes qui produisent ce champ sont distantes de 15 cm, trouvez : (a) la différence de potentiel que traverse la protéine ; (b) le travail fait par le champ électrique.

E46. (II) Le sang contient 5 milliards de globules rouges par litre. Dans une artère ayant un diamètre de 0,7 cm, le débit sanguin est de 0,3 L/min. (a) Quelle est la vitesse moyenne d'un globule rouge individuel ? (b) Avec un instrument, on mesure que la vitesse en un point est 27 cm/s. Quel est un diagnostic probable ?

6.3 Résistance

E47. (I) Montrez que 1Ω = 1 kg·m^2/(s^3·A^2).

E48. (I) La section transversale d'un rail de chemin de fer est de $5{,}0 \times 10^{-3}$ m^2. Si le fer a une résistivité de $3{,}0 \times 10^{-7}$ Ω·m, quelle résistance possède un rail de 10 km ?

E49. (II) À 20 °C, la résistance d'un fil de cuivre est de 6,52 mΩ et celle d'un fil de tungstène est de 6,45 mΩ. (a) À quelle température la résistance des deux fils serait-elle égale ? Le coefficient thermique de résistivité du tungstène est de $4{,}5 \times 10^{-3}$ °C^{-1}. (b) Illustrez par un graphe la réponse à la question (a).

E50. (I) Le champ électrique à l'intérieur d'un fil de rayon 1,2 mm a un module de 0,1 V/m et le courant a une intensité de 16 A. Quelle est la résistivité du matériau qui constitue le fil ?

E51. (II) Un fil de cuivre a une masse de 21 g et une résistance de 0,065 Ω. La masse volumique du cuivre est de 8900 kg/m^3. Quelles sont (a) la longueur et (b) l'aire de section du fil ?

E52. (II) Une différence de potentiel constante est appliquée aux deux extrémités d'un fil de nichrome. Quand on élève la température du fil à partir de 20 °C, le courant chute à 96 % de sa valeur à 20 °C. Quelle est la nouvelle température ?

E53. (II) Quelle masse de cuivre est nécessaire pour produire un fil de 1 km ayant une résistance de 1 Ω ? La masse volumique du cuivre est de 8900 kg/m^3.

E54. (I) Un fil de longueur L et de rayon r est fait d'un métal de résistivité ρ contenant n électrons libres par unité de volume. On établit une différence de potentiel ΔV entre ses extrémités. Trouvez une expression pour (a) le champ électrique ; (b) la vitesse de dérive des électrons ; (c) le courant.

P1. (I) Le nichrome est un alliage utilisé dans les éléments chauffants d'un radiateur à eau qui fonctionne sous 120 V. La résistance d'un des éléments est de 16 Ω à 20 °C. (a) Si le rayon du fil est de 1 mm, quelle est sa longueur ? (b) Quel est le courant à 200 °C avec la même tension ?

P2. (I) On donne les valeurs suivantes pour un élément de circuit (comme une ampoule) :

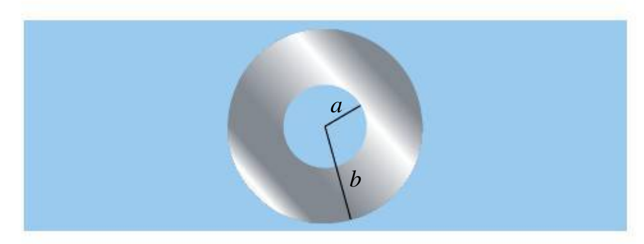
ΔV (V) :	2	4	6
I (A) :	0,3	0,5	0,7

(a) En interpolant à partir des données précédentes, déterminez la résistance de l'élément de circuit lorsque $\Delta V = 5$ V. (b) Quel serait le courant pour $\Delta V = 0$? (c) L'élément obéit-il à la loi d'Ohm ?

P3. (II) Un tube cylindrique de longueur L a un rayon intérieur a et un rayon extérieur b (figure 6.31). Le matériau a une résistivité ρ. Le courant circule radialement de la surface intérieure vers la surface extérieure. (a) Montrez que la résistance est

$$R = \frac{\rho}{2\pi L} \ln \frac{b}{a}$$

(b) Pour un courant circulant dans cette direction, quelle est la résistance d'un filament de carbone dont les dimensions sont $a = 0{,}4$ cm, $b = 3$ cm et $L = 30$ cm ? (*Indice* : Commencez par l'équation $J = E/\rho$ en remarquant que $E_r = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$.)



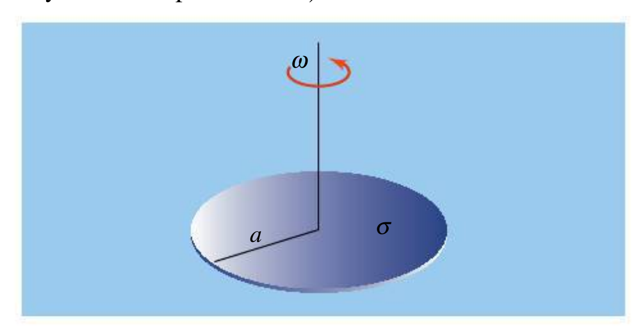
▲ **Figure 6.31**
Problème 3.

P4. (II) Une coquille sphérique a un rayon intérieur a et un rayon extérieur b. La résistivité du matériau est ρ. Montrez que, lorsqu'on applique une différence de potentiel entre les surfaces intérieure et extérieure, la résistance est

$$R = \frac{(b - a)\rho}{4\pi ab}$$

On suppose que le courant est partout dirigé radialement. (*Indice* : Commencez par $J = E/\rho$ puis utilisez $E_r = -\mathrm{d}V/\mathrm{d}r$.)

P5. (I) La densité surfacique de charge d'un disque non conducteur de rayon a est uniforme, positive et égale à σ. Le disque tourne à une vitesse angulaire ω (figure 6.32). Quel courant traverse une surface perpendiculaire au plan du disque et s'étendant du centre jusqu'à sa limite extérieure ? (*Indice* : Trouvez d'abord le courant correspondant à un anneau de rayon r et d'épaisseur dr.)



▲ **Figure 6.32**
Problème 5.

P6. (II) On applique une différence de potentiel de 2 V entre les extrémités d'un fil d'argent de longueur 30 m et de diamètre 0,5 mm. Le nombre d'électrons libres par unité de volume est de $5{,}8 \times 10^{28}$ m^{-1}. Trouvez : (a) la vitesse de dérive ; (b) le temps moyen entre les collisions ; (c) le libre parcours moyen à 300 K.

P7. (I) Une cellule de galvanoplastie utilise du nitrate d'argent ($AgNO_3$) pour déposer l'argent (108 u) sur une électrode. Si un courant de 0,2 A est partagé à parts égales entre les ions Ag^+ et NO_3^-, quelle masse d'argent est déposée en 10 min ?

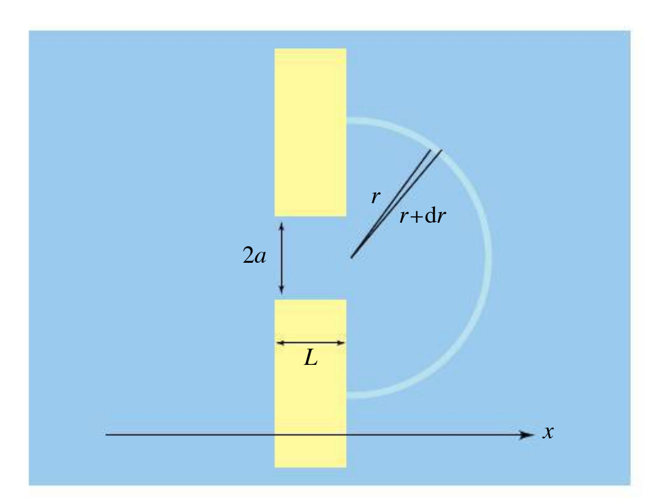
P8. (II) Une automobile électrique de 600 kg est alimentée par un groupe de 20 batteries de 12 V en parallèle, chacune d'elles pouvant libérer une charge de 100 A·h (voir l'exercice E29). À 60 km/h, une force de 180 N combinant tous les types de friction s'oppose au mouvement de l'automobile. Pendant combien de temps peut-elle rouler à cette vitesse (a) sur un sol horizontal ; (b) en montant une pente de 10° ? On suppose que la différence de potentiel reste constante.

P9. MonLab (I) On relie ensemble les extrémités d'un fil de cuivre et d'un fil d'acier ayant chacun une longueur de 40 m et un rayon de 1 mm. On applique une différence de potentiel de 10 V entre les extrémités libres. Trouvez : (a) la puissance dissipée dans chaque fil ; (b) le champ électrique dans chaque fil.

P10. (I) Un canal ionique tensiodépendant à Na^+ (voir le sujet connexe du chapitre 5) a la forme d'un entonnoir, la partie la plus étroite servant à favoriser le passage des ions Na^+ en particulier. (a) En considérant que cette portion étroite, de rayon a et de longueur L, sépare deux réservoirs aqueux infinis (figure 6.33), montrez que la résistance électrique totale rencontrée par un ion Na^+ qui passe de $x = -\infty$ à $x = +\infty$ est approximativement donnée par

$$R = \frac{\rho}{\pi a^2}\left(L + \frac{1}{2}a\right)$$

(*Indice*: Considérez la résistance de coquilles sphériques concentriques de rayon r, tel qu'illustré, puis intégrez entre les bornes $r \approx R$ et $r = \infty$.) Notez qu'un calcul exact, plus complexe, où on intègre jusqu'à l'ouverture en forme de cercle, donne $R = \frac{\rho}{\pi a^2}(L + \frac{1}{2}\pi a)$. (b) Si $L = 0{,}5$ nm, $a = 0{,}3$ nm et $\rho = 1{,}1\ \Omega{\cdot}$m, combien de canaux par unité de surface contient une membrane dont la conductance maximale aux ions Na^+ est de 120 mS/cm^2 ? Utilisez le résultat de votre calcul en (a). (La conductance est définie à l'exercice E20.)



▲ **Figure 6.33**

Problème 10.

P11. (II) On place le long d'un axe des x un fil métallique de résistivité ρ et de longueur L dont le rayon $r(x)$ croît lentement et linéairement de r_1 à r_2 d'une extrémité à l'autre du fil (le fil est quasi cylindrique). Le fil est placé entre $x = 0$ et $x = L$. On applique la différence de potentiel ΔV entre ses extrémités. Trouvez une expression donnant, en fonction de x et des grandeurs précédentes, (a) le champ électrique ; (b) la vitesse de dérive. (Considérez que, dans le cas où $L \gg R$, la densité de courant n'a qu'une composante selon x.)



CHAPITRE 7

LES CIRCUITS À COURANT CONTINU



SOMMAIRE



Cette photo, prise lors de la construction de la tour John Hancock à Chicago, montre un ouvrier qui relie une lampe à un circuit électrique. Les lampes de ce circuit peuvent être considérées comme des résistances associées en parallèle, ce que nous étudierons dans ce chapitre.

Au chapitre précédent, nous avons présenté un circuit électrique rudimentaire formé d'une pile et d'une résistance. Mais un circuit réel combine souvent plusieurs résistances, plusieurs sources d'énergie et d'autres composants comme des condensateurs ; ses fils peuvent aussi comporter des embranchements. La tension (différence de potentiel) aux bornes de chaque composant et le courant dans chaque fil ne correspondent pas, en général, à la tension aux bornes d'une pile et au courant qu'elle débite. L'objet de ce chapitre est d'apprendre à les déterminer.

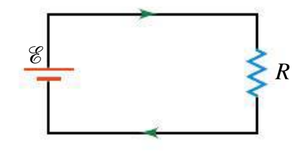
On distingue les circuits à **courant continu (c.c.)** de ceux à *courant alternatif* (*c.a.*), selon que le courant s'écoule toujours dans le même sens ou non. Parmi les courants continus, on distingue ceux dont l'intensité dépend du temps ou non. On verra qu'on peut analyser le courant et la tension dans *toutes* les

catégories de circuits grâce à deux lois simples, formulées par Gustav Kirchhoff (1824-1887). Dans ce chapitre, nous insisterons sur les circuits à courant continu, ceux à courant alternatif faisant l'objet des chapitres 11 et 12.

Notre étude débutera par le rôle de la pile (section 7.1) et le cas simple de circuits composés de résistances parcourues par des courants constants (section 7.2). Après la présentation des lois de Kirchhoff, nous verrons, à la section 7.4, comment appliquer ces lois à des circuits dont le courant est constant, tandis que nous verrons, à la section 7.5, comment les appliquer à des circuits comprenant un condensateur, dont l'intensité du courant dépend du temps. Le sujet connexe à la fin du chapitre traitera du rôle de composants actifs, ouvrant une porte vers l'électronique.

7.1 LA F.É.M.

Lorsqu'un courant circule dans une résistance, de l'énergie est dissipée : la charge qui « tombe » vers les potentiels décroissants perd de l'énergie potentielle électrique sans pour autant gagner d'énergie cinétique (voir la section 6.1). Tout circuit doit donc aussi comporter une source d'énergie électrique, quelque chose qui « soulève » la charge.



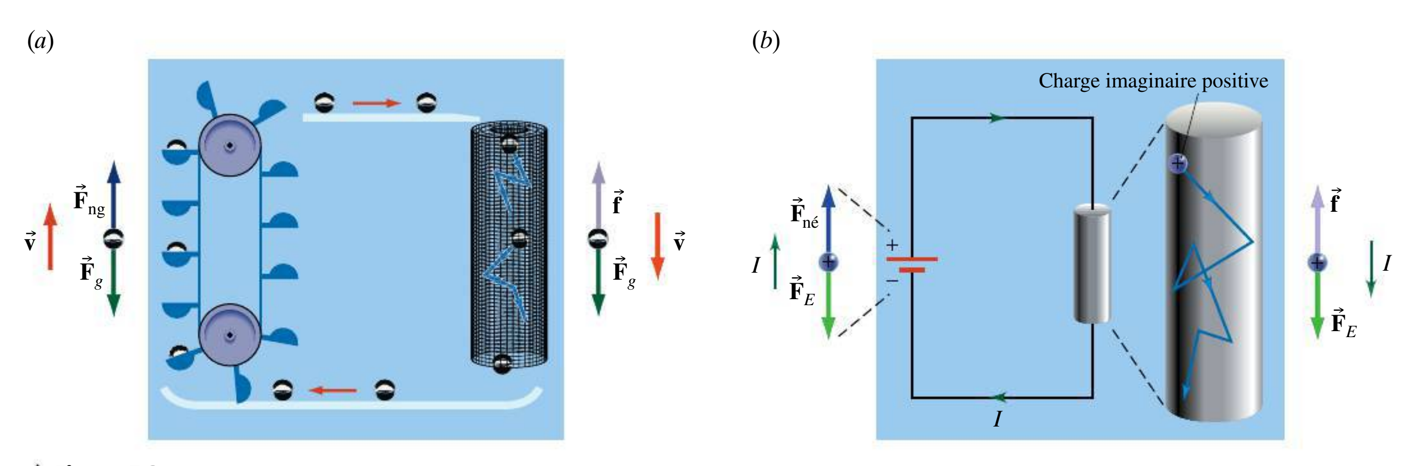
▲ **Figure 7.1**

Un circuit électrique simple, composé d'une source de f.é.m., d'une résistance R et de deux fils de résistance négligeable.

Le fonctionnement du circuit simple illustré à la figure 7.1 peut se comprendre par comparaison avec celui d'un dispositif mécanique où la hauteur joue un rôle analogue au potentiel, comme nous l'avons fait à la figure 6.3 (p. 213). La figure 7.2*a* représente un parcours fermé que des billes suivent à vitesse constante, alors que la figure 7.2*b* montre le circuit électrique que des particules fictives chargées positivement parcourent à vitesse constante.

La moitié gauche de chacune des deux figures est la *source* d'énergie : une courroie verticale, entraînée par un moteur, soulève les billes vers des hauteurs plus élevées ; une pile, alimentée par une réaction chimique, « soulève » les charges vers des potentiels plus élevés. Le gain d'énergie implique que ces agents extérieurs font un travail non conservatif *positif*.

Dans chaque figure, de l'énergie est *dissipée* dans la moitié droite : les billes tombent dans un tube vertical encombré de fils métalliques et les collisions avec ces fils dissipent leur énergie, leur chute se faisant à vitesse moyenne constante ;



▲ **Figure 7.2**

(*a*) Un analogue mécanique d'un circuit électrique. Un dispositif mécanique fournit l'énergie servant à soulever les billes à une certaine hauteur. Elles tombent ensuite à vitesse constante dans un tube encombré de fils métalliques, leur énergie potentielle gravitationnelle étant convertie en énergie thermique. (*b*) Dans un circuit électrique, une source de f.é.m. élève l'énergie potentielle électrique des charges. Cette énergie est dissipée sous forme d'énergie thermique dans la résistance.

de même, les charges « tombent » dans le fil conducteur encombré par les ions immobiles du métal et les collisions avec ces ions dissipent leur énergie, leur « chute » se faisant à une vitesse de dérive constante (voir la section 6.1). Ces collisions font un travail non conservatif *négatif*. Ce travail équivaut à celui que ferait une force de frottement fictive $\vec{\mathbf{f}}$ (qui représente la moyenne dans le temps des forces exercées par les collisions) qui serait de même module que la force électrique dans le fil. (La force résultante étant alors nulle, on obtient effectivement un mouvement à vitesse constante.) Le travail de cette force fictive constante étant $W = fs \cos\theta = -fs$, on voit qu'il est négatif.

Le travail non conservatif que fournit une pile est celui nécessaire pour séparer les charges positives et négatives et pour les placer sur les bornes en surmontant la répulsion des charges qui s'y trouvent déjà. Ce travail équivaut à celui d'une force constante fictive « non électrostatique » $\vec{\mathbf{F}}_{\text{né}}$ qui serait de même module que la force électrique entre les bornes (figure 7.2*b*), un peu comme la force « non gravitationnelle » $\vec{\mathbf{F}}_{\text{ng}}$ exercée sur les billes par l'intermédiaire de la courroie est de même module que leur poids (figure 7.2*a*). Le travail de cette force fictive constante étant $W = F_{\text{né}}s \cos\theta = F_{\text{né}}s$, on voit qu'il est positif.

Un dispositif qui peut faire sur de la charge un tel travail non conservatif, c'est-à-dire convertir une certaine forme d'énergie en énergie potentielle électrique, est appelé une *source de f.é.m.* (nous reviendrons sur l'origine de ce terme). Dans le cas d'une pile, un exemple de source de f.é.m., c'est de l'énergie chimique qui est utilisée, mais d'autres sources utilisent de l'énergie mécanique, thermique ou lumineuse, par exemple. La **f.é.m.** $\mathscr{E}$ d'un dispositif est définie par

Définition de la f.é.m.

$$\mathscr{E} = \frac{W_{\text{né}}}{q} \tag{7.1}$$

La f.é.m. d'un dispositif correspond au travail par unité de charge accompli pour faire circuler celle-ci dans un circuit fermé.

Dans le circuit de la figure 7.1, le travail $W_{\text{né}}$ se fait exclusivement dans la pile, mais nous verrons au chapitre 10 des dispositifs qui peuvent faire un travail sur la charge à mesure qu'elle parcourt le circuit. C'est pourquoi $W_{\text{né}}$ est défini comme le travail fait sur l'ensemble d'un circuit fermé. L'indice « né » signifie que ce travail est effectué par un mécanisme non électrostatique, comme une pile ou un générateur électrique.

Selon l'équation 7.1, la f.é.m. se mesure en *volts*, tout comme la différence de potentiel. De même, le travail effectué par la source sur une charge q est $W_{\text{né}} = q\mathscr{E}$, une équation analogue à $\Delta U = q\Delta V$, qui donne l'énergie perdue par la charge q dans la résistance. Ces deux notions sont différentes, même si leurs unités de mesure sont identiques : la f.é.m. est un travail non conservatif par unité de charge, alors que la différence de potentiel est une variation d'énergie potentielle (c'est-à-dire un travail conservatif) par unité de charge. De plus, les mécanismes sont très différents : une différence de potentiel correspond uniquement à un champ électrique (conservatif).

Comme nous l'avons indiqué à la section 6.1, lorsqu'un courant circule dans un fil, le champ électrique « d'entraînement » est produit par la distribution des charges sur les bornes de la pile et sur la surface du fil. Cette distribution de charge est causée par une source de f.é.m. Une f.é.m. est toujours associée à un mécanisme non électrostatique qui fournit l'énergie requise pour séparer les

charges positives des charges négatives. Une source de f.é.m. convertit donc une certaine forme d'énergie en énergie potentielle électrique.

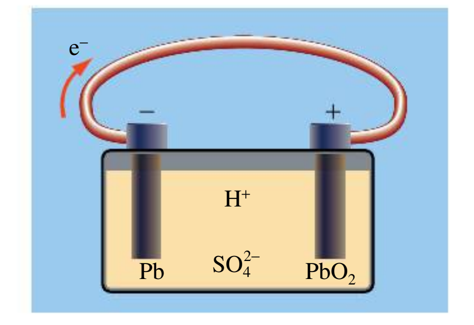
La valeur de la f.é.m. est habituellement, mais pas toujours, une propriété intrinsèque d'un dispositif. C'est le cas pour une pile idéale, qui maintient donc une différence de potentiel *fixe* à ses bornes, en plus de fournir l'énergie requise pour «soulever» la charge qui circule du potentiel le plus bas vers le plus élevé. Ce sont les deux rôles que joue une pile, tels que nous les avions énoncés à la section 6.1.

Une erreur conceptuelle fréquente consiste à penser que la pile «génère» du courant. Au contraire, la charge qui entre par une borne de la pile est exactement la même que celle qui sort à l'autre borne. S'il n'en était pas ainsi, le principe de conservation de la charge serait violé ou encore la pile acquerrait une charge. Le rôle de la pile est plutôt de *fournir de l'énergie* à la charge qui la traverse. (Comparez cette remarque à celle, similaire, faite à la section 6.4.)

En terminant, soulignons que «f.é.m.» signifiait historiquement «force électromotrice», un terme introduit par Alessandro Volta (1745-1827) à une époque où les concepts n'étaient pas encore définis clairement. Puisqu'elle n'est pas du tout une force au sens mécanique (mesurée en newtons), nous n'utiliserons jamais ce terme. Le sigle «f.é.m.» s'utilise comme s'il était un mot à part entière. D'ailleurs, son équivalent anglais, *emf*, est déjà devenu un mot, comme c'est le cas pour «laser», «sida» ou «cégep». Dans la conception aujourd'hui acceptée, il y a bel et bien une force, la force électrique, qui déplace les charges positives vers les potentiels décroissants, mais cette force dépend aussi de la géométrie du fil, la pile ne déterminant que l'énergie qui est fournie.

Le fonctionnement chimique d'une pile

Volta expliquait le fonctionnement de sa pile voltaïque (voir l'aperçu historique de la section 6.1) par un phénomène dû au seul contact de deux métaux et imaginait que l'électrolyte dans lequel baignaient ces métaux ne servait que de conducteur. C'est Humphry Davy (1778-1829) qui montra l'importance des interactions chimiques entre les métaux et l'électrolyte. Nous allons donner ci-dessous une explication chimique simple du fonctionnement d'une cellule plomb-acide comme celles que l'on trouve dans les batteries d'automobiles.



▲ **Figure 7.3**
Dans une pile plomb-acide, les électrons passent continuellement de la borne en plomb (Pb) à la borne en oxyde de plomb (PbO_2) en traversant le fil.

Dans une cellule plomb-acide (figure 7.3), une électrode de plomb (Pb) et une électrode d'oxyde de plomb (PbO_2) sont immergées dans une solution aqueuse d'acide sulfurique (H_2SO_4) qui se dissocie en ions hydrogène positifs (H^+) et en ions sulfate négatifs (SO_4^{2-}). Lorsqu'on ferme le circuit en reliant les bornes par un fil, les réactions suivantes ont lieu. Sur l'électrode de Pb,

$$Pb + SO_4^{2-} \rightarrow PbSO_4 + 2\,e^-$$

Les deux électrons libérés dans cette réaction chargent négativement la borne de plomb, aux dépens de l'électrolyte qui perd un ion. Ce déplacement de charge se poursuit quand les deux électrons quittent la borne de plomb et pénètrent dans le fil. Au même instant, sur l'électrode de PbO_2, deux autres électrons quittent le fil pour pénétrer dans la borne et la réaction suivante a lieu :

$$PbO_2 + 4\,H^+ + SO_4^{2-} + 2\,e^- \rightarrow PbSO_4 + 2\,H_2O$$

Cette réaction décharge l'électrode, qui perd ses deux électrons, au profit de l'électrolyte qui gagne une charge $-2e$ (cinq ions totalisant une charge $+2e$ disparaissent). Il y a donc effectivement l'équivalent d'un flux constant d'électrons dirigé, dans la pile, de l'électrode de PbO_2 vers celle de Pb et, dans le fil, de l'électrode de Pb vers celle de PbO_2.

Notons que, pour chaque électron quittant l'électrode de Pb, un autre électron arrive sur l'électrode de PbO_2 ; le fil lui-même n'acquiert aucune charge. Il y a transfert continu d'électrons de l'électrode de Pb, qui agit comme borne négative, à l'électrode de PbO_2, qui agit comme borne positive. Le résultat est un courant circulant dans le fil extérieur. La pile s'épuise au cours de ce processus : l'acide (H^+ et SO_4^{2-}) est consommé et un produit indésirable, $PbSO_4$, se dépose sur les deux électrodes. La concentration d'acide détermine la densité de l'électrolyte, qui passe de 1,27 pour une batterie en bon état à 1,14 pour une batterie devant être rechargée.

Si le fil extérieur est débranché, les charges sont isolées sur les électrodes et la réaction chimique cesse quand un équilibre est atteint. À l'équilibre, une différence de potentiel constante de 2,05 V est maintenue entre les électrodes. Une batterie d'automobile contient six cellules en série, qui donnent une f.é.m. totale d'environ 12 V. On peut aussi recharger une telle batterie en la reliant à une source de f.é.m. plus puissante, en s'assurant de faire correspondre les électrodes de même signe. Sous l'effet de cette f.é.m., le courant circule alors en sens inverse et, à chacune des électrodes, se produisent les réactions chimiques inverses qui éliminent le $PbSO_4$ et remettent l'acide en solution. (Une fois la pile complètement rechargée, il est important de la couper de la f.é.m. extérieure. Si on poursuit le processus alors que les électrodes ont retrouvé leur composition d'origine, l'énergie de la f.é.m. sert alors à briser les molécules d'eau de la solution en leurs constituants (H et O), qui forment un mélange particulièrement explosif.)

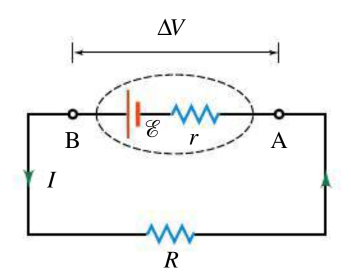
Il existe plusieurs équivalents biologiques d'une pile, le plus frappant étant l'organe utilisé par les anguilles électriques pour se repérer et, chez certaines espèces d'anguilles, pour chasser. Mais un exemple beaucoup plus commun, présent chez *tous* les êtres vivants, est celui des pompes moléculaires qui consomment l'énergie chimique de l'adénosine triphosphate (ATP) pour accumuler des ions de part et d'autre d'une membrane, exactement comme une pile accumule des charges sur ses bornes. Nous avons déjà vu l'exemple de la pompe Na/K dans le sujet connexe du chapitre 5, mais il y en a de nombreuses autres qui transportent des ions Ca^{++}, des ions H^+, etc. Les charges accumulées par ces « piles » moléculaires servent à des centaines de processus biochimiques, dont les plus évolués sont la contraction musculaire et l'influx nerveux.

Inévitablement, ces « piles » biologiques nécessitent aussi d'être rechargées, c'est-à-dire qu'il faut régénérer leur source d'énergie chimique (ATP). Les *mitochondries* sont des organites cellulaires spécialisés à cette fin : leurs membranes contiennent une pompe, l'ATP-synthase (voir l'exemple 4.6), qui se distingue par le fait qu'elle fonctionne « à l'envers » : elle utilise une différence de concentration ionique (dans ce cas, des ions H^+) pour générer un courant qui lui permet de synthétiser de l'ATP.

La différence de potentiel aux bornes d'une pile réelle

Une pile idéale maintient à ses bornes une différence de potentiel parfaitement constante même quand elle débite un courant. En réalité, toute source de f.é.m. dissipe de la chaleur, ce qui signifie qu'elle a une résistance interne r. La différence de potentiel $\Delta V = rI$ (loi d'Ohm) étant requise pour que le courant traverse cette résistance, la tension aux bornes de la pile diffère de sa f.é.m.

On modélise une **pile réelle** comme une source idéale de f.é.m. $\mathscr{E}$ en série avec une résistance r (figure 7.4). Pour déterminer la tension aux bornes de la pile (c'est-à-dire la différence de potentiel entre les points A et B sur la figure), on



▲ **Figure 7.4**

Une pile réelle est considérée comme une source idéale de f.é.m. $\mathscr{E}$, en série avec une résistance *interne* r. Lorsqu'un courant circule dans le sens indiqué, la différence de potentiel aux bornes est $\Delta V = \mathscr{E} - rI$.

suit le trajet d'une charge positive qui se rend d'un point à l'autre dans le sens du courant. Durant la traversée de la résistance interne, la charge « tombe » vers un endroit dont le potentiel est plus bas ; cette chute de potentiel est $\Delta V = rI$. Lorsque la charge se déplace dans la source idéale de f.é.m. depuis sa borne négative jusqu'à sa borne positive, elle est « soulevée » vers des potentiels plus élevés ; cette hausse de potentiel est de $+\mathscr{E}$. Au total,

Différence de potentiel entre les bornes d'une pile réelle

$$\Delta V = V_B - V_A = \mathscr{E} - rI \qquad (7.2a)$$

Il arrive que le courant circulant dans une pile réelle soit de sens opposé à celui qui est indiqué à la figure 7.4. Cela se produit lorsqu'une première pile est en train d'être « rechargée » par une seconde pile de f.é.m. plus élevée et de sens opposé : la seconde pile « force » le courant à traverser la première pile dans le sens contraire du sens habituel, et on a alors

$$\Delta V = \mathscr{E} + rI \qquad (7.2b)$$

Soulignons que, si $I = 0$ *ou* $r = 0$, nous avons $\Delta V = \mathscr{E}$. Par conséquent, on peut mesurer la f.é.m. de bien des types de sources à partir de la différence de potentiel aux bornes « en circuit ouvert ». Contrairement à la f.é.m., qui est habituellement une propriété fixe de la source, la différence de potentiel aux bornes dépend du courant qui circule dans le dispositif. Comme la résistance interne d'une pile augmente avec l'âge de la pile, la différence de potentiel aux bornes diminue pour une valeur donnée du courant de sortie.

Le fait que la f.é.m. soit numériquement égale à la différence de potentiel aux bornes lorsque $I = 0$ ne signifie pas que la f.é.m. est « identique » à la différence de potentiel. D'une certaine façon, la condition $I = 0$ représente un équilibre entre deux tendances contraires : les charges ont tendance à réduire au maximum leur énergie potentielle électrique et la source de f.é.m. a tendance à les séparer et donc à réduire au maximum une autre forme d'énergie, par exemple l'énergie des liaisons chimiques.

Exemple 7.1

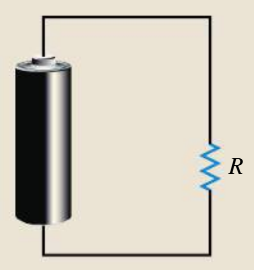
On branche une pile réelle à une résistance externe R (figure 7.5). Lorsque $R = 1\ \Omega$, la différence de potentiel aux bornes de la pile est de 6 V ; lorsque $R = 2\ \Omega$, la différence de potentiel égale 8 V. Trouver la valeur de la f.é.m. et de la résistance interne de la pile.

Solution

L'équation 7.2*a* relie la différence de potentiel aux bornes d'une pile avec le courant qu'elle débite. La loi d'Ohm, elle, ne s'applique *pas* à une pile : elle relie la différence de potentiel ΔV aux bornes de la résistance R au courant I qui traverse cette résistance : $I = \Delta V/R$. Dans ce circuit simple, la résistance et la pile sont traversées par le même courant et ont à leurs bornes des différences de potentiel identiques. ■

Dans le premier cas, on a 6 V aux bornes de la pile et $R = 1\ \Omega$. On a donc aussi $\Delta V = 6$ V aux bornes de R, d'où $I = \Delta V/R = 6$ A. Puisque ce courant est le même que celui débité par la pile, l'équation 7.2*a* donne

$$6 = \mathscr{E} - 6r \qquad \text{(i)}$$



▲ **Figure 7.5**

Une pile réelle est branchée à une résistance externe R.

On ne peut pas résoudre l'équation tout de suite. Il faut utiliser les données du deuxième cas, $\Delta V = 8$ V et $R = 2\ \Omega$, qui correspondent à $I = \Delta V/R = 4$ A. L'équation 7.2*a* donne

$$8 = \mathscr{E} - 4r \qquad \text{(ii)}$$

La résolution du système d'équations (i) et (ii) donne $r = 1\ \Omega$ et $\mathscr{E} = 12$ V.

7.2 LES ASSOCIATIONS DE RÉSISTANCES EN SÉRIE ET EN PARALLÈLE

Quand on relie entre elles plusieurs résistances, ou d'autres composants de circuit qui ont aussi une résistance électrique, on doit pouvoir déterminer la résistance équivalente de l'ensemble, comme on l'a fait pour les condensateurs. Rappelons que dans une **association en série** (figure 7.6*a*), les résistances sont reliées l'une à la suite de l'autre, sans embranchement : elles ont *une* borne commune. Dans une **association en parallèle** (figure 7.7*a*), les résistances sont reliées côte à côte : elles ont *deux* bornes communes. Nous allons déterminer la résistance équivalente à chacune de ces associations.

▲ **Figure 7.6**

Deux résistances associées en série. (*a*) Le courant qui traverse les deux résistances est le même. (*b*) La résistance équivalente est donnée par $R_{éq} = R_1 + R_2$.

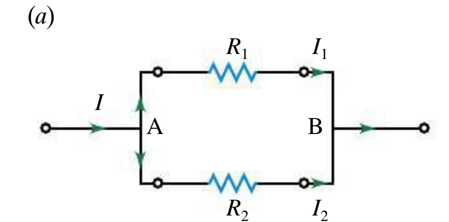
Lorsqu'on relie en série deux résistances, R_1 et R_2 (figure 7.6*a*), elles sont traversées par le même courant, puisque la charge ne s'accumule pas en chemin. De plus, la charge s'écoulant vers les potentiels décroissants, le potentiel doit *continuellement* diminuer dans le sens du courant. On en déduit donc que la différence de potentiel aux bornes de l'ensemble est la somme des différences de potentiel individuelles :

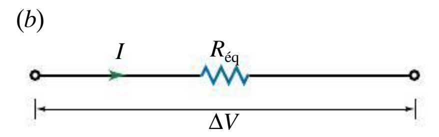
$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = (R_1 + R_2)I \qquad \text{(i)}$$

où nous avons appliqué la loi d'Ohm $\Delta V = RI$ aux bornes de chacune des deux résistances. Si on remplaçait cette association de deux résistances par une unique résistance équivalente $R_{éq}$ (figure 7.6*b*) située sur le même fil, elle serait aussi traversée par le courant I et aurait à ses bornes la différence de potentiel totale $\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2$. L'application de la loi d'Ohm à $R_{éq}$ donnerait $\Delta V = R_{éq}I$. Par comparaison avec l'équation (i), on constate que $R_{éq} = R_1 + R_2$. Cela peut se généraliser à N résistances en série :

Résistance équivalente à plusieurs résistances associées en série

$$R_{éq} = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_N \qquad (7.3)$$





▲ **Figure 7.7**

Deux résistances associées en parallèle. (*a*) La différence de potentiel aux bornes des deux résistances est la même. (*b*) La résistance équivalente est donnée par $1/R_{éq} = 1/R_1 + 1/R_2$.

La figure 7.7*a* représente deux résistances en parallèle. Ces résistances ayant deux bornes en commun, la différence de potentiel à leurs bornes est la même. En effet, le potentiel au point A et celui au point B sont uniques et indépendants du chemin suivi, donc $\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$. De plus, la charge étant conservée, le courant I total se divise* au point A, d'où

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\Delta V_1}{R_1} + \frac{\Delta V_2}{R_2} = \Delta V\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \qquad \text{(ii)}$$

où nous avons appliqué la loi d'Ohm $\Delta V = RI$ aux bornes de chacune des deux résistances et tenu compte du fait que $\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$.

* Il peut aussi s'agir d'une application de la loi des nœuds de Kirchhoff qu'on énoncera à la section 7.4. De même, le résultat $\Delta V = \Delta V_1 = \Delta V_2$ peut découler directement de la loi des mailles de Kirchhoff.

Si on remplaçait cette association de deux résistances par une unique résistance équivalente $R_{éq}$ (figure 7.7*b*), elle serait traversée par le courant total I et aurait à ses bornes la différence de potentiel ΔV. L'application de la loi d'Ohm à $R_{éq}$ donnerait $\Delta V = R_{éq}I$, c'est-à-dire $I = \Delta V(1/R_{éq})$. Par comparaison avec l'équation (ii), on constate que

$$\frac{1}{R_{éq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Si l'on généralise ce raisonnement à N résistances en parallèle, on obtient

Résistance équivalente à plusieurs résistances associées en parallèle

$$\frac{1}{R_{éq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_N} \qquad (7.4)$$

Comme on peut le déduire de l'équation 7.4, la résistance équivalente à plusieurs résistances en parallèle est toujours inférieure à la plus petite des résistances.

En comparant le comportement des associations de résistances avec celui des associations de condensateurs (équations 5.7 et 5.8), on note une similitude entre l'équation donnant la capacité équivalente de condensateurs *en série* et celle donnant la résistance équivalente de résistances *en parallèle*, et vice versa. Ce comportement opposé vient du fait que le courant qui traverse une résistance est *inversement proportionnel* à sa résistance ($I = \Delta V/R$), alors que la charge qui s'accumule sur un condensateur est *proportionnelle* à sa capacité ($Q = C\Delta V$).

Quand l'une des résistances d'une association en parallèle est extrêmement faible (par exemple, un morceau de fil de résistance quasi nulle), le courant qui la traverse est nettement plus imposant que celui dans les autres résistances. Si on considère la limite où la résistance faible tend vers zéro, alors *tout* le courant la traverse. On appelle **court-circuit** une telle portion de circuit de résistance nulle, lorsqu'elle fait en sorte que d'autres portions du circuit ne sont traversées par aucun courant. L'exemple 7.7 illustrera un tel cas.

Les circuits de résistances peuvent sembler très éloignés des sciences de la vie, mais au contraire la logique des associations en série et en parallèle est utilisée pour comprendre l'écoulement sanguin dans des ramifications de capillaires, d'artérioles et de veinules ou pour décrire l'écoulement de l'air dans les bronches. En effet, quand un fluide s'écoule dans une canalisation cylindrique de rayon r, son débit Q, en mètres cubes par seconde, est donné par l'*équation de Poiseuille* (voir la section 14.6 du tome 1) qui a la forme

$$Q = \frac{\Delta P}{R}$$

où ΔP est la différence de pression entre les extrémités de la canalisation et où la « résistance » R dépend notamment du rayon r. Cette équation a une forme analogue à la loi d'Ohm $I = \Delta V/R$, où Q joue le rôle du courant, et ΔP, celui de la différence de potentiel*. On peut calculer le débit dans chaque capillaire d'un réseau comme celui de la figure 7.8 en évaluant la « résistance » de chacun et en appliquant les méthodes conçues pour les circuits électriques.

Artériole
Capillaires
Veinule

▲ **Figure 7.8**

Les capillaires sanguins sont analogues à des circuits faits d'associations en série et en parallèle.

* Bien sûr, il ne s'agit que d'une analogie, puisque les électrons dans un fil électrique n'avancent pas en poussant les uns sur les autres, en raison d'une différence de pression, mais plutôt en raison d'un champ électrique. Nous avons proposé une meilleure analogie à la section 6.1, dans laquelle l'eau s'écoule dans un tuyau à cause de la gravité.

Nous répétons ici la méthode de résolution de la section 5.2, qui s'applique autant aux associations de résistances qu'à celles de condensateurs. Les exemples 7.3 et 7.4 illustrent l'utilisation de cette méthode.

Méthode de résolution

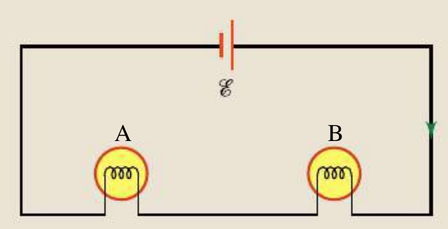
Analyse d'un circuit équivalent

Dans toutes les situations où on doit analyser un circuit, on réalise les étapes suivantes :

1. Redessiner le circuit en tentant, dans la mesure du possible, de placer tous les éléments du circuit dans le même sens, à l'horizontale ou à la verticale. Il devient alors plus facile de reconnaître quels éléments sont en série ou en parallèle. Pour y arriver, on peut déplacer à volonté *le long d'un fil sans résistance* tout embranchement où commence un autre fil.
2. Simplifier le problème en réduisant le plus possible le nombre d'éléments en série ou en parallèle. Souvent, le mieux est de commencer par la plus petite association en série ou en parallèle, puis de tracer une succession de circuits équivalents de plus en plus simples. Dessiner chaque circuit intermédiaire aidera à l'étape 4.
3. Quand on a obtenu une résistance équivalente unique, on sait que la différence de potentiel à ses bornes est identique à celle aux bornes de la pile. Lui appliquer la loi d'Ohm permet donc de déterminer le courant « total » débité par la pile, $I = \Delta V/R_{éq} = \mathscr{E}/R_{éq}$, lequel traverse la résistance équivalente.
4. En partant du circuit final et en revenant vers le circuit initial, trouver les caractéristiques de chaque composant (I et ΔV dans le cas de résistances).

Exemple 7.2

La figure 7.9 illustre deux ampoules incandescentes identiques en série avec une pile. À $t = 0$, on ferme le circuit et le courant commence à circuler. Comparer : (a) les instants où chaque ampoule s'allume, (b) la puissance lumineuse produite par chaque ampoule, (c) le courant dans l'ampoule A à deux instants, $t = 0$ et $t \gg 0$.



▲ **Figure 7.9**
Deux ampoules incandescentes en série avec une pile.

Solution

(a) Le courant commence à circuler à $t = 0$ en chaque point du circuit, y compris les filaments des ampoules. Ainsi, les deux ampoules s'allument *simultanément*.



Une erreur conceptuelle fréquente consiste à imaginer le fil comme un boyau d'arrosage où l'eau commence à circuler à une extrémité avant d'atteindre l'autre. L'image correcte est d'imaginer un tuyau déjà plein d'eau, qu'on incline : sous l'effet de la gravité, l'eau se met à circuler simultanément en chaque point du tuyau. ■

(b) Puisque l'énergie est conservée, la puissance lumineuse produite par une ampoule correspond à la puissance électrique dissipée dans la résistance de son filament ($P = RI^2$). Puisque les ampoules sont en série, le courant qui les traverse est le même. Ainsi, la puissance électrique dissipée dans la résistance de chaque ampoule est identique.

Quand les électrons traversent une ampoule, leur énergie diminue (à cause de la puissance utilisée) mais pas leur vitesse. Ainsi, le courant demeure le même. ■

(c) En raison du gain de température, la résistance de chaque ampoule augmente. Le courant à $t \gg 0$, quand l'ampoule a atteint sa résistance de fonctionnement, est donc inférieur au courant au temps $t = 0$. Néanmoins, si on les compare à un même instant, les courants dans les deux ampoules sont toujours égaux.

Exemple 7.3

Pour le circuit de la figure 7.10*a*, déterminer la tension aux bornes de chacune des résistances et le courant qui traverse chacune d'elles.

Solution

On suit la méthode de résolution, en débutant par la deuxième étape : réduire le circuit. On calcule R_{56}, la résistance équivalente à R_5 et R_6 en parallèle* :

$$\frac{1}{3\ \Omega} + \frac{1}{6\ \Omega} = \frac{1}{R_{56}}$$

d'où $R_{56} = 2\ \Omega$ (figure 7.10*b*). Les résistances R_{56} et R_4, étant en série, elles peuvent être remplacées par $R_{456} = 6\ \Omega$ (figure 7.10*c*). De même, R_2 et R_3, en série, peuvent être remplacées par $R_{23} = 12\ \Omega$ (figure 7.10*c*). Les résistances R_{23} et R_{456} étant en parallèle, on écrit

$$\frac{1}{6\ \Omega} + \frac{1}{12\ \Omega} = \frac{1}{R_{2\text{-}6}}$$

D'où $R_{2\text{-}6} = 4\ \Omega$ (figure 7.10*d*). Enfin, $R_{2\text{-}6}$ s'ajoute à R_1 avec laquelle elle est en série, d'où une résistance équivalente $R_{1\text{-}6} = 9\ \Omega$ pour l'ensemble du montage (figure 7.10*e*).

Troisième étape : La résistance de la dernière figure a à ses bornes la même tension que la pile, $\Delta V_{1\text{-}6} = 54$ V, donc est traversée par $I_{1\text{-}6} = \Delta V_{1\text{-}6}/R_{1\text{-}6} = 6$ A.

La quatrième étape est de « remonter » de la figure 7.10*e* à la figure 7.10*a* pour trouver les grandeurs demandées. Comme $R_{1\text{-}6}$ remplace deux résistances en série (figure 7.10*d*), R_1 et $R_{2\text{-}6}$, celles-ci sont traversées par le même courant :

$$I_1 = I_{2\text{-}6} = I_{1\text{-}6} = 6\ \text{A}$$

Ces résistances ont donc à leurs bornes $\Delta V_1 = R_1 I_1 = 30$ V et $\Delta V_{2\text{-}6} = R_{2\text{-}6} I_{2\text{-}6} = 24$ V. On vérifie que $\Delta V_1 + \Delta V_{2\text{-}6} = 54$ V comme prévu. Ensuite, $R_{2\text{-}6}$ remplace R_{23} et R_{456} en parallèle (figure 7.10*c*), qui ont donc la même tension qu'elle :

$$\Delta V_{23} = \Delta V_{456} = \Delta V_{2\text{-}6} = 24\ \text{V}$$

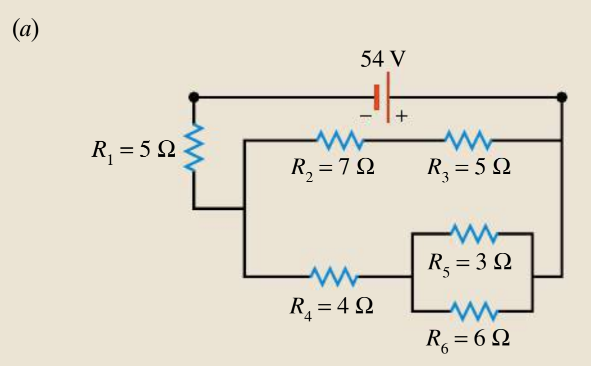
Ainsi, le courant dans ces résistances est $I_{23} = \Delta V_{23}/R_{23} = 2$ A et $I_{456} = \Delta V_{456}/R_{456} = 4$ A. On vérifie que $I_{23} + I_{456} = 6$ A comme prévu.

Vient ensuite la figure 7.10*b*. Pour les résistances du haut, en série, on trouve $I_2 = I_3 = I_{23} = 2$ A, d'où $\Delta V_2 = R_2 I_2 = 14$ V et $\Delta V_3 = R_3 I_3 = 10$ V, ce qui vérifie $\Delta V_2 + \Delta V_3 = 24$ V. En procédant de la même façon, on a $I_4 = I_{56} = 4$ A, $\Delta V_4 = 16$ V et $\Delta V_{56} = 8$ V.

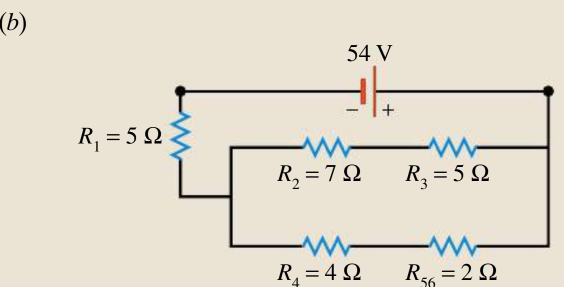
Enfin, R_5 et R_6 étant en parallèle (figure 7.10*a*), on a $\Delta V_5 = \Delta V_6 = \Delta V_{56} = 8$ V, d'où $I_5 = 2{,}67$ A et $I_6 = 1{,}33$ A.

On aurait pu procéder plus rapidement en renonçant à la vérification faite à chaque figure. Par exemple, sachant que $\Delta V_1 + \Delta V_{2\text{-}6} = 54$ V, il suffit de trouver ΔV_1 *ou* $\Delta V_{2\text{-}6}$, puis de soustraire pour trouver l'autre tension. Cette approche est nettement plus rapide quand on s'intéresse à une seule résistance. ■

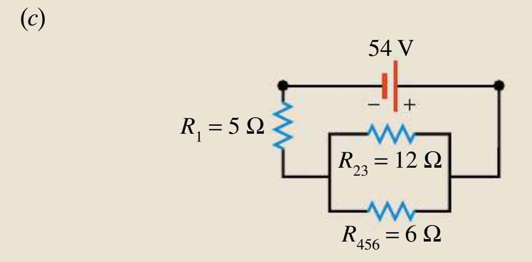
(*a*)



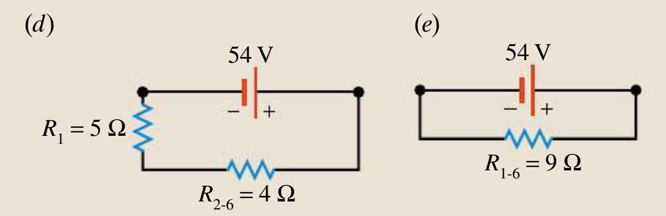
(*b*)



(*c*)



(*d*) (*e*)



▲ **Figure 7.10**

Pour calculer la résistance équivalente d'une association de résistances, on procède en plusieurs étapes.

* Il est parfois pratique de combiner les indices pour nommer les résistances équivalentes, c'est-à-dire d'appeler R_{ab}. la résistance équivalente à R_a et R_b. On peut aussi utiliser les mêmes indices pour désigner les courants et les tensions.

Exemple 7.4

À la figure 7.11*a*, toutes les résistances valent 3 Ω. Calculer la résistance équivalente entre les points (a) A et B ; (b) A et D.

Solution

En appliquant la première étape de la méthode de résolution, on passe de la figure 7.11*a* à la figure 7.11*b* ou 7.11*c*. Pour mieux visualiser la résistance équivalente, on a complété le circuit en ajoutant une pile qui aurait pour effet d'y faire circuler un courant. Toutefois, la résistance équivalente existe même en l'absence de courant. ■

(a) À la figure 7.11*b*, on a placé aux extrémités gauche et droite les points A et B entre lesquels on souhaite connaître la résistance équivalente. Les deux dernières étapes de la méthode de résolution n'étant pas demandées, on effectuera la deuxième étape sans illustrer chaque circuit équivalent.

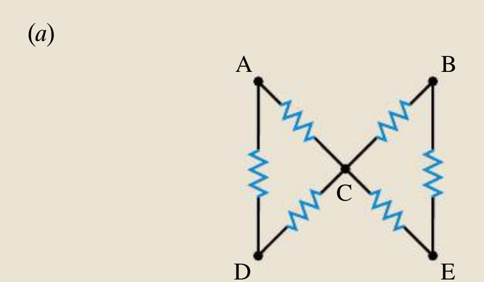
Entre A et C, le courant peut emprunter deux chemins : l'un ayant une résistance de 3 Ω, et l'autre, passant par le point D, ayant une résistance 3 + 3 = 6 Ω. La résistance équivalente entre A et C vaut donc $(1/3 + 1/6)^{-1} = 2$ Ω. Par symétrie, la résistance entre C et B est aussi de 2 Ω. Donc la résistance totale entre A et B est 2 + 2 = 4 Ω.

(b) Le circuit de la figure 7.11*c* semble plus complexe que le précédent en raison de l'embranchement au point C qui conduit vers plusieurs résistances reliées dans le parcours CBEC en forme de boucle.

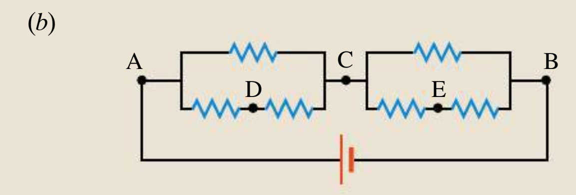
Cette boucle ne joue aucun rôle, car *aucun courant n'y circule*. En effet, la pile étant branchée entre A et D, le potentiel en A est plus élevé qu'en D, de sorte que la charge « tombe » entre ces deux points, en passant par C, dont le potentiel est intermédiaire. Mais rien n'établit une différence de potentiel entre les points B, C et E, qui sont donc *tous au même potentiel* que C. Ainsi, toute la charge qui « tombe » de A vers C poursuit son chemin de C vers D, sans emprunter l'embranchement qui conduit vers la boucle. La figure 7.11*d* utilise l'analogie des tuyaux (voir la section 6.1) pour montrer ce qui se produit au point C de la figure 7.11*c* : le tuyau qui commence en C étant *horizontal*, toute l'eau qui dévale la pente continue son chemin sans l'emprunter, alors que celle qu'il contient demeure immobile. ■

Pour calculer la résistance équivalente entre A et D, on doit donc ignorer la boucle CBED. Entre A et D, le courant peut emprunter deux chemins en parallèle, l'un, direct, ayant une résistance de 3 Ω, et l'autre, passant par le point C, ayant une résistance de 3 + 3 = 6 Ω. La résistance équivalente entre A et D vaut donc $(1/3 + 1/6)^{-1} = 2$ Ω.

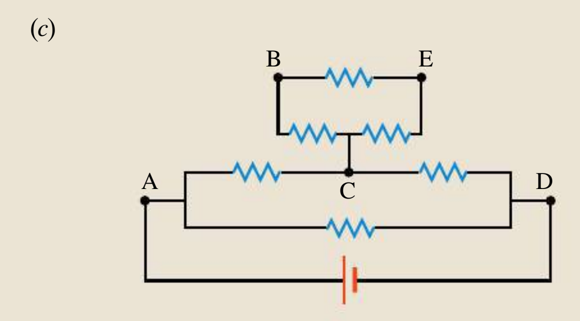
(*a*)



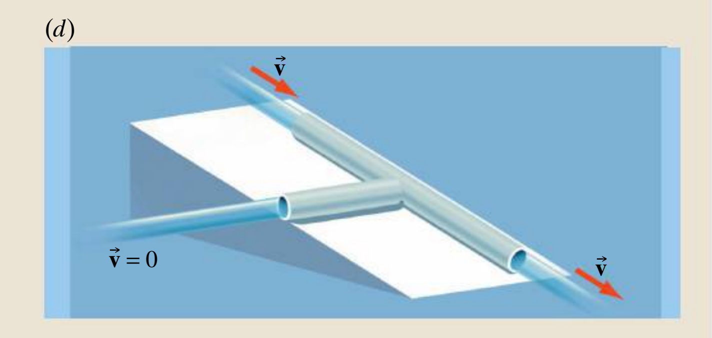
(*b*)



(*c*)



(*d*)



▲ **Figure 7.11**

(*a*) Association de résistances ne faisant pas partie d'un circuit. (*b*) Quand on calcule la résistance équivalente entre deux points, il est utile d'imaginer qu'on complète le circuit en branchant une source de f.é.m. entre ces deux points, puis de redessiner le circuit en plaçant chaque élément dans le même sens. (*c*) Le même procédé révèle une boucle inutile quand on cherche la résistance entre A et D. (*d*) Analogie gravitationnelle de ce qui se produit au point C.

Exemple 7.5

(a) Deux résistances dissipent respectivement 60 W et 90 W lorsqu'elles sont reliées séparément à une source de f.é.m. de 120 V. Trouver la puissance dissipée dans chaque résistance lorsqu'elles sont simultanément reliées à la source de 120 V (a) en série, (b) en parallèle.

Solution

Il faut d'abord trouver la valeur de chaque résistance. Quand une résistance est reliée seule à la f.é.m., la tension à ses bornes est $\Delta V = \mathscr{E} = 120$ V. De $P = (\Delta V)^2/R$ (équation 6.13), on tire donc $R_1 = (120\ \text{V})^2/(60\ \text{W}) = 240\ \Omega$ et $R_2 = (120\ \text{V})^2/(90\ \text{W}) = 160\ \Omega$.

(a) Reliées en série, les résistances sont traversées par le même courant $I = \mathscr{E}/(R_1 + R_2) = (120\ \text{V})/(400\ \Omega) = 0{,}3$ A. Par l'équation 6.13, la puissance dissipée dans chaque résistance est

$$P_1 = R_1 I^2 = 21{,}6\ \text{W}; \qquad P_2 = R_2 I^2 = 14{,}4\ \text{W}$$

Notons que l'importance relative des puissances dissipées a été inversée par rapport à la situation décrite dans l'énoncé. ■

(b) Si les deux résistances sont en parallèle, chacune a une tension de 120 V à ses bornes, comme si elle était branchée séparément à la pile. On trouve donc 60 W et 90 W.

Exemple 7.6

Dans le circuit illustré à la figure 7.12*a*, toutes les résistances valent 10 Ω. Calculer la résistance équivalente aux bornes de la source de f.é.m.

Solution

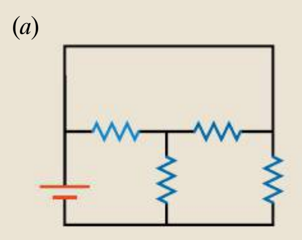
Cet exemple illustre l'importance de la première étape de la méthode de résolution. En l'appliquant, on passe du circuit initial à celui de la figure 7.12*b*, qui est plus facile à interpréter. La résistance de la portion du milieu est alors

$$\left(\frac{1}{10\ \Omega} + \frac{1}{10\ \Omega}\right)^{-1} + 10\ \Omega = 15\ \Omega$$

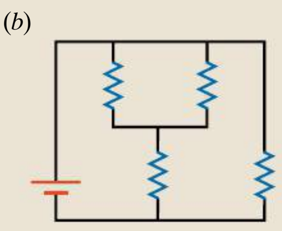
et la résistance totale :

$$\left(\frac{1}{15\ \Omega} + \frac{1}{10\ \Omega}\right)^{-1} = 6\ \Omega$$

(*a*)



(*b*)

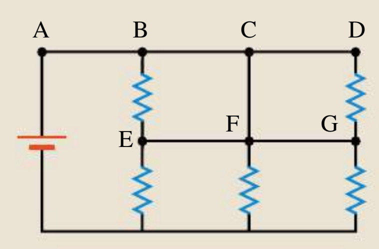


▲ **Figure 7.12**

Un circuit qui comporte une association de quatre résistances valant 10 Ω chacune.

Exemple 7.7

Dans le circuit illustré à la figure 7.13, toutes les résistances valent 12 Ω. Calculer la résistance équivalente aux bornes de la source de f.é.m.



▲ **Figure 7.13**

Un circuit qui comporte une association de cinq résistances valant 12 Ω chacune.

Solution

Le fil CF n'a pas de résistance. Ainsi, tous les points A, B, C, D, E, F et G sont au même potentiel, puisqu'on peut se rendre de A à n'importe lequel de ces points en n'empruntant que des fils sans résistance. Puisque B et E sont au même potentiel, il n'y a pas de courant dans la résistance entre B et E, et le circuit se comporte comme si elle n'était pas là. Il en va de même de celle entre D et G. Tout le courant emprunte le segment CF, puis se sépare dans les trois résistances du bas, qui sont en parallèle. La résistance totale du circuit est donc 4 Ω.

Dans ce circuit, le fil CF est un *court-circuit*. En effet, il fait en sorte que des portions du circuit ne sont pas traversées par un courant. ■

Exemple 7.8

Une pile réelle dont la f.é.m. est de 20 V et la résistance interne de 1 Ω est reliée à trois résistances (figure 7.14*a*). Déterminer : (a) la différence de potentiel aux bornes de la pile ; (b) le courant qui traverse chaque résistance et la différence de potentiel entre ses bornes ; (c) la puissance fournie par la f.é.m. ; (d) la puissance dissipée dans chaque résistance.

Solution

(a) Pour trouver la différence de potentiel aux bornes de la pile, il faut connaître le courant qui la traverse. On trouve la résistance équivalente aux bornes de la f.é.m. en débutant par R_2 et R_3 en parallèle, pour lesquelles on a $\frac{1}{4\,\Omega} + \frac{1}{12\,\Omega} = \frac{1}{R_{23}}$, donc $R_{23} = 3\ \Omega$ (figure 7.14*b*). La résistance équivalente de l'ensemble du circuit est donc $6\ \Omega + 3\ \Omega + 1\ \Omega = 10\ \Omega$. La différence de potentiel ΔV aux bornes de cette résistance étant égale à la f.é.m. de la pile, le courant est donc $I_1 = \mathscr{E}/R_{\text{éq}} = 2$ A, et la différence de potentiel aux bornes de la pile est

$$\Delta V = \mathscr{E} - rI_1 = 18 \text{ V}$$

(b) Le courant I_1 étant connu, on trouve facilement $\Delta V_r = rI_1 = 2$ V et $\Delta V_1 = R_1 I_1 = 12$ V. Puisque les résistances r, R_1 et R_{23} sont en série (figure 7.14*b*), on sait que $\mathscr{E} = \Delta V_r + \Delta V_1 + \Delta V_{23}$, donc on a $\Delta V_{23} = \Delta V_2 = \Delta V_3 = 6$ V. On aurait trouvé la même chose en utilisant $\Delta V_{23} = R_{23} I_{23} = (3\ \Omega)(2\ \text{A}) = 6$ V.

Les courants circulant dans R_2 et R_3 sont donc $I_2 = \Delta V_2/R_2 = 1{,}5$ A et $I_3 = \Delta V_3/R_3 = 0{,}5$ A. On vérifie que $I_1 = I_2 + I_3$.

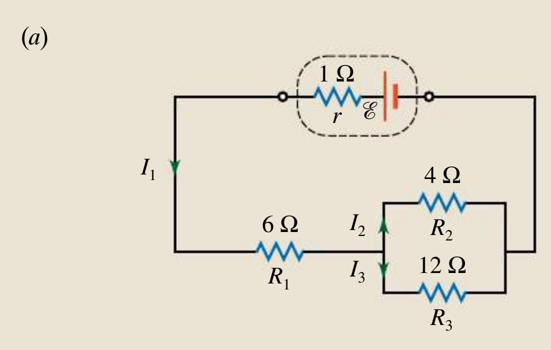
(c) La puissance fournie par la source de f.é.m. est $P = \mathscr{E} I_1 = 40$ W.

(d) On trouve la puissance dissipée dans chaque résistance en utilisant soit $P = I\Delta V$, soit $P = RI^2$. On obtient

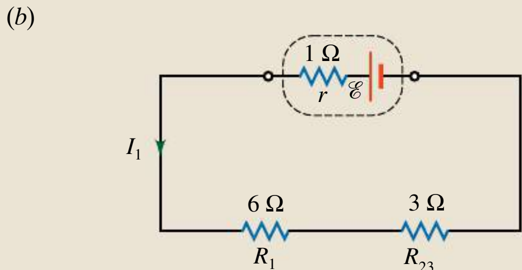
$$P_r = 4 \text{ W}; \quad P_1 = 24 \text{ W}; \quad P_2 = 9 \text{ W}; \quad P_3 = 3 \text{ W}$$

La somme de ces puissances est égale à 40 W, ce qui correspond à la puissance fournie par la source de f.é.m. C'est un autre moyen de vérifier les calculs. ■

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 7.14**

(*a*) Une source de f.é.m. ayant une résistance interne est reliée à trois résistances. (*b*) Un premier circuit équivalent.

Exemple 7.9

Lorsqu'une pile réelle fournit de la puissance à une résistance externe R, de la puissance est également dissipée dans sa résistance interne r (figure 7.15*a*). Pour quelle valeur de R la puissance fournie à la résistance R est-elle maximale ?

Solution

La différence de potentiel aux bornes de R ($\Delta V = RI$) est égale à celle aux bornes de la pile réelle, de sorte que $\mathscr{E} - rI = RI$. On en tire l'expression du courant, $I = \mathscr{E}/(R + r)$. La puissance dissipée dans R est donc

$$P = RI^2 = \frac{R\mathscr{E}^2}{(R + r)^2}$$

Pour trouver la valeur maximale de P, on peut tracer P en fonction de R (figure 7.15*b*). Une meilleure approche consiste à examiner la dérivée de P par rapport à R (en considérant r et $\mathscr{E}$ comme constantes), donnée par

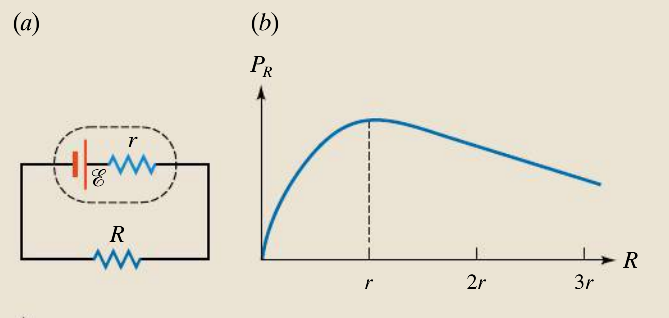
$$\frac{dP}{dR} = \left[\frac{1}{(R + r)^2} - \frac{2R}{(R + r)^3}\right]\mathscr{E}^2$$

La dérivée dP/dR représente le taux de variation de P par rapport à R. Ce taux est *nul* au point où la courbe de P en fonction de R passe par un maximum. On

obtient donc la valeur de R pour laquelle P est maximale en posant $dP/dR = 0$*. On peut facilement vérifier que cette condition mène à l'équation $(R + r) = 2R$, qui nous donne $R = r$.

La puissance transférée à R est donc maximale lorsque R est égale à la résistance interne de la source de f.é.m. ■

* À strictement parler, on doit également montrer que la dérivée seconde, d^2P/dR^2, est négative, car le taux de variation dP/dR serait aussi nul là où la courbe passerait par un minimum, le cas échéant.



▲ **Figure 7.15**

(*a*) Une source de f.é.m. $\mathscr{E}$ ayant une résistance interne r est reliée à une résistance externe R. (*b*) La puissance fournie à la résistance R en fonction de r. Le transfert de puissance est maximal lorsque $R = r$.

Dans l'exemple précédent, on a montré que la puissance dissipée dans une résistance externe R branchée à une pile de résistance interne r est maximale quand $R = r$. On dit alors que la source et la résistance externe sont « adaptées ». Quand c'est le cas, la source fournit autant de puissance à la résistance externe qu'elle n'en perd dans sa résistance interne. La puissance transférée a beau être maximale, la moitié de l'énergie produite par la source est perdue. L'aperçu historique qui suit montre qu'avec $R > r$, la puissance est plus faible, mais la *fraction* d'énergie transférée à R, c'est-à-dire le *rendement*, est meilleure.

APERÇU HISTORIQUE

L'éclairage électrique

Au début du XIXe siècle, l'éclairage au gaz était courant. Mais vers 1850, les phares, les gares et l'éclairage de rue commençaient à utiliser des lampes à arc dont la lumière était produite par des décharges électriques entre deux tiges de carbone faiblement éloignées. Lorsque Thomas Edison (1847-1931), l'inventeur du phonographe, vit une démonstration de lampe à arc, en 1877, il pensa immédiatement à la possibilité d'installer des lampes électriques dans les bureaux et les résidences. Mais les lampes à arc étant très brillantes et dégageant des fumées nocives, elles ne pouvaient être utilisées qu'en plein air. Edison conclut alors que la lampe à incandescence, où la lumière est produite par un filament chauffé électriquement, produirait une lumière plus douce et serait donc une meilleure source lumineuse, même si elle n'avait pas encore donné de résultats satisfaisants à cette époque.

En 1878, Edison eut l'audace de lancer la Edison Electric Light Company et, grâce à sa réputation, obtint un soutien financier. Il se vantait d'être sur le point d'établir un réseau complet de distribution d'électricité permettant d'alimenter les lampes et les moteurs électriques tout en servant à d'autres fins industrielles. À cause de sa publicité, les actions des compagnies de gaz subirent une forte baisse aux États-Unis et en Angleterre. Un comité du Parlement britannique fut mis sur pied pour examiner, avec l'aide de scientifiques renommés, la faisabilité des projets d'Edison.

Le réseau de distribution de gaz déjà en place permettait à chaque consommateur d'ouvrir ou non sa propre alimentation. Il fallait donc que le réseau électrique permette la même « subdivision » de l'alimentation. Les lampes à arc, qui avaient une résistance voisine de 5 Ω et demandaient un courant de 10 A, étaient normalement reliées en série dans des circuits comportant 10 lampes. Ainsi, dès qu'une lampe était déconnectée, toutes les lampes s'éteignaient. Pour permettre à certaines d'être allumées ou non, elles auraient dû être montées en parallèle. Mais 10 lampes à arc en parallèle auraient demandé un courant de 100 A, déjà bien plus que ce que pouvaient fournir les génératrices de l'époque. Les éphémères lampes à incandescence qui avaient alors été fabriquées avaient des résistances d'environ 0,5 Ω. Si la puissance requise par une lampe

à incandescence était presque la même que celle d'une lampe à arc, le courant requis serait très supérieur. Et pourtant, Edison proposait d'installer des milliers de lampes ! Les câbles de transport devaient pouvoir supporter de très grands courants sans surchauffer, ce qui voulait dire qu'il fallait utiliser d'énormes quantités de cuivre. Le comité britannique finit par conclure que la « subdivision de l'éclairage électrique » était impossible. Mais Edison ne baissa pas les bras.

La mise au point d'une nouvelle lampe

Edison se rendit compte qu'une quantité donnée de puissance $P = RI^2$ pouvait être fournie soit par un courant intense à une faible résistance, soit par un courant faible à une grande résistance. Pour réduire le courant dans les lignes de transport d'électricité, il avait besoin d'une lampe de résistance *élevée*. Ses premiers essais avec des filaments de carbone se soldèrent par des échecs, les filaments ayant tendance à se consumer (de l'air restait inévitablement dans les ampoules en verre). Des essais avec d'autres matériaux donnèrent les mêmes résultats. En janvier 1879, une nouvelle pompe à vide lui permit d'atteindre le meilleur vide jamais atteint à l'époque (10^{-6} atm). Néanmoins, après une année de travail, son meilleur résultat était une résistance de 3 Ω, obtenue avec une spirale de Pt-Ir. C'est alors qu'il lut dans le numéro de juillet de *Scientific American* une description de la lampe au filament de carbone de l'Anglais Joseph Wilson Swan (1828-1914), une lampe qui n'avait fonctionné que quelques heures. N'ayant pas essayé le carbone avec la nouvelle pompe à vide, Edison tenta sa chance. En novembre 1879, il mit au point un filament carboné de 100 Ω. En 15 mois, il avait essayé plus de 1600 matériaux ! La figure 7.16 représente une des premières lampes à filament.



▲ **Figure 7.16**

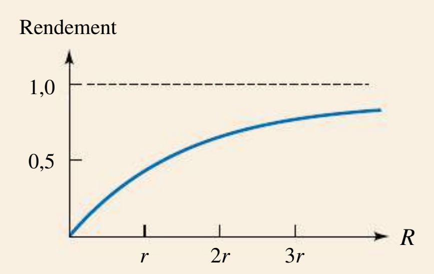
Une des premières lampes à filament.

Un nouveau générateur

Nous avons vu à l'exemple 7.9 que la puissance transférée est maximale lorsque r, la résistance interne de la source de f.é.m., est égale à R, la résistance externe. Tous les générateurs électriques antérieurs (que nous étudierons au chapitre 10) avaient été conçus en fonction de ce principe. De plus, leur rendement de conversion de l'énergie mécanique en énergie électrique était inférieur à 40 % et ils ne pouvaient alimenter que quelques lampes à arc. Edison décela une lacune dans cette approche. On peut définir le rendement du transfert de puissance par le rapport

$$\text{rendement} = \frac{P_R}{P_r + P_R} = \frac{R}{r + R}$$

$P_R = RI^2$ étant la puissance fournie à R et $P_r = rI^2$, celle perdue dans r. Lorsque $r = R$, la moitié de la puissance électrique produite est perdue dans le générateur lui-même. La puissance transférée est maximale, mais le *rendement* n'est que de 0,5 ou 50 %. Or, le rendement augmente quand R est plus élevée que r et approche de 1 quand $r \to 0$ ou $R \to \infty$ (figure 7.17). Le rendement maximal est obtenu lorsque la résistance interne de la source est aussi *petite* que possible et que la résistance externe est aussi *grande* que possible. Dans cette nouvelle optique, Francis Upton (1852-1921), un ingénieur électricien engagé par Edison, mit au point un nouveau type de générateur électrique à courant continu. Ce générateur pouvait convertir l'énergie mécanique en énergie électrique avec un rendement de 90 % et produire une tension relativement constante de 110 V même lorsque le courant de sortie variait.



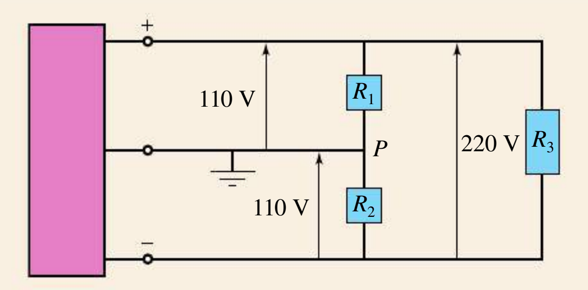
▲ **Figure 7.17**

Le rendement du transfert de puissance augmente lorsque la résistance de charge augmente ou que la résistance interne de la source *diminue*.

Un nouveau système de distribution

Edison conçut ensuite un système à trois fils pour la distribution de l'électricité. Ce système est encore utilisé de nos jours pour l'alimentation résidentielle, bien qu'il fonctionne en courant alternatif et non en courant continu. La figure 7.18 représente une source de f.é.m. à trois bornes (Edison utilisait en réalité deux générateurs en série, avec une borne entre les deux). La borne

▶▶▶



▲ **Figure 7.18**

Le système à trois fils d'Edison pour la distribution d'électricité. Si les résistances de charge R_1 et R_2 sont presque égales, le potentiel du point *P* est proche du potentiel de la terre de la borne centrale de la source. La perte de puissance dans le fil du milieu est donc très faible.

centrale étant mise à la terre, on la choisit comme référence $V = 0$, de sorte que les deux autres bornes sont respectivement à +110 V et à −110 V. Ainsi, chacune des résistances externes R_1 et R_2 a une tension de 110 V à ses bornes. Si seule R_1, ou R_2, est branchée, le courant ne circule que dans le fil central et dans l'un des autres fils. Si les deux résistances sont branchées, le courant circulant dans le fil central, $I_t = I_2 - I_1$, est déterminé par le potentiel du point *P* par rapport à la terre. Or, si $R_1 = R_2$, ce potentiel est à mi-chemin entre +110 V et −110 V, c'est-à-dire égal à zéro. Par conséquent, si les charges sont « équilibrées », *aucun* courant ne circule dans la connexion à la terre. Au lieu d'avoir des pertes par effet Joule (voir la section 6.6) dans les trois fils, il n'y en a que dans les fils « vivants* » (c'est-à-dire ceux aux bornes desquels il y a une différence de potentiel). Ce système à trois fils présente également l'avantage d'offrir deux différences de potentiel : 110 V pour l'usage normal et 220 V pour les appareils électriques plus puissants comme les fours, les sécheuses, les chauffe-eau, qui sont branchés entre les deux fils « vivants » (voir le sujet connexe du chapitre 12, « L'électricité domestique »).

* L'usage veut que cet anglicisme soit très utilisé ; en français correct, on devrait dire qu'il s'agit de fils « sous tension ».

7.3 LES INSTRUMENTS DE MESURE

Trois instruments de mesure sont pertinents pour étudier un circuit à c.c. Le **voltmètre** mesure la différence de potentiel (tension) entre *deux* points d'un circuit. L'**ampèremètre** mesure le courant passant par *un* point du circuit. L'**ohmmètre** mesure la résistance d'une portion du circuit. Chaque appareil de mesure possède deux « sondes » (deux fils qui sortent de l'appareil) que l'on doit placer de manière appropriée pour prendre la mesure. En pratique, on dispose souvent d'un seul appareil, appelé *multimètre*, qui peut agir comme un voltmètre, un ampèremètre ou un ohmmètre.

Nous décrirons plus loin comment ces appareils de mesure fonctionnent : la section 7.6 traitera des appareils analogiques (à aiguille), et le sujet connexe de la fin du chapitre, des appareils numériques. Ici, nous allons nous contenter d'expliquer comment les brancher correctement pour prendre la mesure.

Le voltmètre

Le branchement du voltmètre est le plus simple, car il n'implique aucune modification du circuit où on souhaite prendre une mesure : comme il mesure la différence de potentiel entre les deux points du circuit où on place les sondes, il se branche tout simplement « par-dessus » ou « à l'extérieur » de ce circuit. Par exemple, dans le circuit de la figure 7.19*a*, si on veut mesurer la différence de potentiel entre les bornes de R_3, on doit brancher le voltmètre *en parallèle* avec R_3.

Lorsqu'on utilise un appareil de mesure, on ne veut pas que sa présence modifie de manière appréciable ce que l'on veut mesurer. Le voltmètre étant branché en parallèle, il faut limiter au maximum la fraction du courant déviée à travers lui. Ainsi, *la résistance interne d'un voltmètre doit être très grande* (beaucoup plus grande que les résistances dans le circuit).

On indique parfois la polarité des bornes d'un voltmètre dans un schéma (voir par exemple la figure 7.20). Le signe positif correspond alors à la borne de l'appareil où se trouve le potentiel le plus élevé.

L'ampèremètre

Pour mesurer le courant passant par un point du circuit, il faut placer l'ampèremètre *dans* le circuit à l'endroit qui nous intéresse afin que *tout le courant que l'on veut mesurer traverse l'ampèremètre*. Ce branchement implique donc, contrairement au voltmètre, qu'il faut modifier le circuit où on souhaite prendre une mesure : il faut en effet « couper » ou « débrancher » un fil du circuit pour y insérer l'ampèremètre. Par exemple, si on veut mesurer le courant qui traverse R_3, on doit brancher l'ampèremètre *en série* avec cette résistance, par exemple comme à la figure 7.19*b*.

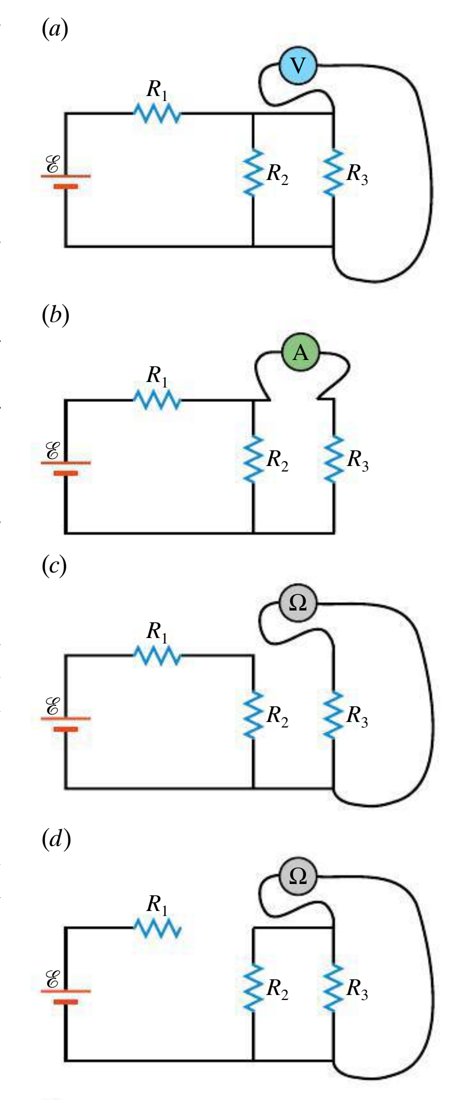
On ne veut pas que la présence de l'ampèremètre modifie de manière appréciable le courant qu'on veut mesurer. Puisqu'il se branche en série, il *faut que la résistance interne d'un ampèremètre soit très petite* (beaucoup plus petite que les résistances dans le circuit).

On indique parfois la polarité des bornes d'un ampèremètre dans un schéma (voir par exemple la figure 7.20). Sa résistance étant faible, il ne se produit qu'une faible chute de potentiel. Malgré tout, le signe positif correspond à la borne de l'appareil où se trouve le potentiel le plus élevé.

L'ohmmètre

Contrairement au voltmètre et à l'ampèremètre, l'ohmmètre est un appareil *actif* : il possède une pile interne et il cause du courant dans le circuit qu'il mesure. Si on veut mesurer la valeur d'une résistance (ou d'une combinaison de résistances) à l'aide de l'ohmmètre, il faut brancher cette résistance à l'ohmmètre *alors qu'elle n'est pas branchée au reste du circuit* ; sinon, la pile du circuit interférera avec la pile de l'ohmmètre, et les résultats seront faussés.

Par exemple, si on veut mesurer la valeur de R_3, on peut brancher l'ohmmètre comme à la figure 7.19*c*. Remarquez que seul un des deux liens entre R_3 et le reste du circuit a été débranché ; on aurait pu enlever les deux, mais il suffit de rompre le circuit. Un ohmmètre peut aussi mesurer la résistance équivalente d'une *association* de résistances. Par exemple, si on débranche une autre portion du circuit (figure 7.19*d*), l'ohmmètre mesurera la résistance équivalente de R_2 et R_3 en parallèle. Pour savoir ce que mesure l'ohmmètre, il faut l'imaginer comme une pile et suivre les différents chemins possibles que peut prendre le courant qu'il génère.



▲ **Figure 7.19**

(*a*) Un voltmètre branché pour mesurer la différence de potentiel aux bornes de R_3. (*b*) Un ampèremètre branché pour mesurer le courant qui circule dans R_3. (*c*) Un ohmmètre branché pour mesurer la résistance de R_3. (*d*) Un ohmmètre branché pour mesurer la résistance de R_2 et R_3 en parallèle.

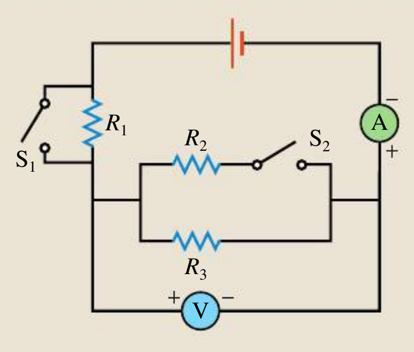
Exemple 7.10

Soit le circuit de la figure 7.20. Les interrupteurs S_1 et S_2 sont initialement ouverts. Par rapport à cette situation initiale, déterminer si les valeurs indiquées par l'ampèremètre et le voltmètre augmentent ou diminuent dans chacun des cas suivants : (a) S_1 ouvert, S_2 fermé ; (b) S_1 fermé, S_2 ouvert ; (c) S_1 et S_2 fermés.

Solution

(a) En fermant S_2, R_3 est remplacée par la résistance équivalente à R_2 et R_3, nécessairement inférieure à R_3 (voir la section 7.2). Ainsi, la résistance de l'ensemble du circuit diminue et la valeur indiquée par l'ampèremètre *augmente*. Puisque la tension aux bornes de R_1 augmente, celle aux bornes de l'association en parallèle, mesurée par le voltmètre, *diminue*.

(b) Fermer S_1 court-circuite R_1. La résistance équivalente aux bornes de la pile diminue, puisqu'elle devient égale à R_3, donc la mesure de l'ampèremètre *augmente*. La valeur indiquée par le voltmètre devenant égale



▲ **Figure 7.20**

Quand on ferme l'un ou l'autre des interrupteurs S_1 et S_2, ou encore les deux, qu'advient-il des valeurs affichées par les deux instruments de mesure ?

à la différence de potentiel aux bornes de la pile, elle *augmente*.

(c) Fermer les deux interrupteurs court-circuite encore R_1, mais cette fois la pile devient branchée à R_2 et à R_3 en parallèle. La différence de potentiel aux bornes de l'association en parallèle *augmente* pour devenir égale à celle de la pile. La résistance équivalente *diminue* (quelles que soient les valeurs des résistances) et la valeur indiquée par l'ampèremètre augmente.

Dans tous les cas, les bornes positive et négative de chaque appareil demeurent celles indiquées à la figure 7.20, car le courant ne change de sens dans aucune branche.

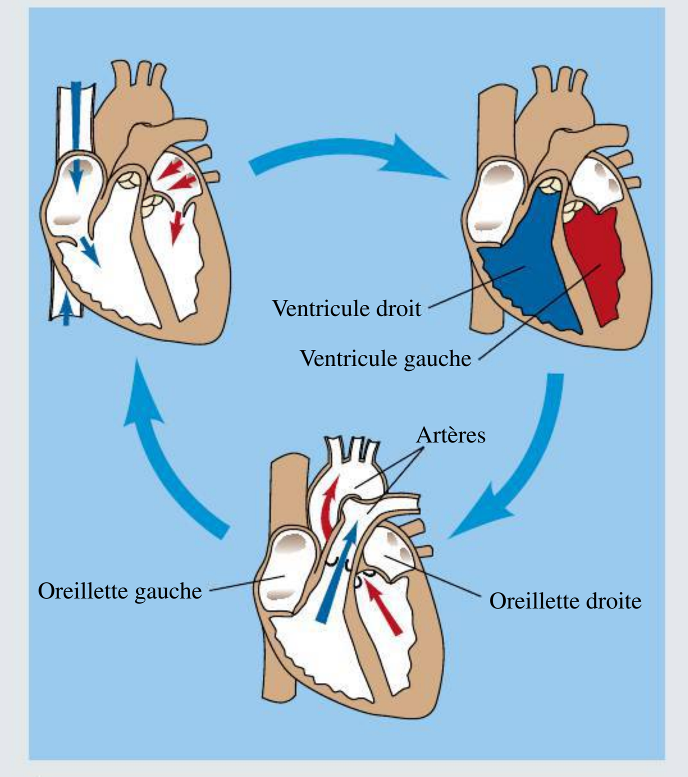
SUJET CONNEXE

L'électrocardiogramme

En plus de servir à étudier les circuits électriques, les instruments de mesure de la section 7.3, en particulier le voltmètre, servent aussi à étudier ou à surveiller le fonctionnement électrique du cœur, du cerveau et des muscles. Dans ce sujet connexe, nous nous intéresserons à l'*électrocardiogramme* (ECG), un graphique qui représente des différences de potentiel en fonction du temps, enregistrées à la surface de la peau pendant le battement cardiaque. Pour comprendre la source de ces différences de potentiel, nous commencerons par faire un survol du fonctionnement de la contraction musculaire et, plus précisément, celle du muscle cardiaque. Nous verrons ensuite comment se branche l'électrocardiographe (l'appareil qui produit l'ECG) et quelques informations qu'on peut apprendre d'un ECG.

La contraction musculaire

Le cœur est essentiellement une pompe mécanique en deux moitiés (figure 7.21) : la moitié gauche pompe le sang oxygéné vers le corps et la moitié droite pompe le sang vicié vers les poumons. Chaque moitié comporte deux cavités, l'*oreillette* et le *ventricule*, séparées par une valve qui ne laisse passer le sang que dans un sens. La contraction du cœur suit un chronométrage précis : après que les quatre chambres se sont remplies de sang, les oreillettes se contractent d'abord, ce qui regroupe le sang dans les ventricules ; ceux-ci se contractent ensuite, ce qui expulse le sang vers les artères. Il y a ensuite un délai sans contraction qui permet aux oreillettes et aux ventricules de se remplir à nouveau.



▲ **Figure 7.21**

La circulation du sang dans le cœur se fait des oreillettes vers les ventricules, puis des ventricules vers les artères. Quatre valves assurent que le sang circule dans le bon sens. Le cœur est illustré vu de face, de sorte que son côté gauche est à droite sur la figure. La figure ne montre qu'une partie des étapes du cycle cardiaque.

Les cellules musculaires du cœur, comme celles des autres muscles, ont la particularité de contenir de longs filaments contractiles (les *myofibrilles*) attachés à la membrane cellulaire à chacune de leurs extrémités. En réponse à un stimulus, ces filaments se raccourcissent, ce qui cause la contraction musculaire.

La figure 7.22 montre que chaque myofibrille est une succession d'unités contractiles élémentaires, les *sarcomères*, qui fonctionnent grâce à deux rangées de protéines filamenteuses, l'*actine* et la *myosine*, entrelacées comme des doigts. La myosine présente des « têtes » régulièrement espacées qui agissent comme des moteurs moléculaires : en présence d'ions Ca^{++}, elles s'accrochent à un filament d'actine et « rampent » contre lui, consommant une molécule d'adénosine triphosphate (ATP) à chaque « pas » qu'elles font. Ce processus a pour effet de raccourcir le sarcomère : dans le muscle cardiaque, sa longueur passe de 2,2 μm (au repos) à 1,5 μm (pleinement contracté). Quand les ions Ca^{++} sont retirés, les sites auxquels se lient les têtes de myosine s'obstruent, ce qui fait que la myosine cesse subitement de tirer sur le filament d'actine et que le sarcomère retrouve sa longueur de repos.

(*a*)

(*b*)



(*c*)



▲ **Figure 7.22**

(*a*) Les sarcomères sont les unités contractiles élémentaires qui, bout à bout, forment les myofibrilles qu'on trouve dans les cellules musculaires. (*b*) Sarcomère au repos. (*c*) Quand la myosine « rampe » le long des filaments d'actine, chaque sarcomère se raccourcit.

Le déclenchement de la contraction nécessite la libération des ions Ca^{++}, un processus contrôlé par une différence de potentiel. En effet, toute cellule musculaire possède une *membrane excitable* : quand la différence de potentiel entre les faces de la membrane est perturbée par un stimulus, cette perturbation se propage le long de la membrane à la façon d'une vague appelée *potentiel d'action* (voir le sujet connexe du chapitre 5). Mesuré par rapport au milieu extérieur non perturbé, le potentiel V sur la face interne de la membrane passe temporairement à ≈20 mV, alors que sa valeur de repos est −90 mV. Ce changement de potentiel déclenche le *couplage excitation-contraction*, une séquence d'événements qui libère les ions Ca^{++}, qui font en sorte que les sites de liaison de la myosine deviennent exposés, ce qui initie la contraction. Quand V revient vers −90 mV, les ions Ca^{++} sont retirés, les sites de liaison s'obstruent à nouveau et la contraction de la cellule musculaire cesse.

La conduction électrique dans le cœur

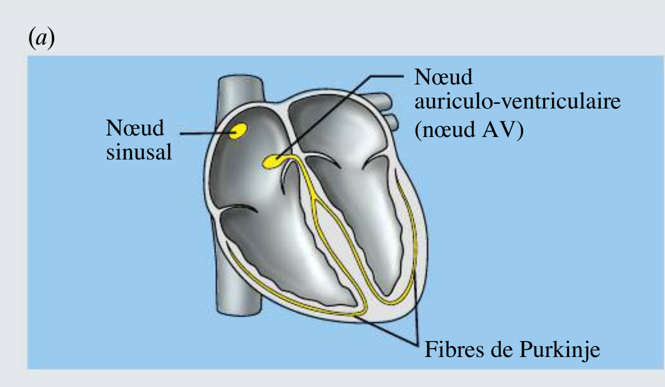
L'interaction entre les « messagers » Ca^{++} et les protéines est un phénomène physique en soi, mais, dans le contexte de l'ECG, c'est le potentiel d'action des cellules musculaires qui nous intéresse. En effet, nous allons voir que l'ECG est une mesure indirecte des variations de V. Pour le comprendre, il nous faut d'abord voir comment circule le potentiel d'action dans l'ensemble du cœur.

Contrairement aux cas des autres muscles, l'amorce d'un potentiel d'action dans les cellules cardiaques ne requiert aucune stimulation par des neurones. La stimulation provient plutôt de cellules musculaires spécialisées, celles qui composent le *nœud sinusal* et le *nœud auriculo-ventriculaire* (nœud AV) (figure 7.23*a*). Ces cellules comportent peu de myofibrilles, mais ont la particularité de produire *par elles-mêmes* des potentiels d'action périodiques. (Leurs membranes comportent simplement un type de canal ionique supplémentaire qui reste ouvert entre les potentiels d'action et cause l'entrée d'un courant qui stimule la membrane.) Le cycle cardiaque débute quand le nœud sinusal produit un potentiel d'action (figure 7.23*b*, première courbe).

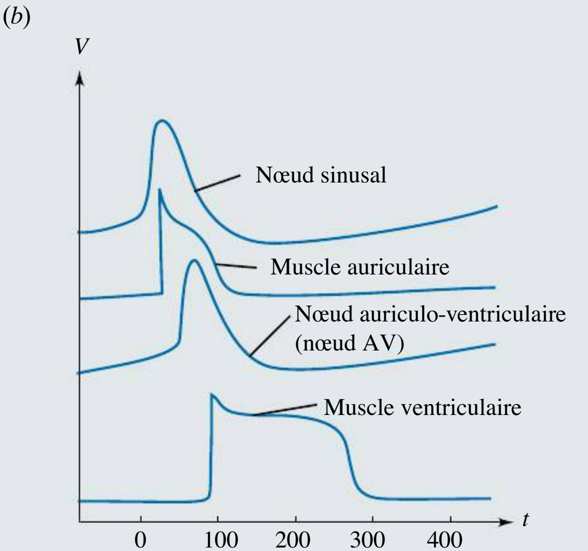
Les cellules musculaires du cœur ont à leurs extrémités des pores qui mettent en communication les cellules adjacentes. Ainsi, les potentiels d'action amorcés par le nœud sinusal peuvent se communiquer à toutes les cellules voisines. C'est ainsi que toutes les cellules des oreillettes se contractent de façon synchronisée (figure 7.23*b*, deuxième courbe).

▶ ▶ ▶

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 7.23**

(*a*) Le système de conduction du cœur comprend le nœud sinusal, le nœud AV et les fibres de conduction, tous faits de cellules musculaires spécialisées. Sur cette figure, la coupe est plus profonde qu'à la figure 7.21, de sorte qu'on ne voit pas les artères. (b) Le potentiel d'action à chaque endroit se produit selon un chronométrage bien déterminé.

Toutefois, il n'y a pas de communication directe entre les oreillettes et les ventricules, séparés par des valves faites de tissu isolant. C'est ici qu'intervient le nœud AV, situé dans l'oreillette droite. La fréquence naturelle du nœud AV est environ 30 % plus faible que celle du nœud sinusal, mais l'arrivée de chaque potentiel d'action qui circule dans les oreillettes le force à émettre un potentiel d'action à son tour (figure 7.23*b*, troisième courbe). Ses cellules étant très fines, leur résistance électrique est élevée et le potentiel d'action circule lentement. Ce délai (environ 0,1 s) laisse le temps aux oreillettes de se vider.

Ensuite, le potentiel d'action produit par le nœud AV se dirige vers les ventricules en empruntant des cellules de gros diamètre où la conduction est très rapide. Les cellules contractiles de la pointe du cœur sont stimulées d'abord et le potentiel d'action remonte vers le haut des ventricules, les cellules étant en communication les unes avec les autres. Des cellules de gros diamètre, les *fibres de Purkinje*, accélèrent ce processus, assurant que l'ensemble des ventricules se contracte presque simultanément (figure 7.23*b*, quatrième courbe).

Le cœur vu comme un dipôle électrique

Nous allons maintenant voir comment la circulation des potentiels d'action dans le cœur transforme cet organe, en première approximation, en un gros dipôle électrique.

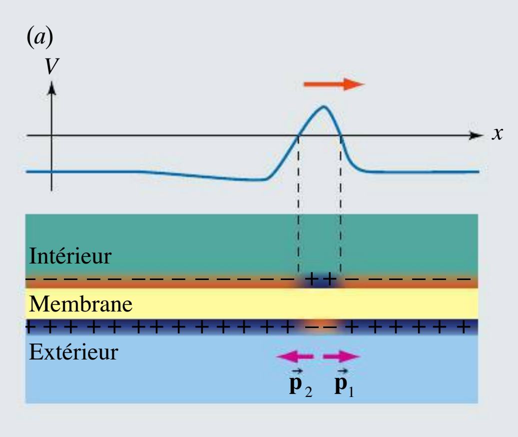
Quand un potentiel d'action circule le long d'une cellule cardiaque, sa phase de *dépolarisation* arrive en premier, rendant le potentiel intérieur (normalement −90 mV) localement moins négatif et le potentiel extérieur (normalement $V = 0$) localement plus négatif. Ensuite arrive la phase de *repolarisation*, qui fait l'inverse. Ces deux « vagues » se suivent à quelques dixièmes de seconde d'intervalle, en progressant à quelques mètres par seconde.

Un potentiel d'action ailleurs que dans le cœur ne dure que quelques millisecondes (voir la figure 5.29*d*, p. 199). Par conséquent, quand un potentiel d'action circule dans un neurone, la repolarisation suit à quelques millimètres derrière la dépolarisation (figure 7.24*a*). En comparaison, on voit à la figure 7.23*b* que les potentiels d'action de cellules musculaires cardiaques ont la particularité de présenter un *plateau* (causé par des canaux ioniques supplémentaires) qui prolonge leur durée

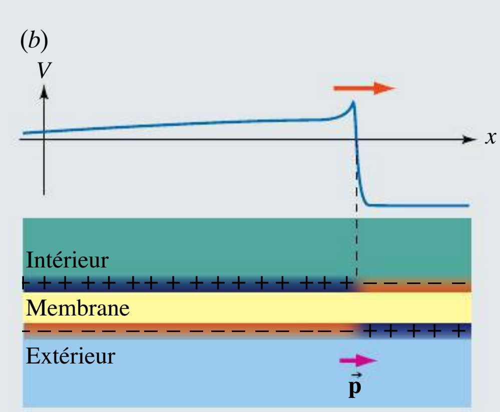
▶ **Figure 7.24**

(*a*) Dans un neurone, la repolarisation suit de près la dépolarisation, de sorte que le moment dipolaire résultant du milieu extérieur est nul. (*b*) Dans le tissu cardiaque, la dépolarisation entière a le temps de se produire avant que commence la repolarisation, de sorte qu'un dipôle apparaît, parallèlement aux cellules.

(*a*)

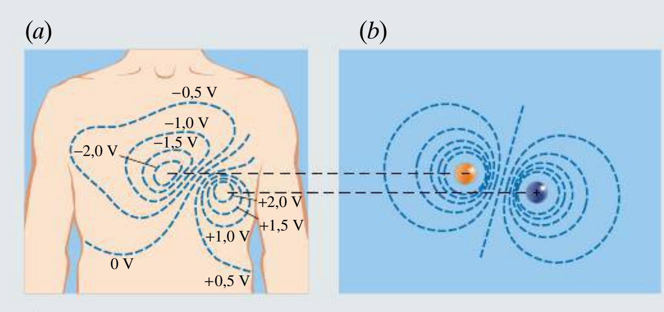


(*b*)



jusqu'à 250 ms. Ainsi, la dépolarisation de toutes les cellules des oreillettes ou des ventricules a le temps de se produire en entier avant même que commence la repolarisation. Pendant la durée de chaque phase, *un moment dipolaire* $\vec{\mathbf{p}}$ *apparaît à la surface extérieure de la cellule* (figure 7.24*b*).

Puisque les moments dipolaires des cellules voisines se produisent de façon synchronisée, ils s'additionnent et créent un champ électrique suffisant pour causer de faibles courants dans le milieu extérieur. Bien sûr, à mesure que le cycle cardiaque évolue, le moment dipolaire du cœur change de module et d'orientation, mais ce mouvement est assez lent pour qu'on puisse le comparer à un phénomène électrostatique (voir la figure 4.23, p. 148). La figure 7.25*a* montre les équipotentielles mesurées sur la peau à l'instant où les ventricules se contractent ; elles se comparent à celles d'un dipôle que nous reproduisons avec l'orientation adéquate à la figure 7.25*b*.



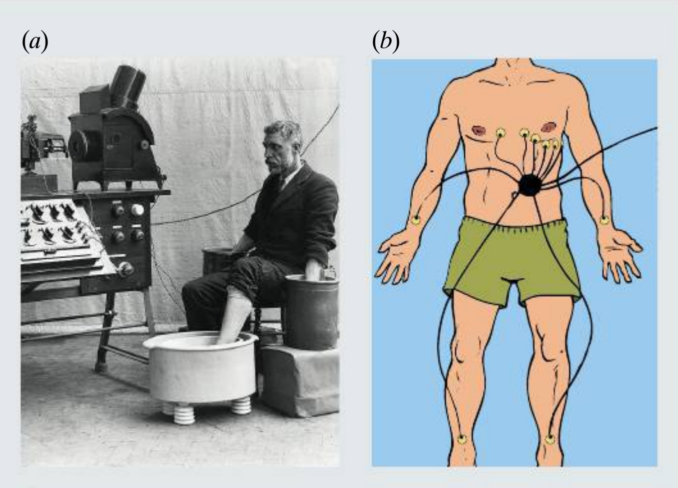
▲ **Figure 7.25**

(*a*) Équipotentielles mesurées à la surface de la peau à l'instant où les ventricules se contractent. La référence $V = 0$ est située au pied droit. (*b*) Modèle du dipôle utilisé pour représenter le même instant. On suppose $V = 0$ à l'infini.

L'ECG est l'enregistrement de la différence de potentiel produite par le dipôle cardiaque

Le moment dipolaire du cœur est suffisant pour causer des différences de potentiel de l'ordre du millivolt à la surface de la peau, qu'on peut mesurer avec un voltmètre capable de produire une mesure $\Delta V(t)$ en fonction du temps. C'est le principe de l'électrocardiographe, qui fut inventé en 1903 par le médecin Willem Einthoven (1860-1927) et qui lui valut le prix Nobel de 1924. À l'époque, pour le faire fonctionner, on plongeait les deux mains et un pied dans des cuves remplies d'un électrolyte (figure 7.26*a*). En utilisant trois cuves, Einthoven pouvait mesurer trois différences de potentiel distinctes, selon la paire de cuves choisie. Aujourd'hui, on a remplacé les cuves de Einthoven par de petites électrodes collées sur la peau.

Quand le cycle cardiaque se déroule, le dipôle que représente le cœur change de module et d'orientation, si bien qu'en général, la différence de potentiel entre deux électrodes données change. On peut facilement estimer cette différence de potentiel en traçant un axe qui relie les deux électrodes choisies et en évaluant la *composante du moment dipolaire électrique selon cet axe*. En effet, cette composante est grossièrement proportionnelle à la différence de potentiel mesurée.

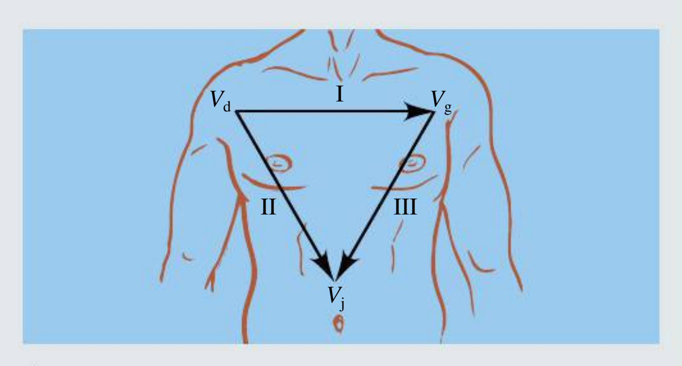


▲ **Figure 7.26**

(*a*) Le premier électrocardiographe commercial utilisait trois cuves en guise d'électrodes. (*b*) Un examen moderne complet utilise 10 électrodes.

Dans un électrocardiographe moderne, on a ajouté une électrode au pied droit, qui sert de référence $V = 0$, ainsi que six électrodes faisant le quart du tour de la poitrine dans un plan horizontal (figure 7.26*b*). Ces 10 électrodes permettent de mesurer la projection du vecteur $\vec{\mathbf{p}}$ selon 12 axes différents, qu'on appelle des *dérivations*.

Considérons d'abord les trois dérivations classiques de Einthoven, nommées I, II et III, qu'on obtient respectivement en mesurant $V_g - V_d$, $V_j - V_d$ et $V_j - V_g$, où les indices désignent les électrodes de la jambe gauche (j), du bras gauche (g) et du bras droit (d). Elles correspondent respectivement à un axe horizontal et à des axes à 60° sous l'horizontale (figure 7.27).



▲ **Figure 7.27**

Le triangle de Einthoven montre les axes des dérivations I, II et III.



La figure 7.28 montre, à chaque étape d'un cycle cardiaque normal, le moment dipolaire $\vec{\mathbf{p}}$ et sa projection selon la dérivation I. Comme l'explique cette figure, un ECG normal comprend trois événements faciles à reconnaître et qui sont communément désignés par les lettres PQRST, suivant la notation de Einthoven : le signal P correspond à la dépolarisation des oreillettes, le complexe QRS correspond à la dépolarisation des ventricules (et masque la repolarisation des oreillettes) et le signal T correspond à la repolarisation des ventricules.

L'ECG comme outil diagnostique

Tout l'intérêt de l'ECG est de permettre de déduire l'évolution du vecteur $\vec{\mathbf{p}}$ en fonction du temps quand cette évolution ne se comporte *pas* de façon normale. Quand on compare les graphiques obtenus avec les dérivations I, II et III, on obtient des projections différentes du même vecteur. Cela aide à déduire son orientation. Le processus est qualitativement analogue à celui qu'on doit faire pour obtenir l'angle d'un vecteur à partir de ses composantes. Si on imagine que le vecteur $\vec{\mathbf{p}}$ débute en une origine fixe et qu'on trace le parcours suivi par sa pointe dans le temps, on obtient pour un cœur sain le trajet de la figure 7.29*a*. La figure 7.29*b* montre la projection de ce trajet selon les dérivations I à III. Par exemple, on peut y voir que le signal T de la dérivation III est inversé par rapport aux deux autres. Cela indique qu'à cet instant, le vecteur $\vec{\mathbf{p}}$ pointe vers la gauche et ne s'éloigne pas de l'horizontale par plus de 30°.

Pour déterminer avec davantage de précision l'orientation du vecteur $\vec{\mathbf{p}}$ à un instant donné du cycle cardiaque, il faut utiliser davantage de dérivations. Un bon moyen serait de pouvoir placer une électrode en plein centre de la poitrine, loin sous la peau, et de mesurer la différence de potentiel entre cette électrode et les trois autres. En 1942, le médecin Emanuel Goldberger (1913-1994) eut l'idée de simuler cette électrode centrale en estimant

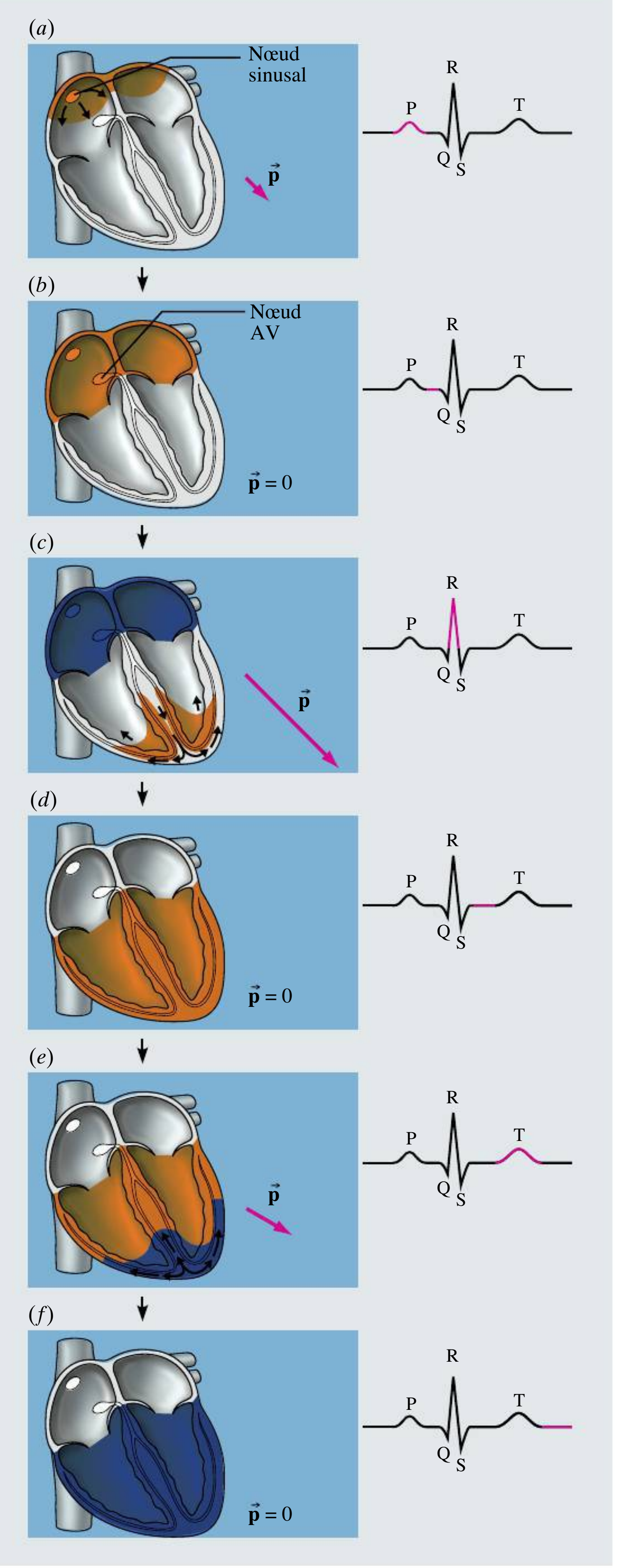


Figure 7.28

Six instants du cycle cardiaque avec la valeur instantanée du moment dipolaire résultant $\vec{\mathbf{p}}$. (*a*) Pendant que les oreillettes se dépolarisent, $\vec{\mathbf{p}}$ pointe vers le bas et la gauche ; sa composante selon l'axe I est positive. (*b*) Quand la dépolarisation des oreillettes est complète, $\vec{\mathbf{p}}$ est nul. La dépolarisation du nœud AV n'est pas mesurable. (*c*) La dépolarisation des ventricules débute aux fibres de conduction rapide. Le muscle des ventricules étant plus volumineux, $\vec{\mathbf{p}}$ a un grand module qui masque complètement la repolarisation des oreillettes. (*d*) $\vec{\mathbf{p}}$ redevient nul quand la dépolarisation est complète. (*e*) La repolarisation, qui produit un dipôle en sens inverse d'une dépolarisation, se dirige vers le haut. (*f*) $\vec{\mathbf{p}}$ redevient nul quand la repolarisation est complète.

Dépolarisation (l'extérieur des cellules est négatif)

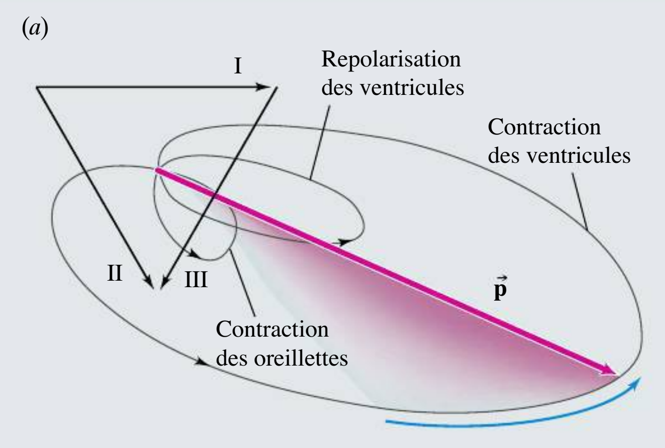
Repolarisation (l'extérieur des cellules est plus positif qu'au repos)

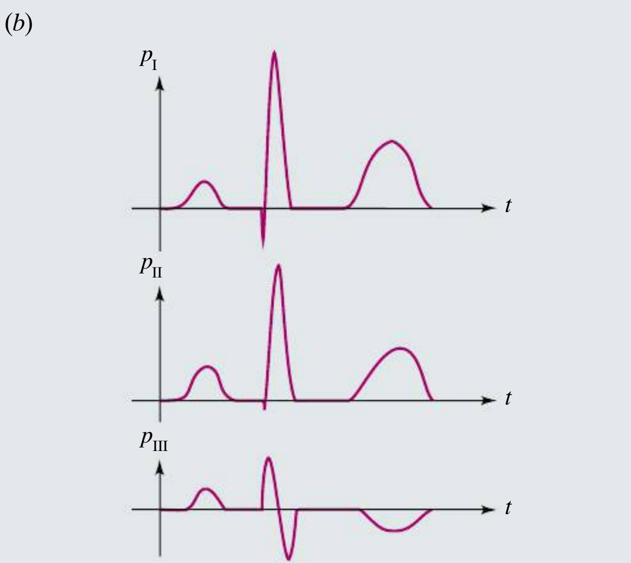
que son potentiel serait la moyenne $V_c = (V_d + V_g + V_j)/3$. Ainsi, si on mesure la différence de potentiel entre V_d et la moyenne des deux autres électrodes, on obtient à un facteur près $V_d - V_c$. (Vérifiez-le !) Ce procédé permet d'ajouter trois autres dérivations, $V_j - V_c$, $V_d - V_c$ et $V_g - V_c$, qui correspondent respectivement à la projection du moment dipolaire selon un axe vertical et deux axes situés à 30° au-dessus de l'horizontale.

Avec ces six dérivations, on peut déterminer avec une bonne précision l'orientation du vecteur $\vec{\mathbf{p}}$ dans le plan frontal, c'est-à-dire un plan vertical qui passe par les bras et les jambes. Pour savoir si le vecteur $\vec{\mathbf{p}}$ a une composante vers l'avant ou vers le dos du patient, on utilise six électrodes « de poitrine », dont les potentiels sont V_1 à V_6, pour obtenir six dérivations supplémentaires, respectivement $V_1 - V_c$ à $V_6 - V_c$.

Il s'écrit des manuels entiers sur l'art d'interpréter un ECG. Aussi, nous allons nous contenter de donner quelques exemples de pathologies que cette mesure permet de déceler. Les problèmes les plus faciles à repérer sont les *arythmies*, c'est-à-dire des anomalies du rythme cardiaque, car leur détection ne nécessite pas d'évaluer l'orientation du vecteur $\vec{\mathbf{p}}$. Par exemple, si tous les signaux P sont absents, on en déduit qu'on a potentiellement affaire à un patient dont le nœud sinusal ne fonctionne pas. (Heureusement, le nœud AV est lui aussi capable d'autostimulation, bien qu'avec une fréquence plus faible.) À l'inverse, si on repère des signaux P qui ne sont pas suivis de complexes QRS ou qui le sont avec un délai anormalement élevé, on déduit la présence probable d'un problème de communication entre les oreillettes et les ventricules.

Pendant le complexe QRS, un cœur sain présente un vecteur $\vec{\mathbf{p}}$ orienté à ±60° vers la pointe du cœur. S'il pointe trop vers un des ventricules, cela peut indiquer que ce ventricule a un volume musculaire anormalement élevé ou encore que du tissu cardiaque, mort en raison d'une insuffisance en oxygène, est contourné par la vague de dépolarisation. De plus, une déviation du vecteur $\vec{\mathbf{p}}$ vers la droite et le bas peut indiquer un stress important du ventricule droit, donc un problème aux poumons (vers où le ventricule droit pompe le sang). Pour détecter ces problèmes, il est essentiel que le médecin puisse estimer l'orientation du vecteur $\vec{\mathbf{p}}$ à partir des signaux lus par les 12 dérivations.





▲ **Figure 7.29**

La trajectoire dans le temps de la pointe du vecteur moment dipolaire $\vec{\mathbf{p}}$ et sa projection selon les axes des dérivations I à III.

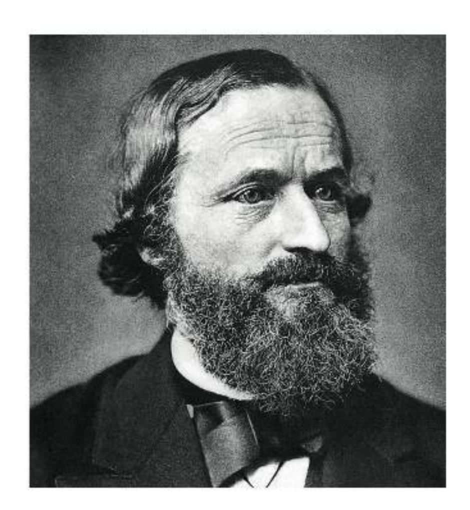
À une époque où environ le quart des décès de source naturelle est causé par des maladies cardiovasculaires, on ne peut qu'apprécier un outil utilisant la physique pour étudier le cœur.

Référence : Lilly, Leonard S. (2011). *Pathophysiology of Heart Disease*. Baltimore, MD/Philadelphia, PA : Wolters Kluwer/Lippincott Williams & Wilkins.

7.4 LES LOIS DE KIRCHHOFF

Certaines combinaisons de résistances ne sont ni en série, ni en parallèle. D'autres circuits combinent des résistances et d'autres composants, de sorte que, même si l'association est en série ou en parallèle, on ne peut remplacer les

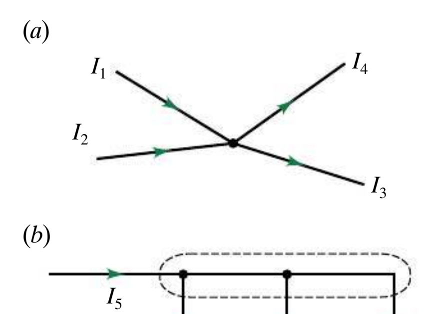
composants par un composant équivalent. Nous allons maintenant présenter les deux lois de Kirchhoff (figure 7.30) qui permettent l'analyse *de n'importe quel circuit*. Il s'agit de la *loi des nœuds* et de la *loi des mailles*.



▲ **Figure 7.30**
Gustav Kirchhoff (1824-1887).

Avant de les énoncer, définissons trois termes. Un circuit complexe comporte plusieurs embranchements. Un **nœud** est un tel point (ou une petite zone sans résistances ou autres composants) d'un circuit où trois fils ou plus se rencontrent (figure 7.31). Une **branche** est une portion de circuit reliant deux nœuds *consécutifs* et ne comportant donc aucun embranchement. (Par exemple, le tronçon situé entre les points A et B de la figure 7.32 est une branche.) Une **maille** est *n'importe quel* parcours fermé dans un circuit. Elle est donc faite de plusieurs branches.

Considérons une branche quelconque. Peu importe les composants de circuit y étant assemblés en série, *le courant est partout le même dans une même branche* (figure 7.32). Une erreur conceptuelle fréquente consiste à penser que le courant est plus faible à la sortie d'une résistance qu'à son entrée ou, à l'inverse, qu'il est plus élevé à la sortie d'une pile qu'à son entrée. Si c'était le cas, le principe de conservation de la charge serait violé ou encore ces composants de circuit acquerraient une charge. Or, aucun ne le fait (même un condensateur n'acquiert aucune charge totale). Le courant qui arrive à un composant est donc *toujours* égal à celui qui le quitte. En somme :



▲ **Figure 7.31**
La somme des courants pénétrant dans un nœud est égale à celle des courants qui en sortent, ou $\Sigma I = 0$. Un nœud est un endroit où se rejoignent trois fils ou plus, qu'il s'agisse de : (*a*) un simple point ; (*b*) une petite zone sans résistance du circuit.

Valeurs du courant dans un circuit complexe

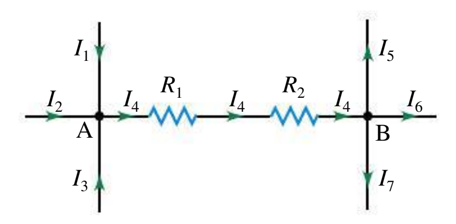
Dans un circuit complexe, à un instant donné, le nombre de valeurs différentes du courant est égal au nombre de branches.

Maintenant, considérons ce qui se produit quand le courant atteint un nœud du circuit. On peut répéter le même raisonnement que précédemment : au nœud, la charge n'est ni créée ni détruite, et elle ne s'accumule pas en ce point. En conséquence, on peut formuler l'énoncé suivant, qui s'appelle la **loi des nœuds de Kirchhoff** :

Loi des nœuds

$$\sum I = 0 \qquad (7.5)$$

La somme algébrique des courants qui entrent dans un nœud et qui en sortent est nulle.



▲ **Figure 7.32**
Partout dans une branche, le courant est le même. Par exemple, sa valeur demeure I_4 partout entre A et B. Notez qu'il ne diminue *pas* quand il traverse une résistance.

Cette loi découle donc du principe de conservation de la charge, mais aussi du fait que la charge ne s'accumule nulle part dans un circuit.

Le signe attribué à un courant pénétrant dans un nœud est opposé à celui d'un courant qui en sort. Pour les courants de la figure 7.31*a*, on peut écrire $I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0$. De même, pour les courants de la figure 7.31*b*, on peut écrire $I_5 - I_6 - I_7 - I_8 = 0$, pour ceux du nœud A de la figure 7.32, on peut écrire $I_1 + I_2 + I_3 - I_4 = 0$, etc.

Pour énoncer la loi des mailles, débutons par un exemple simple qui en est une illustration. Le circuit de la figure 7.33 est composé d'une pile réelle de résistance interne r en série avec une résistance R, la résistance des fils étant suffisamment petite pour être négligeable. Le courant circulant des potentiels élevés

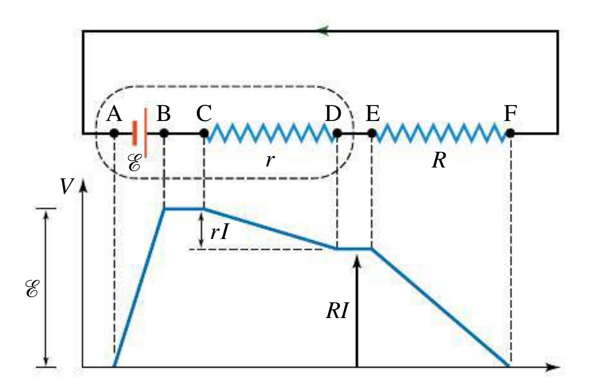


Figure 7.33

La somme des *variations* de potentiel le long d'une maille fermée est nulle: $\Sigma\Delta V = 0$.

vers les potentiels faibles, son sens dans le circuit va de la borne positive à la borne négative de la pile. Examinons les variations de potentiel V que rencontre une charge positive fictive q qui se déplace dans le circuit, lesquelles font changer son énergie potentielle $U = qV$.

Partons de A, au moment où la charge arrive à la borne négative de la pile. On choisit la référence $V = 0$ à ce point. La source de f.é.m. augmente l'énergie potentielle électrique de la charge, donc la fait passer d'un point de potentiel nul à un point de potentiel $\mathscr{E}$. Entre B et C, la charge n'a pas besoin d'une différence de potentiel pour avancer puisque les fils n'ont pas de résistance. En C, la charge rencontre la résistance interne et perd progressivement de l'énergie potentielle en passant vers des points dont le potentiel est graduellement plus faible, jusqu'à ce qu'elle atteigne la borne positive de la pile réelle, en D. De D à E, la charge se déplace sans variation de potentiel; en E, elle rencontre la résistance R et perd le reste de son énergie potentielle en traversant R, ce qui signifie qu'elle revient à un point dont le potentiel est nul. Enfin, entre F et A, la charge se déplace librement, sans variation de potentiel.

Démontrons maintenant un résultat général: puisque la force causée par le champ électrique est une force *conservative* (voir la section 4.2), le travail qu'elle effectue ne dépend que du point initial et du point final de la trajectoire subie par la charge. En d'autres termes, quand la charge effectue un parcours quelconque fermé (maille), elle doit avoir à la fin la même énergie potentielle qu'elle avait au début. (Dans le cas de l'exemple de la figure 7.33, la charge qui revient au point F doit avoir perdu *toute* l'énergie fournie initialement par la pile.) Comme l'énergie potentielle est proportionnelle au potentiel, il s'ensuit que le potentiel à la fin du trajet fermé est le même que celui au début du trajet. C'est ce qu'exprime la **loi des mailles de Kirchhoff**:

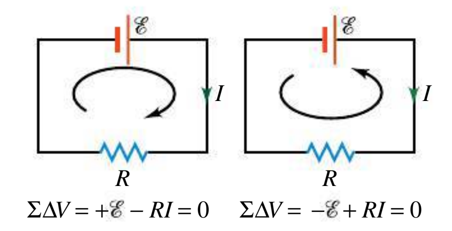
Loi des mailles

$$\sum \Delta V = 0 \tag{7.6}$$

La somme algébrique des *variations* de potentiel dans un parcours fermé (maille) est nulle.

Cette loi découle du fait que le champ électrique dans le fil est conservatif. Elle s'applique à toute maille, même celles qui ne contiennent pas de source de f.é.m.

Notez que l'équation 7.6 *tient compte du signe* de chaque variation de potentiel. Lorsqu'on parcourt une maille pour déterminer ces signes, on peut le faire dans



$\Sigma\Delta V = +\mathscr{E} - RI = 0$ $\Sigma\Delta V = -\mathscr{E} + RI = 0$

▲ **Figure 7.34**

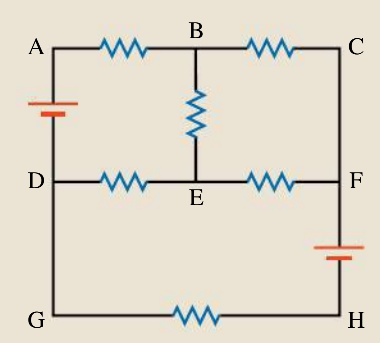
Dans l'application de la loi des mailles, on peut parcourir le circuit dans un sens ou dans l'autre.

un sens ou dans l'autre (figure 7.34). Si l'on se déplace dans le sens du courant (connu ou présumé), la variation de potentiel attribuable à la traversée d'une résistance (y compris toute résistance interne de la source de f.é.m.) est négative. Cela vient du fait que le courant circule vers le potentiel décroissant. Inversement, la variation de potentiel à la traversée d'une résistance en sens inverse du courant est positive. Le signe de la variation de potentiel lorsqu'on traverse une source idéale de f.é.m., lui, dépend de l'ordre dans lequel on rencontre les bornes. Il *ne dépend pas* du sens du courant.

Notons que les lois de Kirchhoff ne sont valables que dans un contexte où le champ est conservatif. Si la source de f.é.m. varie dans le temps, elle doit le faire assez lentement pour qu'on puisse considérer que le champ électrique dans les fils du circuit (voir la section 6.1) s'adapte instantanément. Ce n'est pas le cas, par exemple, dans une antenne où le courant oscille des millions de fois par seconde.

Exemple 7.11

Soit le circuit illustré à la figure 7.35. Combien y trouve-t-on (a) de nœuds ; (b) de mailles ; (c) de branches ? Dans chaque cas, les nommer.



▲ **Figure 7.35**

Combien de nœuds, de mailles et de branches comporte ce circuit ?

Solution

(a) Un nœud est un endroit où trois fils ou plus se rejoignent. On compte donc quatre nœuds dans ce circuit, soit les points B, D, E et F.

Notez qu'on aurait pu considérer toute la zone entre D et G comme faisant partie du nœud D et toute celle entre C et F comme faisant partie du nœud F. ■

(b) Une maille est un parcours fermé. Les premières qui sautent aux yeux sont les « petites » mailles ABEDA, BCFEB et DFHGD. Mais la loi des mailles peut être appliquée à *n'importe quel parcours fermé*, pas qu'aux plus petits. Il y a aussi le plus grand, ACHGA, et ceux de taille intermédiaire, ACFEDA, ABEFHGA et BCFHGDEB. On pourrait aussi imaginer des parcours fermés redondants (qui passent plusieurs fois au même endroit), mais cela ne serait d'aucun intérêt. On considère donc qu'il y a sept mailles.

Notez l'ambiguïté dans la façon dont on identifie une maille. Par exemple, le parcours ABEDA désigne la même maille que DABED. Rien n'impose le point de départ.

(c) Une branche est un tronçon qui relie deux nœuds consécutifs. On compte donc les branches DAB, BCF, BE, DE, EF et DGHF. Ici encore, on note une ambiguïté : BAD et DAB, par exemple, désignent la même branche.

Enfin, notez qu'il faut distinguer FDGHF, une maille, et DGHF, la *branche* allant du nœud F au nœud D. Pour ce faire, on a répété la lettre initiale pour signifier que le parcours est *fermé*. ■

La pertinence des lois de Kirchhoff en sciences de la vie ne se limite pas à l'écoulement de fluides dans les vaisseaux sanguins ou les bronches comme nous l'avons signalé à la figure 7.8 (p. 252) : ces lois s'appliquent aussi, en recherche médicale, à des situations véritablement électriques. Par exemple, si on veut comprendre la cause d'un nouveau type d'arythmie cardiaque ou l'effet d'un accident traumatique sur les neurones de la colonne vertébrale, on construit un modèle informatique où les cellules excitables sont représentées par des réseaux de résistances, de piles et de condensateurs, auxquels on

applique les lois de Kirchhoff. Les figures 5.30 (p. 200) et 6.14 (p. 225) présentent des bribes de tels modèles. Ces modèles numériques apportent beaucoup à la recherche, car ils portent souvent sur des phénomènes qu'il est impossible d'aller mesurer directement ; ils permettent aussi de simplifier une situation jusqu'à déterminer les causes principales des phénomènes, alors qu'un organe réel ne peut pas être « simplifié ». ●

L'utilisation des lois de Kirchhoff

Nous avons dit que les lois de Kirchhoff s'appliquent à tout circuit. Dans le reste de cette section, nous les utiliserons pour « résoudre » des circuits complexes ne comportant que des piles et des résistances. La section 7.5 considérera des circuits qui comprennent aussi des condensateurs. La « résolution » d'un circuit de résistances consiste à déterminer le courant dans chaque résistance et la tension à ses bornes, les composants étant connus. Il est aussi possible qu'il faille faire la tâche inverse.

L'application systématique de la loi des nœuds et de la loi des mailles un nombre suffisant de fois permet *toujours* la résolution complète d'un circuit. Cette méthode systématique est décrite dans la méthode de résolution ci-dessous, et nous la désignerons comme la *méthode globale de Kirchhoff*. Elle est illustrée dans les exemples 7.13 et 7.14, notamment.

L'application de la méthode globale de Kirchhoff peut toutefois être fastidieuse. Quand on peut calculer une résistance équivalente pour une portion du circuit et procéder selon la méthode de résolution de la section 7.2, il est préférable de le faire.

Sinon, quand une partie des courants ou des tensions est connue, on peut réduire le nombre d'inconnues avant d'appliquer la méthode globale de Kirchhoff pour les inconnues restantes. Il suffit d'appliquer la loi d'Ohm* à chacune des résistances pertinentes :

$$|\Delta V| = R_i I_i \qquad (7.7)$$

Il peut alors être utile de fixer arbitrairement $V = 0$ en un point du circuit et, partant de ce point de référence, de déterminer les potentiels des points voisins du circuit. Si on connaît d'avance assez de courants ou de tensions, il se peut même qu'on détermine toutes les inconnues sans avoir recours à la méthode globale (voir l'exemple 7.12).

Si ces raccourcis sont inutilisables, la méthode globale de Kirchhoff devient incontournable. Comme on le précise dans la méthode de résolution ci-dessous, cette façon de faire exige de résoudre un système de N équations à N inconnues.

Méthode de résolution

Méthode globale de Kirchhoff

Tout circuit de piles et de résistances qui comporte N branches et N courants inconnus peut être résolu par une méthode globale consistant à écrire N équations décrivant le circuit, puis à résoudre le système d'équations. On obtient les équations requises tout simplement en appliquant les lois de Kirchhoff à

* Notons que nous avons ajouté explicitement la valeur absolue qui était sous-entendue dans l'équation 6.10. En effet, le signe de la différence de potentiel devient très important quand on applique la loi des mailles.

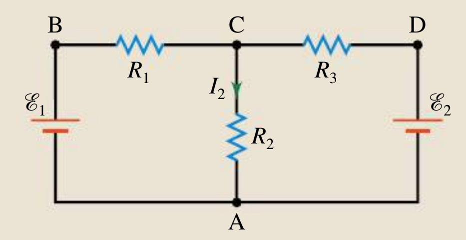
différents nœuds et mailles du circuit, en suivant les étapes suivantes :

1. Numéroter chaque branche et assigner un courant I_i dans chacune, en spécifiant un sens (flèche). Si le sens est inconnu, on fait une hypothèse pour chaque branche et *on ne la change jamais en cours de résolution*. (Dans le cas des branches pour lesquelles on s'est trompé, la résolution des équations donnera simplement un I négatif.)
2. Écrire la loi des nœuds pour chaque nœud. En général, une des équations est redondante, et on se limite à $n - 1$ des n nœuds.
3. Écrire la loi des mailles pour diverses mailles, en s'assurant que *chaque branche du circuit est parcourue au moins une fois*. Chaque maille peut être parcourue dans un sens ou dans l'autre, ce qui donne la même équation (changer de sens ne fait qu'inverser le signe de chaque terme, ce qui ne donne pas une nouvelle équation). Il est inutile d'écrire une équation pour chaque maille : on continue jusqu'à obtenir assez d'équations pour résoudre le système global d'équations (N équations à N inconnues).
4. Voici les règles à appliquer pour déterminer les signes des ΔV dans la loi des mailles :
   - traverser une pile $\mathscr{E}$ de la borne − vers la borne + correspond à une hausse de potentiel : $\Delta V = +\mathscr{E}$;
   - traverser une pile $\mathscr{E}$ de la borne + vers la borne − correspond à une baisse de potentiel : $\Delta V = -\mathscr{E}$;
   - traverser une résistance R dans le sens du courant I qui la parcourt (« descendre une résistance », par analogie avec l'eau dans un tuyau) correspond à une baisse de potentiel : $\Delta V = -RI$;
   - traverser une résistance R dans le sens contraire du courant I qui la parcourt (« remonter une résistance ») correspond à une hausse de potentiel : $\Delta V = +RI$.

On note que la méthode ci-dessus suppose que les inconnues sont les courants, mais les mêmes équations peuvent permettre, par exemple, d'obtenir les résistances si les courants sont connus.

Exemple 7.12

Dans le circuit illustré à la figure 7.36, $\mathscr{E}_1 = 20$ V, $R_1 = 8\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 5\ \Omega$ et le courant I_2 est de 3 A vers le bas. (a) Trouver les courants I_1 et I_3 qui traversent respectivement les résistances R_1 et R_3 (grandeur et sens). (b) Trouver la valeur de $\mathscr{E}_2$.



▲ **Figure 7.36**

Le courant $I_2 = 3$ A étant connu, on peut résoudre ce circuit en plaçant arbitrairement $V = 0$ au point A et en déterminant la valeur du potentiel aux autres points.

Solution

Ici, les résistances ne forment ni une association en série, ni une association en parallèle, donc il est impossible de déterminer une résistance équivalente du circuit. C'est souvent le cas s'il y a plus d'une pile ou s'il y a plusieurs types de composants. En effet, aucune paire de résistances n'étant traversée par un même courant, il n'y a pas d'association en série, et aucune paire de résistances ne partageant des bornes communes, il n'y a pas d'association en parallèle. (Par exemple, R_1 et R_2 ne sont pas en parallèle bien que leur borne C soit en commun, puisqu'il y a une pile entre la borne B de R_1 et la borne A de R_2.)

En revanche, le courant I_2 étant connu, on peut déterminer le potentiel en divers points du circuit, et utiliser cette information pour répondre aux questions, sans avoir recours à la méthode globale de Kirchhoff. ■

(a) Choisissons arbitrairement $V_A = 0$; en partant de A et en traversant la pile jusqu'à B, on trouve $V_B = 20$ V. Par la loi d'Ohm, la différence de potentiel entre les bornes de R_2 est de

$$\Delta V_2 = R_2 I_2 = 4\ \Omega \times 3\ \text{A} = 12\ \text{V}$$

Ainsi, $V_C = 12$ V. On peut alors calculer la différence de potentiel entre les bornes de R_1 :

$$\Delta V_1 = V_B - V_C = 20\ \text{V} - 12\ \text{V} = 8\ \text{V}$$

Par la loi d'Ohm, on trouve

$$I_1 = \frac{\Delta V_1}{R_1} = \frac{8\ \text{V}}{8\ \Omega} = 1\ \text{A}$$

Puisque $V_B > V_C$, le courant I_1 dans la résistance R_1 est *vers la droite*. On aurait obtenu le même résultat en appliquant la loi des mailles à la maille ABCA, ce qui donne $+\mathscr{E}_1 - R_1I_1 - R_2I_2 = 0$ ou $20 - 8I_1 - 12 = 0$ et $I_1 = 1$ A. La méthode globale n'aurait pas davantage été nécessaire.

Pour trouver I_3, on peut appliquer la loi des nœuds au point C. Si un courant de 1 A entre en C par la gauche et que 3 A ressortent par le bas, il doit y avoir 2 A qui entrent par la droite : le courant I_3 dans la résistance R_3 est de 2 A *vers la gauche*.

(b) Pour trouver la valeur de $\mathscr{E}_2$, on doit déterminer le potentiel au point D. Par la loi d'Ohm, la différence de potentiel entre les bornes de R_3 est de

$$\Delta V_3 = R_3I_3 = 5\ \Omega \times 2\ \text{A} = 10\ \text{V}$$

Puisque le courant va de D vers C, $V_D > V_C$,

$$V_D = V_C + \Delta V_3 = 12\ \text{V} + 10\ \text{V} = 22\ \text{V}$$

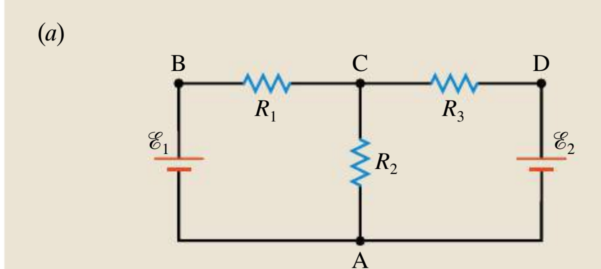
Ainsi,

$$\mathscr{E}_2 = V_D - V_A = 22\ \text{V} - 0\ \text{V} = 22\ \text{V}$$

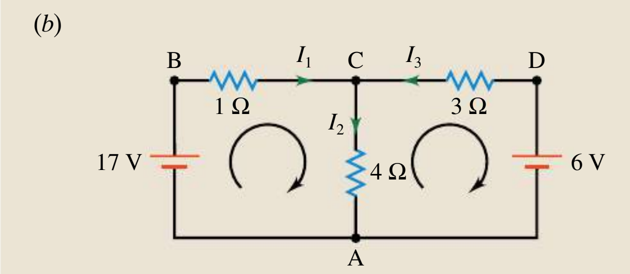
Exemple 7.13

Dans le circuit illustré à la figure 7.37*a*, $\mathscr{E}_1 = 17$ V, $\mathscr{E}_2 = 6$ V, $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$. (a) Trouver les courants dans chacune des résistances. (b) Vérifier que la puissance totale fournie par les piles est bien transformée entièrement en chaleur dans les résistances.

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 7.37**

(*a*) Ce circuit doit être résolu au moyen de la méthode globale de Kirchhoff. (*b*) On indique une hypothèse de sens pour le courant dans chaque branche (flèches vertes) et on choisit le sens des mailles à parcourir (flèches noires recourbées).

Solution

(a) Aucun courant ni tension n'étant connu au départ, on doit appliquer la méthode globale de Kirchhoff. ■

La figure 7.37*b* indique, en vert, un sens hypothétique pour le courant de chaque branche. Ensuite, on passe à la loi des nœuds, qu'on choisit d'appliquer au nœud C ; en choisissant le signe positif pour le courant sortant, on trouve

$$I_2 - I_1 - I_3 = 0 \qquad \text{(i)}$$

Il est inutile d'écrire une équation pour le nœud A (on trouverait $I_1 + I_3 - I_2 = 0$, une équation redondante).

Puisque nous avons $N = 3$ inconnues, il manque deux équations, qu'on trouve en appliquant la loi des mailles aux « petites » mailles ABCA et ACDA. Les flèches noires recourbées au milieu des mailles indiquent le sens du parcours, qui est choisi arbitrairement.

La maille ABCA nous permet d'écrire (en partant de A dans le sens horaire)

$$+17 - 1I_1 - 4I_2 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

La maille ACDA nous permet d'écrire (en partant de A dans le sens horaire)

$$+4I_2 + 3I_3 - 6 = 0 \qquad \text{(iii)}$$

Il ne reste plus qu'à résoudre le système d'équations. En général, c'est une bonne idée de procéder en isolant dans les équations les plus simples et en remplaçant dans l'équation qui possède le plus d'inconnues, soit ici l'équation (i). Puisque I_2 apparaît dans les trois équations, nous allons tout isoler en fonction de I_2 :

En isolant I_1 dans l'équation (ii), on trouve

$$I_1 = 17 - 4I_2$$

En isolant I_3 dans l'équation (iii), on trouve

$$I_3 = \frac{(6 - 4I_2)}{3} = 2 - 1{,}33I_2$$

En remplaçant le tout dans l'équation (i), on trouve

$$I_2 - (17 - 4I_2) - (2 - 1{,}33I_2) = 0$$

d'où on tire $I_2 = 3{,}00$ A, $I_1 = 17 - 4I_2 = 5{,}00$ A et $I_3 = 2 - 1{,}33I_2 = -2{,}00$ A. Le signe négatif pour I_3 signifie que notre hypothèse de sens pour I_3 était mauvaise : le courant dans la résistance de 3 Ω est de 2 A *vers la droite*. Les hypothèses de sens pour I_1 et I_2

étaient bonnes : le courant dans la résistance de 1 Ω est de 5 A vers la droite et le courant dans la résistance de 4 Ω est de 3 A vers le bas.

On remarque que la pile de 17 V a une f.é.m. telle qu'elle force I_3 à voyager dans le sens contraire du courant qu'établirait la pile de 6 V si elle était seule. En fait, la pile de 6 V va se recharger dans la situation indiquée. ■

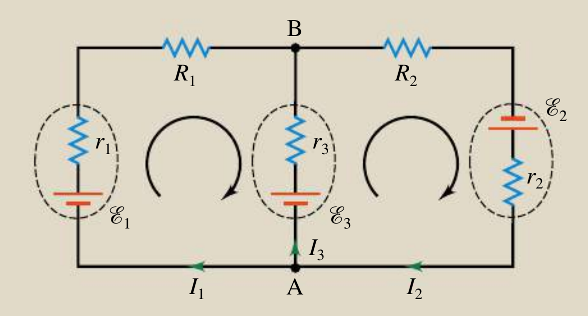
(b) Le courant dans la résistance $R_1 = 1\ \Omega$ égale $I_1 = 5$ A, pour une puissance $P = R_1 I_1^2 = 25$ W. De même, on trouve que 36 W et 12 W sont respectivement dissipés dans R_2 et R_3. La puissance totale dissipée dans les résistances est 25 W + 36 W + 12 W = 73 W.

Le courant qui traverse la pile $\mathscr{E}_1 = 17$ V est de $I_1 = 5$ A, pour une puissance $P = I_1\mathscr{E}_1 = 85$ W. Dans l'autre pile, $P = I_2\mathscr{E}_2 = 12$ W. Si on ne fait pas attention, on pourrait conclure à tort que la puissance totale fournie par les piles est de 85 W + 12 W = 97 W, ce qui ne concorde pas avec la puissance dissipée trouvée plus haut.

Or, il faut tenir compte du fait que la pile $\mathscr{E}_2$ est en train de se recharger (car I_3 traverse la pile « dans le mauvais sens »). Ainsi, la puissance de 12 W calculée pour $\mathscr{E}_2$ est une puissance *absorbée* par la pile. La puissance totale *fournie* par les piles est bien 85 W − 12 W = 73 W, et l'énergie est bel et bien entièrement dissipée tel qu'attendu. ■

Exemple 7.14

Soit le circuit de la figure 7.38. (a) Déterminer les courants, sachant que $r_1 = r_2 = 2\ \Omega$, $r_3 = 1\ \Omega$, $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $\mathscr{E}_1 = 15$ V, $\mathscr{E}_2 = 6$ V et $\mathscr{E}_3 = 4$ V. (b) Quelle est la différence de potentiel $V_A - V_B$?



▲ **Figure 7.38**

Un circuit à deux mailles avec trois sources de f.é.m. Le sens de parcours dans chaque maille est indiqué par une flèche incurvée.

Solution

Pour résoudre ce problème à l'aide de la méthode globale de Kirchhoff, nous avons indiqué les hypothèses de sens de courant et le sens de parcours des mailles sur la figure 7.38. La loi des nœuds appliquée au nœud A donne, si on choisit le signe positif pour le courant sortant,

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0 \qquad \text{(i)}$$

Pour appliquer la loi des mailles, on parcourt chaque maille à partir du point A, en sens horaire tel qu'indiqué.

Maille de gauche :

$$\mathscr{E}_1 - r_1I_1 - R_1I_1 + r_3I_3 - \mathscr{E}_3 = 0$$

Maille de droite :

$$\mathscr{E}_3 - r_3I_3 - R_2I_2 + \mathscr{E}_2 - r_2I_2 = 0$$

(a) En introduisant dans ces équations les valeurs données, on obtient

Maille de gauche :

$$15 - 2I_1 - 4I_1 + I_3 - 4 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

Maille de droite :

$$4 - I_3 - 3I_2 + 6 - 2I_2 = 0 \qquad \text{(iii)}$$

L'équation (i) donne $I_2 = I_1 + I_3$, que l'on substitue dans l'équation (iii) ; les équations (ii) et (iii) deviennent

$$11 - 6I_1 + I_3 = 0 \qquad \text{(iv)}$$

$$10 - 5I_1 - 6I_3 = 0 \qquad \text{(v)}$$

Une des inconnues ayant été éliminée, les équations (iv) et (v) forment un système de deux équations à deux inconnues. Ce système a pour solutions $I_1 = 1{,}85$ A et $I_3 = 0{,}12$ A. Enfin, $I_2 = I_1 + I_3 = 1{,}97$ A.

(b) La différence de potentiel $V_A - V_B$ est mesurée entre le point initial B et le point final A. Pour la déterminer, il faut donc *partir de* B et additionner les hausses et les baisses de potentiel. Comme le potentiel de chaque point est unique, on peut choisir *n'importe quel* trajet entre B et A. (Quelle propriété fondamentale cela traduit-il ?) Le long de la branche centrale, on trouve

$$V_B + r_3I_3 - \mathscr{E}_3 = V_A$$

$$V_A - V_B = r_3I_3 - \mathscr{E}_3 = 0{,}12 \times 1 - 4 = -3{,}88 \text{ V}$$

Le signe négatif signifie que V_A est inférieur à V_B. (Essayez les deux autres trajets pour vérifier que vous obtenez le même résultat.)

Exemple 7.15

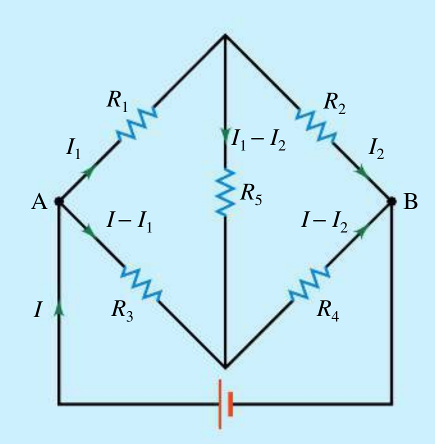
Écrire l'équation de maille pour la plus grande maille du circuit illustré à la figure 7.38, c'est-à-dire celle sans $\mathscr{E}_3$ ni R_3. La comparer à la somme des équations (ii) et (iii) de la solution de l'exemple précédent. Que peut-on en conclure ?

Solution

$\mathscr{E}_1 - (r_1 + R_1)I_1 - R_2I_2 + \mathscr{E}_2 - r_2I_2 = 0$. C'est simplement la somme des équations pour les mailles de gauche et de droite. On en conclut qu'il n'y a que deux équations de mailles indépendantes quand il y a trois mailles.

Exemple 7.16

Cinq résistances sont reliées comme à la figure 7.39. Quelle est la résistance équivalente entre A et B ?



▲ **Figure 7.39**

On ne peut pas déterminer la résistance équivalente de cette association de résistances en considérant des associations en série et en parallèle.

Solution

Dans cet exemple, on ne peut pas déterminer la résistance équivalente à l'aide des techniques pour les associations en série et en parallèle. Ce circuit pourrait être résolu par la méthode globale de Kirchhoff, comme aux exemples 7.13 et 7.14. On obtiendrait ensuite la résistance équivalente entre A et B grâce à la loi d'Ohm, en déterminant la différence de potentiel $|V_B - V_A|$ et en la divisant par le courant qui arrive au point A et quitte le point B. Nous utiliserons cependant une méthode légèrement différente, qui consiste à réduire d'abord le nombre d'inconnues grâce à la loi des nœuds, avant d'enfin appliquer la loi des mailles. ■

On pose que I_1 et I_2 sont les courants traversant R_1 et R_2 et que I est le courant arrivant au nœud A. Ensuite, on peut exprimer les trois autres courants, à l'aide de la loi des nœuds, en fonction des trois courants ainsi définis. En tenant compte des hypothèses de sens indiquées à la figure 7.39 pour chaque courant, on obtient

$$I_3 = I - I_1; \quad I_4 = I - I_2; \quad I_5 = I_1 - I_2$$

Ces valeurs sont indiquées sur le schéma. Le reste de la démarche est la même qu'avec la méthode globale de Kirchhoff : nous allons appliquer la loi des mailles, puis trouver la résistance équivalente à partir de l'équation $R_{éq} = |\Delta V|/I$, où ΔV est la différence de potentiel entre les points A et B.

La loi des mailles nous donne, pour les plus petites mailles de gauche et de droite,

$$-R_1I_1 - R_5(I_1 - I_2) + R_3(I - I_1) = 0 \qquad \text{(i)}$$

$$+R_5(I_1 - I_2) - R_2I_2 + R_4(I - I_2) = 0 \qquad \text{(ii)}$$

À partir des équations (i) et (ii), on peut exprimer I_1 et I_2 en fonction de I : $I_1 = \alpha_1 I$, et $I_2 = \alpha_2 I$, où les coefficients α_1 et α_2 sont des expressions faisant intervenir les résistances. (On vous demandera de calculer α_1 et α_2 au problème P16.)

La différence de potentiel entre les points A et B est

$$V_B - V_A = -R_1I_1 - R_2I_2 = -(\alpha_1R_1 + \alpha_2R_2)I$$

La résistance équivalente est donc

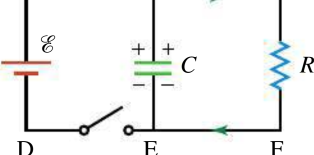
$$R_{éq} = |\Delta V|/I = \alpha_1R_1 + \alpha_2R_2$$

7.5 LES CIRCUITS *RC*

Les circuits dont nous avons parlé jusqu'à présent étaient parcourus par des courants constants. Lorsqu'on inclut un condensateur dans un circuit, on a encore un *courant continu* (un seul sens), mais dont l'intensité varie en fonction du temps pendant la charge ou la décharge du condensateur. Au chapitre 5, on a considéré que les condensateurs se chargeaient instantanément quand on les

reliait à une pile idéale ou qu'ils se déchargeaient instantanément si on reliait leurs armatures avec un fil sans résistance. Mais le transfert d'une charge finie en un délai nul correspond à un courant infini, ce qui est impossible en pratique. En appliquant les lois de Kirchhoff, nous allons étudier comment la charge du condensateur et le courant varient en fonction du temps dans un circuit RC, c'est-à-dire un circuit comprenant à la fois un condensateur C et une résistance R non négligeable.

La décharge du condensateur



▲ **Figure 7.40**
Circuit servant à étudier la décharge d'un condensateur dans une résistance.

La figure 7.40 représente un circuit comprenant un condensateur, une résistance et une pile idéale. On considère que l'interrupteur a déjà été fermé, de sorte que la tension aux bornes de C et de R est égale à la f.é.m. $\mathscr{E}$. D'après l'équation 5.2 ($C = Q/\Delta V$), la charge du condensateur est alors $Q_0 = C\Delta V_{C0} = C\mathscr{E}$, où l'indice 0 indique qu'il s'agit de valeurs initiales.

Lorsqu'on ouvre l'interrupteur à $t = 0$, le condensateur commence à se décharger. En effet, on peut alors voir l'ensemble « armature, branche BCFE et armature » comme un *unique* conducteur qui devient isolé de la pile. Un tel conducteur isolé cherche à rétablir son état d'équilibre électrostatique, ce qui nécessite que le potentiel en chacun de ses points devienne le même (voir la section 4.7). Or, le courant qui circule d'une plaque du condensateur à l'autre en passant par la résistance fait peu à peu chuter la valeur de Q, la valeur instantanée de la charge du condensateur, ainsi que la tension $\Delta V_C = Q/C$ à ses bornes. La loi des mailles appliquée à la maille EBCFE donne $+\Delta V_C - \Delta V_R = 0$, ce qui peut aussi s'écrire

$$\frac{Q}{C} - RI = 0 \qquad \text{(i)}$$

où les signes indiquent qu'en parcourant la maille dans le sens du courant, la différence de potentiel aux bornes de C est une hausse (le condensateur fournit de l'énergie), mais celle aux bornes de R est une baisse (la résistance dissipe de l'énergie). Cette équation étant valable à *chaque instant* de la décharge, le courant I et la charge Q demeurent *toujours proportionnels* l'un à l'autre. On s'attend donc à ce que I décroisse à mesure que Q diminue pendant la décharge.

Le courant circulant dans la résistance correspondant au passage des charges provenant du condensateur, on peut exprimer I en fonction de Q en utilisant la définition du courant $I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ (équation 6.1*b*), où dq est une quantité de charge (positive) qui circule dans le fil. Comme la valeur de Q *décroît* avec le temps ($\mathrm{d}Q < 0$), on a $\mathrm{d}q = -\mathrm{d}Q$ et donc $I = -\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$. L'équation (i) devient

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{Q}{RC}$$

Cette équation est une *équation différentielle* dont l'inconnue est la *fonction* $Q(t)$ donnant la valeur de la charge portée par le condensateur au fur et à mesure que le temps s'écoule. En réarrangeant et en intégrant cette relation, on obtient

$$\int \frac{\mathrm{d}Q}{Q} = -\frac{1}{RC}\int \mathrm{d}t$$

Donc,

$$\ln Q = -\frac{t}{RC} + k$$

où k est une constante d'intégration. On sait qu'à $t = 0$ la charge $Q = Q_0$; donc $k = \ln Q_0$. En isolant Q grâce à la fonction inverse du logarithme, on trouve

Décharge d'un condensateur

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/RC} \qquad (7.8a)$$

Expérimentalement, il est difficile de mesurer Q directement, et on vérifie plutôt la décharge en mesurant la différence de potentiel aux bornes du condensateur, proportionnelle à Q. En effet, l'équation 5.2 nous permet d'écrire qu'à tout instant $\Delta V_C = Q/C$. En substituant l'équation 7.8*a* dans ce résultat, on obtient

$$\Delta V_C(t) = \Delta V_{C0} e^{-t/RC} \qquad (7.8b)$$

où $\Delta V_{C0} = Q_0/C$. On peut aussi mesurer le courant, qu'on prédit à partir de $I = -\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ et de l'équation 7.8*a* :

Intensité du courant lors de la décharge

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC} \qquad (7.9)$$

où $I_0 = Q_0/RC = \Delta V_{C0}/R$ est le courant à $t = 0$. L'expression du courant en fonction du temps aurait aussi pu être obtenue à partir de la loi d'Ohm et de la loi des mailles, toutes deux valables à chaque instant : comme $\Delta V_C = \Delta V_R = RI$, on obtient directement l'équation 7.9 en divisant l'équation 7.8*b* par la résistance R. On note que la proportionnalité entre I et Q est effectivement respectée.

Toutes les grandeurs données par les équations 7.8*a*, 7.8*b* et 7.9 décrivent une *décroissance exponentielle*. Celle de $Q(t)$ est représentée à la figure 7.41. On peut décrire une telle décroissance grâce au temps caractéristique

$$\tau = RC \qquad (7.10)$$

appelé **constante de temps**. À $t = \tau$, la charge est devenue $Q = Q_0 e^{-1} = 0{,}368 Q_0$, c'est-à-dire qu'elle est passée à 37 % de sa valeur initiale. La **demi-vie**, $T_{1/2}$, exprime un autre aspect intéressant de la décharge : c'est le temps nécessaire pour que la charge tombe à 50 % de sa valeur initiale. On a donc

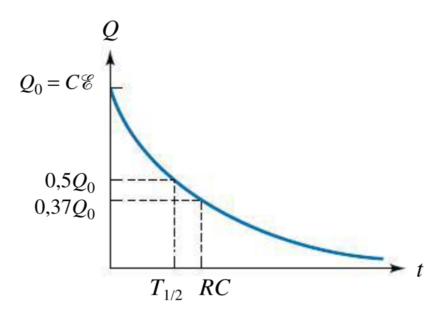
$$\frac{1}{2} Q_0 = Q_0 e^{-T_{1/2}/RC}$$

En prenant le logarithme naturel et en réarrangeant les termes, on trouve

Demi-vie

$$T_{1/2} = RC \ln 2 = 0{,}693\tau \qquad (7.11)$$

On note que la demi-vie, comme la constante de temps, est indépendante de la charge initiale, une particularité de la fonction exponentielle. Cela signifie qu'on peut choisir n'importe quel temps comme étant « initial » même après le début de la décharge et quand même appliquer les équations précédentes (voir l'exemple 7.17).



▲ **Figure 7.41**
Lors d'une décharge, la charge portée par un condensateur décroît de façon exponentielle. $T_{1/2}$ est la demi-vie et $\tau = RC$ est la constante de temps.

Du point de vue mathématique, quelle que soit la valeur de R ou de C, la charge du condensateur prend un temps infini pour devenir nulle. Malgré cela, on peut utiliser des concepts comme la constante de temps τ ou la demi-vie $T_{1/2}$ pour évaluer la rapidité avec laquelle un condensateur se décharge.

Lorsqu'elle devient très faible, la charge d'un condensateur est impossible à mesurer : on considère habituellement qu'à $t = 7\tau = 7RC$, elle est pratiquement nulle. Si on fait le calcul, sa valeur représente alors moins de 1/1000 de ce qu'elle était initialement.

Exemple 7.17

(a) Montrer que la constante de temps indique le temps que met la charge pour diminuer de $1/e$ ou de 37 % de *n'importe quelle* valeur de départ, et non pas seulement de la valeur à $t = 0$. (b) Combien faut-il de demi-vies pour que la charge chute à 12,5 % de sa valeur initiale ?

Solution

(a) Considérons les charges à deux instants t_1 et t_2 ($t_2 > t_1$) :

$$Q_1 = Q_0 e^{-t_1/\tau}\,; \quad Q_2 = Q_0 e^{-t_2/\tau}$$

En divisant ces équations membre à membre, on voit que

$$Q_2 = Q_1 e^{-(t_2 - t_1)/\tau}$$

Si $t_2 - t_1 = \tau$, on obtient $Q_2 = Q_1 e^{-1} = (37\,\%) Q_1$.

(b) Puisque $12{,}5\,\% = 0{,}125 = (1/2)^3$, il faut $3T_{1/2}$.

Grâce au résultat obtenu en (a), on sait que ce délai demeure identique même si l'instant de départ n'est pas $t = 0$.

Exemple 7.18

Un condensateur de 800 nF a été chargé avec une pile de 9 V et on le branche à une résistance de 100 kΩ pour le décharger. (a) Quelle charge $Q(t)$ porte-t-il en fonction du temps ? (b) Obtenir le courant de décharge $I(t)$ en fonction du temps en dérivant $Q(t)$. (c) Obtenir $I(t)$ à l'aide de la loi des mailles.

Solution

(a) Le condensateur ayant été chargé avec une pile de 9 V, la différence de potentiel initiale à ses bornes est de 9 V. L'équation $Q = C\Delta V_C$ étant valable à chaque instant t, on peut l'appliquer à $t = 0$, ce qui donne

$$Q_0 = C\Delta V_{C0} = (800 \times 10^{-9}\ \text{F})(9\ \text{V}) = 7{,}20\ \mu\text{C}$$

Pour obtenir $Q(t)$, on substitue Q_0 dans l'équation 7.8*a*, avec la constante de temps $\tau = RC = 0{,}08$ s, d'où

$$Q(t) = 7{,}20 \times 10^{-6} e^{-t/0{,}08}$$

où Q est en coulombs et t est en secondes.

(b) En dérivant $Q(t)$ par rapport au temps, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t &= 7{,}20 \times 10^{-6} e^{-t/0{,}08}(-1/0{,}08) \\ &= -9{,}00 \times 10^{-5} e^{-t/0{,}08} \end{aligned}$$

Or, $I = -\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = 9{,}00 \times 10^{-5} e^{-t/0{,}08}$, où I est en ampères et t est en secondes.

(c) Le circuit ne comportant qu'un condensateur et une résistance, la loi des mailles donne $\Delta V_C - \Delta V_R = 0$, soit $Q/C - RI = 0$. En isolant I dans cette expression, on obtient $I = Q/RC$. La loi des mailles étant valable à chaque instant t, on peut substituer $Q(t)$ obtenu en (a) pour obtenir

$$\begin{aligned} I(t) &= Q(t)/RC \\ &= [7{,}20 \times 10^{-6}/(1 \times 10^5)(800 \times 10^{-9})] e^{-t/0{,}08} \\ &= 9{,}00 \times 10^{-5} e^{-t/0{,}08} \end{aligned}$$

Ce résultat est identique à celui obtenu en (b).

Exemple 7.19

Soit un défibrillateur cardiaque qu'on représente comme un condensateur de 75 µF avec une tension initiale de 2000 V. Entre les électrodes placées sur le patient, on a $R_1 = 100\ \Omega$ et $R_2 = 1900\ \Omega$, respectivement la résistance d'un parcours qui traverse le thorax et celle d'un parcours qui longe la peau. (a) Quand l'appareil se déclenche, quel courant initial traverse le thorax ? (b) Pendant combien de temps ce courant excède-t-il 2 A ? (c) Si la peau du patient est mouillée, alors R_2 décroît et devient $\approx R_1$. Quelles conséquences cela a-t-il ?

Solution

(a) Le condensateur est relié à R_1 et à R_2 qui sont *en parallèle*. À $t = 0$, la tension aux bornes de R_1 est donc de 2000 V et la loi d'Ohm donne $I_1 = (2000\ \text{V})/(100\ \Omega) = 20{,}0$ A.

(b) Pour obtenir la constante de temps, on doit réduire le circuit à celui de la figure 7.40, c'est-à-dire utiliser la résistance *équivalente* aux bornes du condensateur, $R_{12} = (1/100\ \Omega + 1/1900\ \Omega)^{1/2} = 95{,}0\ \Omega$. Donc $\tau = R_{12}C = 7{,}13 \times 10^{-3}$ s. Lorsqu'on utilise le courant initial trouvé en (a), l'équation 7.9 devient $I = 20{,}0e^{-t/(7{,}13\times10^{-3}\ \text{s})}$. On substitue $I = 2$ A et on isole t, d'où $t = 0{,}0164$ s.

Notez que le temps obtenu correspond à un peu plus de deux constantes de temps, ce qui est cohérent avec le fait que le courant décroît d'un facteur 0,37 à chaque constante de temps. Notez aussi qu'il aurait été fastidieux de procéder en calculant le courant initial passant par la résistance équivalente. En effet, le courant final de 2 A donné dans l'énoncé est celui dans R_1 et non dans la résistance équivalente. ■

(c) Selon l'énoncé, la résistance de la peau sèche équivaut à 19 fois celle du thorax, donc le courant qui la traverse est 19 fois plus faible. Ainsi, seulement $1/(1 + 19) = 5\ \%$ de la charge du condensateur passe par la peau. Quand la peau est mouillée et que $R_2 \approx R_1$, cette proportion passe à 50 %. La peau risque donc d'être brûlée, mais, fait plus grave, cela prive le cœur du courant qu'on essaie de faire passer par lui.

Si le défibrillateur était une source de f.é.m. constante de 2000 V, le passage du courant par la peau n'affecterait en rien celui qui passe par le thorax. Mais la tension du condensateur décroît plus vite (constante de temps plus courte) quand on relie R_2 en parallèle avec R_1. ■

La décroissance exponentielle est un phénomène omniprésent en sciences de la vie, et pas seulement dans les instruments comme celui illustré à l'exemple précédent. Les faibles perturbations du potentiel de membrane d'une cellule non excitable s'estompent exactement comme un condensateur se décharge. On étudie les oscillations et la synchronicité dans les réseaux de neurones en représentant chaque cellule comme un simple condensateur qui se décharge, mais dont les stimuli et les potentiels d'action modifient la tension de façon discontinue.

De plus, une myriade de phénomènes biologiques, sans être électriques, s'apparentent à la décharge d'un condensateur. On peut donc utiliser les outils mathématiques de cette section pour décrire, par exemple, la décroissance exponentielle du volume respiratoire lors de l'expiration, celle des taux de certains médicaments dans le sang, celle des solutés indésirables lors d'une dialyse, etc. La constante de temps de l'expiration renseigne le clinicien sur la rigidité des poumons et aide au diagnostic de maladies comme l'emphysème. De même, la constante de temps des médicaments détermine le dosage et celle de la dialyse, la durée d'utilisation de l'appareil. ●

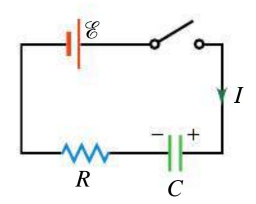
Au chapitre 12 du tome 3, nous verrons un autre phénomène physique qui suit une décroissance exponentielle : la désintégration radioactive.

La charge d'un condensateur

Voyons maintenant ce qui se produit quand on charge un condensateur dans un circuit comportant une résistance (figure 7.42). À $t = 0$, on ferme l'interrupteur. En appliquant la loi des mailles, sens horaire, au circuit obtenu, on a

$$\mathscr{E} - \frac{Q}{C} - RI = 0 \qquad \text{(ii)}$$

où les signes indiquent qu'en parcourant la maille dans le sens du courant, la différence de potentiel aux bornes de C est cette fois une baisse (le condensateur retire de l'énergie, puisqu'il l'emmagasine), contrairement au cas de la décharge, où le condensateur fournissait (restituait) de l'énergie.



▲ **Figure 7.42**
Un circuit servant à la charge d'un condensateur.

S'il n'y a pas de charge initiale sur C à $t = 0$, et donc que la différence de potentiel entre ses bornes est nulle, l'équation (ii) implique que la différence de potentiel aux bornes de R est initialement $\Delta V_{R0} = \mathscr{E}$, de sorte que le courant initial (maximal) circulant dans le circuit est $I_0 = \Delta V_{R0}/R = \mathscr{E}/R$. Ensuite, l'équation (ii) signifie qu'à *chaque instant* de la charge du condensateur, la somme des différences de potentiel aux bornes de C et de R demeure toujours constante : $\Delta V_C + \Delta V_R = \mathscr{E}$. Ainsi, à mesure que le condensateur se charge, la différence de potentiel entre ses bornes augmente, ce qui veut dire que celle aux bornes de R doit diminuer. Comme cette dernière différence de potentiel cause le courant dans la résistance, celui-ci doit donc diminuer lui aussi. On s'attend donc à ce que Q et ΔV_C augmentent en restant proportionnels l'un à l'autre et que I et ΔV_R diminuent en restant proportionnels l'un à l'autre.

Dans ce circuit, le courant I *accroît* la charge du condensateur ($\mathrm{d}Q > 0$) et donc $I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t = +\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$. Au fur et à mesure que le courant décroît, on peut s'attendre à ce que la rapidité avec laquelle le condensateur se charge diminue également. Lorsque la différence de potentiel aux bornes de C atteint $\mathscr{E}$, la différence de potentiel aux bornes de R est nulle : le courant cesse alors de circuler et la charge du condensateur a atteint sa valeur maximale. D'après l'équation 5.2, celle-ci est $Q_{\max} = C\Delta V_{C\max} = C\mathscr{E}$.

En utilisant $I = +\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ dans l'équation (ii) et en multipliant le résultat par C, on trouve

$$C\mathscr{E} - Q = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}RC$$

Comme dans le cas de la décharge du condensateur, la loi des mailles prend ici la forme d'une *équation différentielle* dont l'inconnue est la *fonction* $Q(t)$ donnant la valeur de la charge portée par le condensateur à mesure que le temps s'écoule. Cette fois, $Q(t)$ doit être une fonction croissante du temps, puisque le condensateur se charge. Après avoir regroupé les termes, on intègre des deux côtés :

$$\int \frac{\mathrm{d}Q}{C\mathscr{E} - Q} = \frac{1}{RC}\int \mathrm{d}t$$

ce qui donne

$$-\ln(C\mathscr{E} - Q) = \frac{t}{RC} + k$$

k étant une constante d'intégration. À $t = 0$, $Q = 0$, donc $k = -\ln(C\mathscr{E})$. Sachant que $\ln A - \ln B = \ln A/B$, l'équation ci-dessus peut donc s'écrire sous la forme

$$\ln\left(\frac{C\mathscr{E} - Q}{C\mathscr{E}}\right) = -\frac{t}{RC}$$

En isolant Q grâce à la fonction inverse du logarithme et à un réarrangement des termes, on trouve

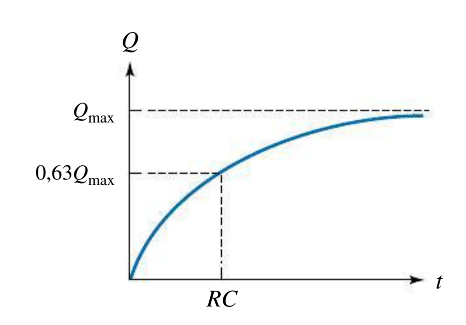
Charge d'un condensateur

$$Q(t) = Q_{\max}(1 - e^{-t/RC}) \qquad (7.12a)$$

avec $Q_{\max} = C\Delta V_{C\max} = C\mathscr{E}$. En utilisant la relation $\Delta V_C = Q/C$ (équation 5.2), on obtient l'expression de la différence de potentiel entre les bornes d'un condensateur qui se charge :

$$\Delta V_C(t) = \Delta V_{C\max}(1 - e^{-t/RC}) = \mathscr{E}(1 - e^{-t/RC}) \qquad (7.12b)$$

Cette croissance est représentée, pour $Q(t)$, à la figure 7.43. Quand le condensateur se charge, la constante de temps $\tau = RC$ nous indique le temps que met la charge pour monter jusqu'à $Q = Q_{max}(1 - e^{-1}) = 0{,}632Q_{max}$, c'est-à-dire à 63 % de sa valeur finale. De même, la demi-vie $T_{1/2}$ correspond au temps que met le condensateur pour atteindre la moitié de sa charge maximale. On trouve $T_{1/2}$ en déterminant, à partir de l'équation 7.12*a*, la valeur de t pour laquelle $Q(t) = Q_{max}/2$. En isolant t grâce au logarithme naturel et à un réarrangement des termes, on obtient $T_{1/2} = RC \ln 2$. On arrive donc au même résultat que celui de l'équation 7.11 correspondant à la décharge d'un condensateur.



▲ **Figure 7.43**

L'augmentation de la charge d'un condensateur en fonction du temps.

On peut déterminer le courant qui circule dans le circuit lors de la charge du condensateur à partir de la relation $I = +dQ/dt$ et de l'équation 7.12*a*. On obtient

Intensité du courant lors de la charge

$$I(t) = I_0 e^{-t/RC} \qquad (7.13)$$

où $I_0 = Q_{max}/RC = \Delta V_{C\max}/R = \mathscr{E}/R$ est le courant à $t = 0$. On remarque que l'équation 7.13 a la même forme que l'équation 7.9 décrivant le courant lors de la décharge d'un condensateur : comme prévu, le courant décroît bien que Q et ΔV_C croissent. De plus, l'équation 7.13 aurait aussi pu être obtenue à partir de la loi des mailles, valable à chaque instant : comme $\mathscr{E} - Q/C - RI = 0$, on peut écrire $I(t) = [\mathscr{E} - Q(t)/C]/R$. En substituant l'équation 7.12*a* dans ce résultat, on obtient directement un résultat identique à l'équation 7.13.

Rappelons à nouveau que, dans le circuit de décharge de la figure 7.40 (p. 276), les différences de potentiel aux bornes de R et de C sont égales, $\Delta V_C = \Delta V_R$. Dans le circuit de charge de la figure 7.42, elles ne sont pas égales. En effet, la différence de potentiel aux bornes de la résistance, $\Delta V_R = RI$, décroît avec le temps, alors que la différence de potentiel aux bornes du condensateur, $\Delta V_C = Q/C$, augmente avec le temps. Leur somme, $\Delta V_R + \Delta V_C = \mathscr{E}$, est constante.

Exemple 7.20

On forme un circuit d'une seule maille avec une pile, une résistance et un condensateur tels que $\mathscr{E} = 200$ V, $R = 2 \times 10^5\ \Omega$ et $C = 50\ \mu$F. Trouver : (a) le temps que met la charge pour monter jusqu'à 90 % de sa valeur finale ; (b) l'énergie emmagasinée dans le condensateur à $t = RC$; (c) la puissance instantanée dissipée dans R à $t = RC$; (d) l'énergie totale fournie par la pile lorsque le condensateur est totalement chargé ($t \to \infty$) ; (e) l'énergie finale emmagasinée dans le condensateur ; (f) la perte totale d'énergie dans la résistance.

Solution

(a) Nous cherchons le temps auquel $Q = 0{,}9Q_{max}$, avec $Q_{max} = C\mathscr{E} = 0{,}01$ C. La constante de temps est $\tau = RC = 10$ s. D'après l'équation 7.12*a*,

$$0{,}9Q_{max} = Q_{max}(1 - e^{-t/10})$$

Cela donne $e^{-t/10} = 0{,}1$. En prenant le logarithme naturel, on obtient $-t/10 = -2{,}30$ et $t = 23{,}0$ s.

Notez que nous n'avons pas eu besoin d'utiliser la valeur de Q_{max} pour répondre à cette question. Notez aussi que ce résultat correspond à un peu plus de deux constantes de temps, ce qui est cohérent avec le fait que l'écart $Q_{max} - Q$ décroît d'un facteur 0,37 à chaque constante de temps. ■

(b) Après un délai égal à une constante de temps, $Q = Q_{max}(1 - 1/e) = 0{,}632Q_{max}$. Par l'équation 5.9, l'énergie emmagasinée dans le condensateur est

$$U_C = \frac{Q^2}{2C} = \frac{(0{,}632 \times 0{,}01\ \text{C})^2}{10^{-4}\ \text{F}} = 0{,}400\ \text{J}$$

Notons qu'en raison du carré au numérateur, U_C n'est pas 63 % de $U_{C\max}$ = 1,00 J que nous obtiendrons à la question (e). ■

(c) La puissance instantanée dissipée dans R est $P_R = RI^2$. En une constante de temps, $I = 0{,}368 I_0$, avec $I_0 = \mathscr{E}/R = 10^{-3}$ A. Donc,

$$\begin{aligned} P_R &= RI^2 = (2 \times 10^5\ \Omega)(0{,}368 \times 10^{-3}\ \text{A})^2 \\ &= 2{,}71 \times 10^{-2}\ \text{W} \end{aligned}$$

(d) Pour que la quantité de charge $Q_{\max}$ soit passée d'une armature du condensateur à l'autre, elle a aussi dû passer par la pile, où elle a traversé une différence de potentiel $\mathscr{E}$. L'énergie totale fournie par la pile est donc $Q_{\max}\mathscr{E} = C\mathscr{E}^2$ = 2,00 J.

On peut aussi obtenir ce résultat en intégrant la puissance instantanée $P = \mathscr{E}I$ fournie par la pile : comme $P = \mathrm{d}U_{\mathscr{E}}/\mathrm{d}t$ et que I est donné par l'équation 7.13, on a

$$U_{\mathscr{E}} = \int_0^\infty \mathrm{d}U_{\mathscr{E}} = \mathscr{E}I_0 \int_0^\infty e^{-t/RC}\,\mathrm{d}t = C\mathscr{E}^2 = 2{,}00\ \text{J}$$

(e) D'après l'équation 5.9, l'énergie finale emmagasinée dans le condensateur est

$$U_{C\max} = \frac{Q_{\max}^2}{2C} = \frac{1}{2}C\mathscr{E}^2 = 1{,}00\ \text{J}$$

(f) Le taux de dissipation d'énergie dans R est $P_R = \mathrm{d}U_R/\mathrm{d}t = RI^2$. Donc $\mathrm{d}U_R = RI^2\mathrm{d}t$, I étant donné par l'équation 7.13. La perte totale d'énergie est

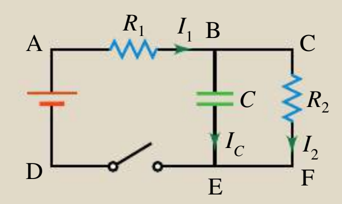
$$\begin{aligned} U_R &= \int_0^\infty P_R\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty RI_0^2\, e^{-2t/RC}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}C\mathscr{E}^2 \end{aligned}$$

Ce résultat est surprenant : l'énergie emmagasinée dans le condensateur est exactement égale à l'énergie dissipée dans la résistance, pourvu que la charge soit complète ($t \to \infty$). Bien sûr, la somme $U_C + U_R$ est égale à l'énergie fournie par la source de f.é.m.

L'expression $C\mathscr{E}^2/2$, qui donne l'énergie dissipée dans la résistance ou celle emmagasinée dans le condensateur, *ne dépend pas de la résistance R*. Cela signifie qu'en branchant un condensateur directement à une pile avec des fils de résistance négligeable, on minimise le temps de charge, mais *pas la perte d'énergie* : le courant de charge étant très important en raison de la très petite résistance des fils, la perte d'énergie est exactement la même que si la charge avait duré très longtemps. ■

Exemple 7.21

Dans le circuit de la figure 7.44, $\mathscr{E}$ = 20 V, R_1 = 10 Ω, R_2 = 20 Ω et C = 5 μF. À t = 0, on ferme l'interrupteur, le condensateur ne portant aucune charge initiale. Trouver : (a) le courant dans R_1 à t = 0 ; (b) le courant dans R_2 à t = 0 ; (c) le courant dans R_1 à l'instant où ΔV_C = 7 V ; (d) le courant final dans R_1 ; (e) la tension finale aux bornes du condensateur.



▲ **Figure 7.44**

Comme tout circuit, celui-ci peut être étudié à partir de la loi des mailles appliquée à chaque instant donné.

Solution

Chaque question portant sur *un instant donné*, on peut appliquer la loi des mailles à cet instant et il est inutile d'avoir recours aux équations qui décrivent des croissances et des décroissances exponentielles. ■

(a) La loi des mailles appliquée à la maille DABED donne

$$\mathscr{E} - R_1 I_1 - \Delta V_C = 0 \qquad \text{(i)}$$

mais à t = 0, ΔV_C = 0, de sorte que $I_1 = \mathscr{E}/R_1$ = 2,00 A.

(b) La loi des mailles appliquée à la maille BCFEB montre que la tension aux bornes de R_2 est la même qu'aux bornes du condensateur, qui est nulle à t = 0. Donc à cet instant I_2 = 0.

(c) L'équation (i) est toujours valable, sauf qu'on considère un instant où ΔV_C = 7 V. On a donc I_1 = 1,30 A.

(d) La loi des mailles appliquée à la maille DACFD donne

$$\mathscr{E} - R_1 I_1 - R_2 I_2 = 0 \qquad \text{(ii)}$$

Quand le condensateur a fini de charger, il n'y a aucun courant dans la branche BE, donc $I_1 = I_2$. ■

On a alors $I_1 = I_2 = \mathscr{E}/(R_1 + R_2)$ = 0,667 A.

(e) L'équation (i), avec le courant obtenu en (d), donne $\Delta V_{C\max}$ = 13,3 V.

7.6 L'UTILISATION DU GALVANOMÈTRE

Les anciens ampèremètres et voltmètres analogiques (à aiguille) qu'on trouve encore parfois avaient une conception simple, inspirée de celle du *galvanomètre*. Ce dispositif enregistre la déviation d'une bobine traversée par un courant, qui est suspendue entre les pôles d'un aimant (voir la section 8.4). On peut aussi mesurer les différences de potentiel avec un oscilloscope analogique, qui enregistre la déviation d'un faisceau d'électrons dans un tube à rayons cathodiques (voir la section 2.4).

Aujourd'hui, presque tous ces instruments ont été remplacés par des appareils *numériques*, c'est-à-dire des appareils qui utilisent des circuits électroniques pour mesurer une différence de potentiel sous la forme d'un encodage de chiffres 0 et 1. Le fonctionnement de ces appareils sera étudié dans le sujet connexe à la fin du chapitre. D'ici là, nous nous concentrerons sur les appareils analogiques fondés sur le galvanomètre qui, bien qu'ils soient désuets, sont plus simples à comprendre.

Un galvanomètre mesure un *courant*. En effet, sa bobine doit être parcourue par un courant pour être déviée, ce qui entraîne une déviation comparable de l'aiguille. Toutefois, il est à la base à la fois de l'ampèremètre et du voltmètre : si on le connecte en parallèle avec une petite résistance (appelée *shunt*) et que l'ensemble ainsi formé est branché en série dans le circuit (voir la section 7.3), il mesure le courant qui le traverse et joue le rôle d'un *ampèremètre*. Toutefois, si on le branche en série avec une très grande résistance et que l'ensemble ainsi formé est branché entre deux points A et B d'un circuit (voir la section 7.3), un petit courant, proportionnel à la différence de potentiel entre A et B, le traversera. La déviation de son aiguille indique donc la différence de potentiel entre A et B et le galvanomètre joue alors le rôle d'un *voltmètre*. Tous les voltmètres, quelle que soit leur conception, analogique ou numérique, ont ceci en commun : pour évaluer la différence de potentiel, il est nécessaire qu'un petit courant les traverse.

La bobine d'un galvanomètre a une résistance de l'ordre de 10 à 100 Ω ; elle donne une déviation maximale de l'aiguille pour un courant de l'ordre de 10 µA à 1 mA. (Les galvanomètres les plus sensibles peuvent mesurer des courants inférieurs à 10^{-9} A.) Avec une résistance type $R_G = 20$ Ω et un courant de 1 mA correspondant à la déviation maximale, la différence de potentiel aux bornes est de 20 mV. Un tel galvanomètre peut être utilisé comme ampèremètre jusqu'à 1 mA et comme voltmètre jusqu'à 20 mV. Pour étendre ces plages de valeurs, on peut combiner le galvanomètre avec des résistances en série ou en parallèle comme on vient de l'évoquer. L'exemple qui suit porte sur ce sujet.

Exemple 7.22

Soit un galvanomètre dont la déviation maximale est produite par un courant de 1 mA. La bobine a une résistance de 20 Ω. Modifier l'instrument pour obtenir : (a) un ampèremètre pouvant mesurer jusqu'à 500 mA ; (b) un voltmètre capable de mesurer 25 V.

Solution

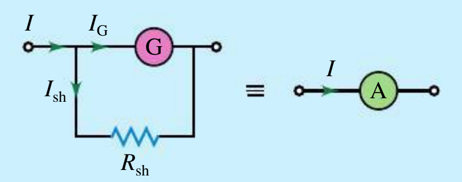
(a) Puisque le galvanomètre ne peut être traversé que par un courant de 1 mA, on place une résistance de dérivation (shunt), R_{sh}, en parallèle avec lui (figure 7.45). La loi des nœuds donne le courant entrant

$$I = I_G + I_{sh}$$

Donc $I_{sh} = 499$ mA quand $I = 500$ mA. Les différences de potentiel aux bornes du galvanomètre et du shunt sont égales :

$$R_G I_G = R_{sh} I_{sh}$$

On en déduit $R_{sh} = R_G\, I_G / I_{sh} = (20\ \Omega)(1\ \text{mA})/(499\ \text{mA}) = 0{,}04\ \Omega$. Cette résistance étant en parallèle avec les



▲ **Figure 7.45**

Un galvanomètre peut être utilisé comme ampèremètre capable de mesurer des courants plus importants si on le branche *en parallèle* avec un shunt R_{sh}.

20 Ω du galvanomètre, la résistance effective de l'ampèremètre est essentiellement égale à 0,04 Ω.

Une fois branché de cette façon, le galvanomètre n'est plus traversé par tout le courant, mais par une proportion du courant. Cette proportion fixe étant connue, on peut multiplier sa mesure pour obtenir le courant, ce qui est généralement déjà fait sur la graduation de l'échelle pointée par l'aiguille.

(b) Lorsqu'un courant de 1 mA circule dans la bobine, la différence de potentiel aux bornes est égale à 20 mV seulement. Pour mesurer 25 V, on doit brancher une résistance *en série*, R_s, avec le galvanomètre (figure 7.46). D'après la loi d'Ohm,

$$\begin{aligned} 25\ \text{V} &= (R_G + R_s)I_G \\ &= (20\ \Omega + R_s)(1\ \text{mA}) \end{aligned}$$

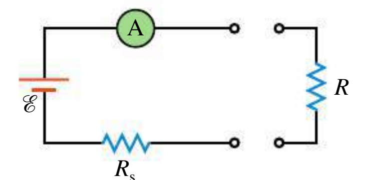
On en déduit R_s = 24 980 Ω ≈ 25 kΩ. La résistance effective du voltmètre est donc de 25 kΩ. Un tel instrument ne devrait pas être employé pour mesurer la différence de potentiel aux bornes, par exemple, d'une résistance de 10 kΩ.

▲ **Figure 7.46**

Un galvanomètre peut être utilisé comme voltmètre si on le branche *en série* avec une résistance R_s.

Un multimètre analogique commercial, qui utilise un seul galvanomètre, offre plusieurs échelles pour mesurer les courants, les différences de potentiel et aussi les résistances. Un multimètre analogique est classifié selon sa *sensibilité*. Une valeur de 1000 Ω/V, par exemple, signifie que, lorsqu'on utilise l'instrument comme voltmètre, la résistance effective est de 1000 Ω fois la valeur maximale sur une échelle donnée. Ainsi, sur l'échelle de 25 V, la résistance effective est de (1000 Ω/V)(25 V) = 25 kΩ. Comme $I = \Delta V/R$, la sensibilité est simplement l'inverse du courant requis par le galvanomètre pour produire une déviation maximale. Pour une sensibilité de 1000 Ω/V, le courant dans le galvanomètre serait de 1/1000 V/Ω = 10^{-3} A.

Mesure de la résistance



▲ **Figure 7.47**

Dans un ohmmètre, une source de f.é.m. est en série avec un ampèremètre et une résistance R_s. Si les bornes sont mises en court-circuit, on observe une déviation maximale de l'aiguille sur l'ampèremètre. La déviation est plus faible lorsqu'on branche la résistance R.

Un *ohmmètre* (figure 7.47) contient un ampèremètre comportant une résistance R_A (non représentée), une faible source de f.é.m. $\mathscr{E}$ et une résistance variable en série R_s. On met d'abord les bornes en court-circuit (on les relie directement entre elles) et on règle une petite résistance variable incluse dans R_A, de manière à ce que la déviation de l'aiguille soit maximale. Cette méthode sert à compenser les variations de la f.é.m. de la pile. La valeur obtenue pour la déviation maximale correspond alors à une résistance (externe) nulle. Lorsqu'on branche une résistance R, le courant est plus faible, de sorte que la déviation de l'aiguille est moindre. L'échelle des résistances est ainsi étalonnée de la droite vers la gauche.

Exemple 7.23

Sur l'échelle de 0,1 mA, un ampèremètre a une résistance de 20 Ω. On le branche en série avec une source de f.é.m. de 1,5 V. (a) Quelle doit être la valeur de la résistance R_s pour que la déviation soit maximale ? (b) Quelle résistance externe fait dévier l'aiguille jusqu'au milieu de l'échelle ?

Solution

(a) Considérons le cas où les bornes sont en court-circuit (sans résistance externe). D'après la loi des mailles, avec R_A comme résistance de l'ampèremètre,

$$\mathscr{E} = (R_A + R_s)I_A$$
$$1{,}5\ \text{V} = (20\ \Omega + R_s)(0{,}1\ \text{mA})$$

Donc $R_s = 14\ 980\ \Omega \approx 15\ \text{k}\Omega$.

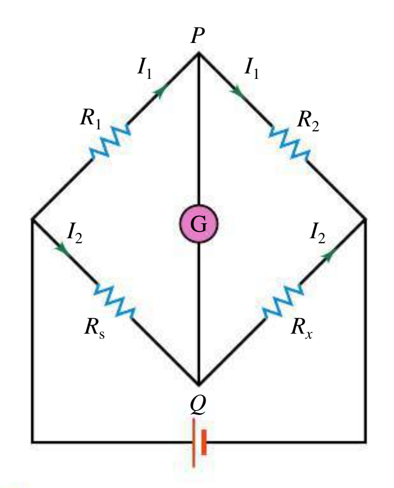
(b) Lorsqu'on ajoute la résistance externe R, le courant vaut

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R_A + R_s + R} = \frac{1{,}5V}{15\ \text{k}\Omega + R}$$

Pour une déviation jusqu'au milieu de l'échelle, $I = I_A/2$. Il est pratique d'exprimer I_A sous la forme (1,5 V)/(15 kΩ). On voit immédiatement que 2×15 kΩ = (15 kΩ + R) ; donc R = 15 kΩ. Ainsi, l'aiguille dévie jusqu'au milieu de l'échelle lorsque la résistance externe est égale à la résistance interne. Si la résistance à mesurer est faible, il faut réduire la résistance interne de l'ohmmètre pour améliorer la sensibilité. Le courant circulant dans l'ampèremètre étant alors plus intense, son échelle doit également être modifiée. Il ne faut pas oublier qu'un ohmmètre envoie un courant dans le dispositif dont on veut mesurer la résistance et risque donc d'endommager un élément sensible, par exemple un autre galvanomètre.

Le pont de Wheatstone

Une méthode permettant de mesurer avec précision les résistances fut mise au point en 1843 par Charles Wheatstone (1802-1875), inventeur du télégraphe électrique. Quatre résistances sont montées de manière à former un « pont » (figure 7.48). Les résistances R_1, R_2 et R_s sont connues, alors que la résistance R_x est l'inconnue à mesurer. L'instrument peut être utilisé de deux façons.



▲ **Figure 7.48**

Un pont de Wheatstone sert à mesurer les résistances avec précision. L'instrument est « équilibré » lorsque le courant circulant dans le galvanomètre est nul.

Selon la première méthode, R_1 et R_2 ont des valeurs fixes et l'on fait varier la résistance étalonnée (standard) R_s jusqu'à ce que le galvanomètre enregistre un courant nul. On dit alors que le pont est « équilibré ». (Dans cette méthode du courant nul, la valeur de la f.é.m. et l'étalonnage du galvanomètre n'ont pas d'importance. Dans la pratique, on utilise une résistance pour limiter le courant traversant le galvanomètre avant l'équilibrage du pont.) Lorsque le pont est équilibré, les points P et Q sont au même potentiel. Les différences de potentiel aux bornes de R_1 et de R_s et aux bornes de R_2 et de R_x sont donc égales :

$$R_1 I_1 = R_s I_2$$
$$R_2 I_1 = R_x I_2$$

En prenant les rapports de ces équations, on trouve

$$R_x = \frac{R_2}{R_1} R_s$$

La résistance inconnue est déterminée en fonction de la résistance étalon.

Selon la deuxième méthode, R_s est une résistance de précision dont la valeur est fixée, et R_1 et R_2 font partie d'un même fil continu. Le point P est un curseur (contact mobile) que l'on peut faire glisser sur le fil pour réaliser l'équilibre. La résistance d'un fil homogène étant proportionnelle à la longueur, $R_x = (\ell_2/\ell_1)R_s$ s'obtient à partir du rapport des longueurs de chaque côté du curseur.

Le pont de Wheatstone permet de mesurer les résistances avec une grande précision. On s'en sert pour mesurer la résistance des thermomètres à résistance de platine ou des jauges de contrainte (extensomètres). Des ponts de Wheatstone sont encore utilisés dans certains appareils numériques modernes, où le processus décrit ci-dessus est entièrement automatisé. Les balances numériques modernes utilisent aussi un pont de Wheatstone *déséquilibré* : la valeur d'une des résistances change en raison de la pression et la mesure du courant qui traverse le pont est plus précise qu'une mesure directe de cette résistance.

Le potentiomètre

On peut mesurer rapidement la f.é.m. d'une pile en branchant un voltmètre directement aux bornes de la pile. Toutefois, puisque le voltmètre a une résistance finie, on mesure inévitablement la différence de potentiel entre les bornes plutôt que la vraie f.é.m. Le *potentiomètre* est un instrument qui permet de comparer une f.é.m. inconnue avec une f.é.m. connue. Comme le pont de Wheatstone, c'est un dispositif qui fonctionne selon le principe de réglage du courant nul.

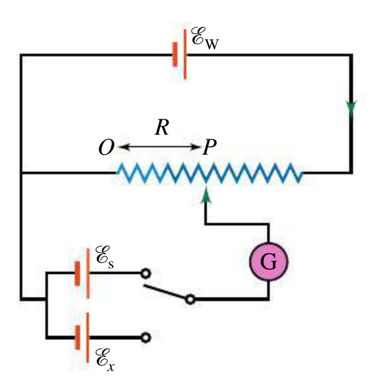


Figure 7.49

On utilise un potentiomètre pour comparer une f.é.m. inconnue $\mathscr{E}_x$ avec une f.é.m. étalon connue $\mathscr{E}_s$.

Une pile « en service » de f.é.m. $\mathscr{E}_W$ fournit un courant constant à un fil (en général de 1 m de long) sur lequel peut glisser un curseur. Un galvanomètre est relié d'un côté à un interrupteur et de l'autre côté à un curseur *P* mobile sur le fil (figure 7.49). On ferme d'abord l'interrupteur de manière à relier la pile étalon (qui peut être une cellule au cadmium, de f.é.m. 1,018 26 V), dont la f.é.m. connue est désignée par $\mathscr{E}_s$. On déplace le curseur jusqu'à ce que le galvanomètre indique zéro. Si la résistance du fil entre *O* et *P* est R_s, la loi des mailles de Kirchhoff, appliquée à la boucle inférieure, donne

$$\mathscr{E}_s - R_s I = 0$$

On remplace ensuite la pile standard par la pile de f.é.m. inconnue $\mathscr{E}_x$ et on déplace à nouveau *P* jusqu'à ce que le galvanomètre indique zéro. On a maintenant

$$\mathscr{E}_x - R_x I = 0$$

Les résistances sont proportionnelles aux longueurs de fil entre *O* et *P*. En éliminant *I*, on voit que

$$\mathscr{E}_x = \frac{\ell_x}{\ell_s}\mathscr{E}_s$$

Le rapport des longueurs donne la f.é.m. inconnue en fonction de $\mathscr{E}_s$. Puisque le courant circulant dans les sources est nul, la résistance interne n'a pas d'importance. La f.é.m. de la pile en service n'a pas non plus d'importance à condition qu'elle soit supérieure à la fois à $\mathscr{E}_s$ et à $\mathscr{E}_x$.

SUJET **CONNEXE**

Le multimètre numérique

À la section 7.6, nous avons expliqué comment fonctionnent les appareils de mesure analogiques, c'est-à-dire les anciens voltmètres ou ampèremètres à aiguille que l'on trouve encore parfois. Dans ce sujet connexe, nous allons examiner le fonctionnement des appareils numériques modernes. Après avoir brièvement défini quelques notions de base, nous décrirons les différentes parties d'un multimètre simple et terminerons en approfondissant quelques aspects.

Qu'est-ce qu'un instrument numérique ?

Les dispositifs dits « numériques » sont de plus en plus nombreux dans notre vie quotidienne : iPod, ordinateurs, téléviseurs à haute définition, téléphones cellulaires sont tous des dispositifs numériques. Ce nom est utilisé pour désigner des appareils qui utilisent un code (fait de chiffres) pour représenter de l'information ; ils traitent donc une donnée comme une séquence de valeurs discrètes. Ce procédé s'oppose à celui des dispositifs *analogiques* qui, eux, traitent les données comme des quantités continues. Par exemple, si on dit que « la température est de 51,3 degrés », on utilise un code de dix quantités *discrètes* (les dix chiffres) pour représenter une grandeur *continue*, la température. (Une façon analogique de représenter la même information serait la longueur de la colonne de mercure d'un thermomètre qui, elle, peut varier de façon continue.)

Un multimètre numérique, nous le verrons, traite effectivement l'information sous forme de chiffres. Toutefois, plutôt qu'un code de dix chiffres 0 à 9 (la base décimale), il utilise comme tous les dispositifs électroniques un code de deux chiffres 0 et 1 (la base binaire). L'avantage de n'avoir que deux chiffres possibles est qu'ils peuvent être représentés à l'aide d'un dispositif aussi simple qu'un interrupteur. Par exemple, un interrupteur ouvert pourrait représenter le chiffre 0, alors que le même interrupteur, lorsqu'il est fermé, représenterait le chiffre 1. Le procédé réellement utilisé est légèrement différent, mais, comme nous le verrons, le fonctionnement de tout circuit électronique repose en grande partie sur des milliers de composants appelés transistors (voir la section 11.8 du tome 3), qui, dans un contexte numérique, *ne sont utilisés que pour jouer le rôle d'interrupteurs*.

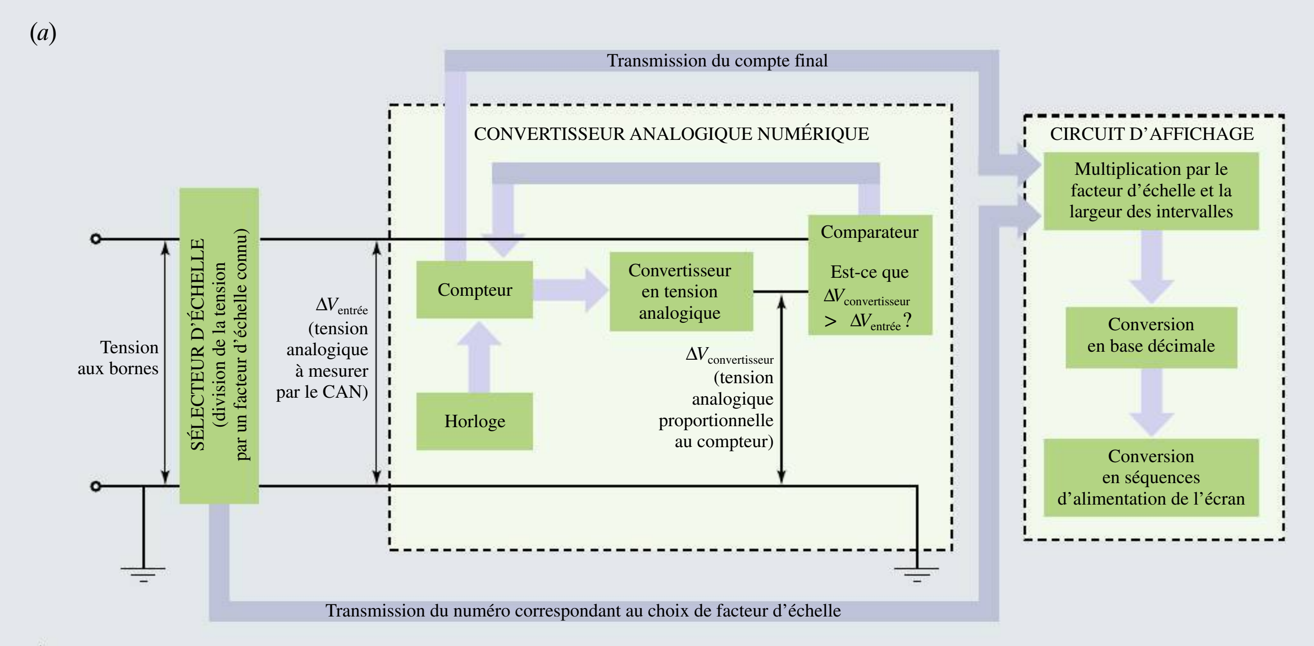
Les deux chiffres du système binaire, le 0 et le 1, sont appelés des *bits* (de l'anglais «*bi*nary digi*t*»). Quand on compte dans le système décimal, on augmente d'abord le chiffre des unités, qui passe graduellement de 0 à 9, puis on augmente le chiffre des dizaines de 1 et on recommence le défilement des unités, ce qui donne les nombres de 10 à 19, etc. Compter dans le système binaire se fait de la même façon, sauf qu'il n'y a que deux chiffres. Ainsi, les premiers nombres sont 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, etc. Pour simplifier la description du multimètre, nous exprimerons autant que possible les nombres en base décimale; par exemple, plutôt que d'écrire 110, nous dirons «le nombre 6 en binaire».

Le trajet de l'information dans un voltmètre

Fondamentalement, un multimètre analogique mesure un *courant*, alors qu'un multimètre numérique mesure une *différence de potentiel*. En effet, dans tous les instruments analogiques, la déviation de l'aiguille est causée par un courant, la déviation maximale correspondant à une valeur connue de courant (voir la section 7.6). Quand on conçoit un voltmètre analogique, il est obligatoire d'utiliser une combinaison de résistances qui fait passer par le mécanisme de déviation de l'aiguille un courant proportionnel à la différence de potentiel que l'on souhaite mesurer. Ainsi, on mesure en réalité un courant, même si l'échelle est graduée en volts. Dans un appareil de mesure numérique, c'est le contraire qui se produit: l'appareil utilise un circuit électronique pour mesurer une *différence de potentiel*. Si on souhaite mesurer un courant, l'appareil doit utiliser des résistances pour causer une différence de potentiel proportionnelle au courant que l'on souhaite mesurer. Comprendre comment fonctionne un *voltmètre* numérique est donc suffisant pour saisir l'ensemble du fonctionnement d'un multimètre, et nous allons donc nous concentrer sur cette fonction.

Un voltmètre numérique comporte trois parties essentielles (figure 7.50*a*). Pour bien illustrer le rôle de chacune de ces parties, nous allons décrire tout ce qui se produit lors d'une mesure simple. Imaginons qu'on tente de mesurer une tension de 4,012 V en utilisant l'échelle de 0-20 V de l'appareil.

(*a*)



▲ **Figure 7.50**

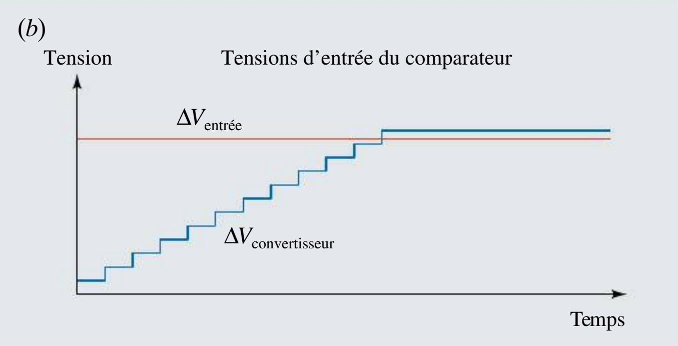
(*a*) Un voltmètre numérique comporte trois parties: la première divise la tension par un facteur connu pour qu'elle soit contenue dans une plage de 0 à 5 V; la seconde (le CAN) subdivise cette plage en petits intervalles et détermine auquel de ces intervalles appartient la tension d'entrée; et la troisième (le circuit d'affichage) effectue des calculs de conversion pour alimenter l'affichage frontal.

▶▶▶

La première partie de l'instrument est la même que dans un multimètre analogique, le *sélecteur d'échelle*. En appuyant sur un bouton pour choisir une échelle, l'utilisateur sélectionne une combinaison de résistances qui complète le circuit du sélecteur. Ces résistances sont reliées de façon à diviser la tension à mesurer d'un facteur d'échelle connu. De cette façon, la tension qui alimente la partie suivante du voltmètre est nécessairement contenue dans une plage fixe, par exemple de 0 à 5 V. (Si cette tension dépasse l'intervalle visé, un message d'erreur est affiché pour que l'utilisateur choisisse une autre échelle.) Dans notre exemple, la tension aux bornes est de 4,012 V, et l'utilisateur a choisi l'échelle 0-20 V. La combinaison de résistances choisie a donc pour effet de diviser par un facteur (20 V)/(5 V) = 4 la tension aux bornes du voltmètre, donc la tension d'entrée du circuit suivant est $\Delta V_{\text{entrée}}$ = 4,012/4 = 1,003V (ce qui est bel et bien entre 0 et 5 V).

Une fois convertie, la tension alimente la deuxième partie de l'instrument, soit le *convertisseur analogique-numérique* (CAN), qui est en quelque sorte le cœur du voltmètre. Le fonctionnement du CAN suppose que la plage fixe de valeurs que peut prendre la tension $\Delta V_{\text{entrée}}$ à l'entrée du CAN (0 à 5 V dans notre exemple) est subdivisée en un très grand nombre de petits intervalles réguliers, à chacun desquels un numéro en binaire est associé (par exemple, en ordre croissant). Pour un voltmètre donné, ces intervalles sont toujours les mêmes. Le rôle du CAN est de déterminer *lequel* de ces intervalles contient $\Delta V_{\text{entrée}}$, par exemple en vérifiant successivement chacun d'entre eux dans l'ordre. Supposons que notre CAN hypothétique utilise 1000 intervalles numérotés de 0 à 999 (en binaire), d'une largeur de (5 V)/1000 = 0,005 V chacun. La tension d'entrée du CAN étant de 1,003 V, c'est le 201e intervalle, numéroté 200, qui sera donc celui retenu comme pertinent par le CAN. En effet, il correspond aux tensions entre 1,000 et 1,005 V.

Pour déceler l'intervalle pertinent, le CAN peut fonctionner de différentes façons. Celle que nous décrirons, la plus simple, est illustrée dans l'encadré central de la figure 7.50*a* : ce CAN rudimentaire utilise un *compteur* réglé par une *horloge* fonctionnant grâce aux oscillations d'un cristal de quartz. Le compteur mémorise un nombre (en binaire) qui s'accroît d'une unité à chaque période de l'horloge. Pendant ce décompte, une tension proportionnelle au nombre mémorisé par le compteur est produite par un *convertisseur*. Enfin, le *comparateur* vérifie si la tension produite est plus faible que la tension d'entrée devant être mesurée (figure 7.50*b*). Comme le nombre mémorisé par le compteur croît, la tension produite par le convertisseur croît elle aussi (en bleu à la figure 7.50*b*). Dès que le comparateur constate qu'elle dépasse la tension d'entrée (en rouge à la figure 7.50*b*), il émet un signal qui met fin au décompte du compteur.

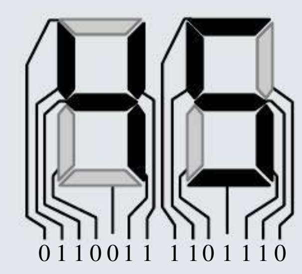


▲ **Figure 7.50 (*suite*)**

(*b*) Pour déterminer l'intervalle approprié, le CAN produit une tension qui croît au rythme de son compteur (en bleu) et compare la tension produite à la tension d'entrée. Le décompte est interrompu quand l'intervalle pertinent est atteint.

Celui-ci transmet alors au circuit d'affichage le dernier nombre qu'il avait atteint. En effet, comme le comptage a commencé à zéro, le nombre atteint correspond au numéro de l'intervalle qui comprend la tension d'entrée ! Dès que le numéro est transmis, le compteur peut recommencer son décompte à zéro en vue de la prochaine mesure*.

La troisième et dernière partie du voltmètre est le *circuit d'affichage*. Son rôle est de produire le signal approprié pour alimenter l'affichage des caractères numériques de l'écran frontal. Chacun de ces caractères comporte sept segments contrôlés chacun par la réception d'un bit (c'est-à-dire physiquement par la présence ou l'absence d'une tension contrôlée par un interrupteur) : selon que le bit reçu est 0 ou 1, ils deviennent transparents ou opaques (figure 7.51).



▲ **Figure 7.51**

Chacun des caractères numériques de l'affichage frontal comporte sept segments contrôlés chacun par la réception d'un bit : selon que le bit est 0 ou 1, ils deviennent transparents ou opaques. Pour afficher *un* chiffre de 0 à 9, il faut donc le convertir en une séquence de sept bits.

* Il est possible de concevoir un compteur décroissant. Dans notre exemple, le plus petit intervalle de tension aurait alors la valeur 999, et le plus élevé, la valeur 0. Tant que la conversion effectuée par le circuit d'affichage utilise la même convention que le compteur, cette approche est elle aussi tout à fait fonctionnelle. En fait, on peut aussi concevoir un compteur croissant-décroissant-croissant-décroissant qui *suit* les éventuelles variations de la tension d'entrée au lieu d'arrêter de compter et de recommencer au début à chaque mesure.

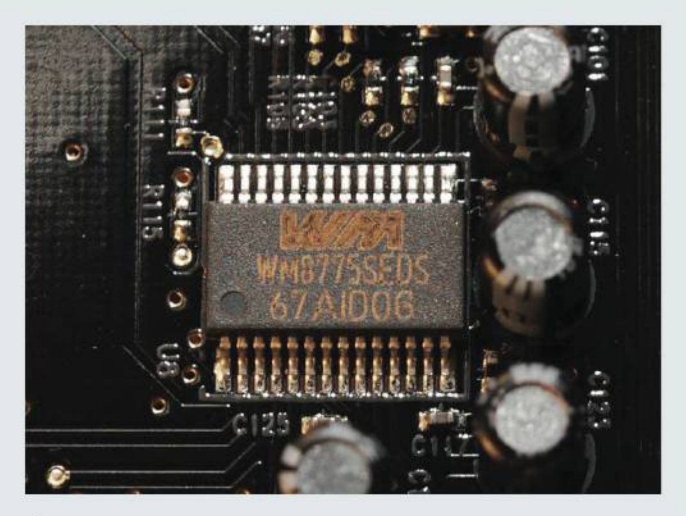
Pour produire ce signal, le circuit d'affichage effectue une série d'opérations qui s'apparentent à celles d'une simple calculatrice. Par exemple, le circuit d'affichage de notre voltmètre rudimentaire recevrait le numéro « 200 » du CAN, le multiplierait par 0,005 V pour obtenir $\Delta V_{\text{entrée}}$ (en binaire), le multiplierait par le facteur d'échelle de 4 pour obtenir la tension aux bornes, convertirait ensuite en base décimale, arrondirait à la décimale appropriée, puis, enfin, convertirait chaque chiffre en la séquence de sept bits nécessaire pour alimenter un des caractères de l'écran frontal. Contrairement au CAN, le circuit d'affichage ne fait donc *que des calculs*.

Un nouveau type de circuit

En examinant la figure 7.50*a*, on note que ce schéma est radicalement différent de ceux utilisés dans le chapitre 7 pour représenter des circuits. Une première différence, évidemment, est l'absence d'une grande partie des fils. Les seuls fils qui ont été illustrés sont ceux entre lesquels est établie une tension *analogique*. Tous les fils qui véhiculent un signal numérique n'ont pas été représentés et ont plutôt été remplacés par des flèches. Chaque flèche représente donc un groupe de fils possiblement complexe (par exemple, un fil pour chaque bit à transmettre), alimentés par une tension différente de celle mesurée par le voltmètre (non illustrée).

La deuxième différence importante est la façon dont les différentes parties du circuit s'influencent l'une l'autre. Il peut sembler bizarre, alors que nous venons d'étudier la méthode globale de Kirchhoff, que nous décrivions des portions de circuit qui produisent l'une sur l'autre un effet *dans un ordre déterminé*. Par exemple, d'après ce que nous venons de présenter, le courant circulant dans les fils du circuit d'affichage n'a pas le moindre effet sur celui circulant dans les fils du compteur (cela est clair même si ces fils ne sont pas représentés à la figure 7.50*a*). De même, chaque étape du calcul de conversion se fait par une portion particulière du circuit d'affichage. Cette séquence ordonnée découle du fonctionnement du circuit, qui repose sur des transistors jouant un rôle d'interrupteurs. Ainsi, le voltmètre en entier n'est pas fait d'un unique circuit, mais bien de plusieurs circuits successifs, *la tension de sortie d'un circuit ayant pour seul rôle de déterminer si l'interrupteur qui alimente le circuit suivant est ouvert ou fermé*.

Bien que ces deux aspects soient fondamentaux du point de vue physique, ils ne le sont pas pour comprendre le fonctionnement du voltmètre. Même l'ingénieur qui conçoit un tel circuit n'a pas à se soucier de tous les détails, car il peut se procurer, sous forme de circuits intégrés, des circuits complets comme celui d'un CAN (figure 7.52). Quand on se procure un tel circuit intégré, sa structure interne est inconnue, mais il est



▲ **Figure 7.52**

Pour quelques dollars, on peut se procurer un convertisseur analogique-numérique (CAN) sous la forme d'un circuit intégré. Connaître les entrées et les sorties d'un circuit intégré est suffisant pour l'utiliser, même si son fonctionnement interne n'est pas divulgué par le fabricant.

accompagné d'une fiche technique décrivant en détail les sorties produites pour diverses conditions d'entrée, c'est-à-dire quelle tension d'entrée fournir entre quelles *broches* de la puce pour obtenir une tension de sortie entre d'autres broches.

Quelques détails de plus

De nombreuses questions restent en suspens, mais décrire complètement la façon dont de simples interrupteurs permettent le fonctionnement de toutes les parties illustrées à la figure 7.50*a* nécessiterait le recours à un très grand nombre de notions. Nous nous attarderons à une unique question : comment de simples interrupteurs permettent-ils de retenir un nombre en mémoire comme le fait le compteur du CAN ? Pour répondre à cette question, nous devrons décrire quelques circuits simples, ce qui aidera à mieux visualiser le fonctionnement d'un circuit numérique en général.

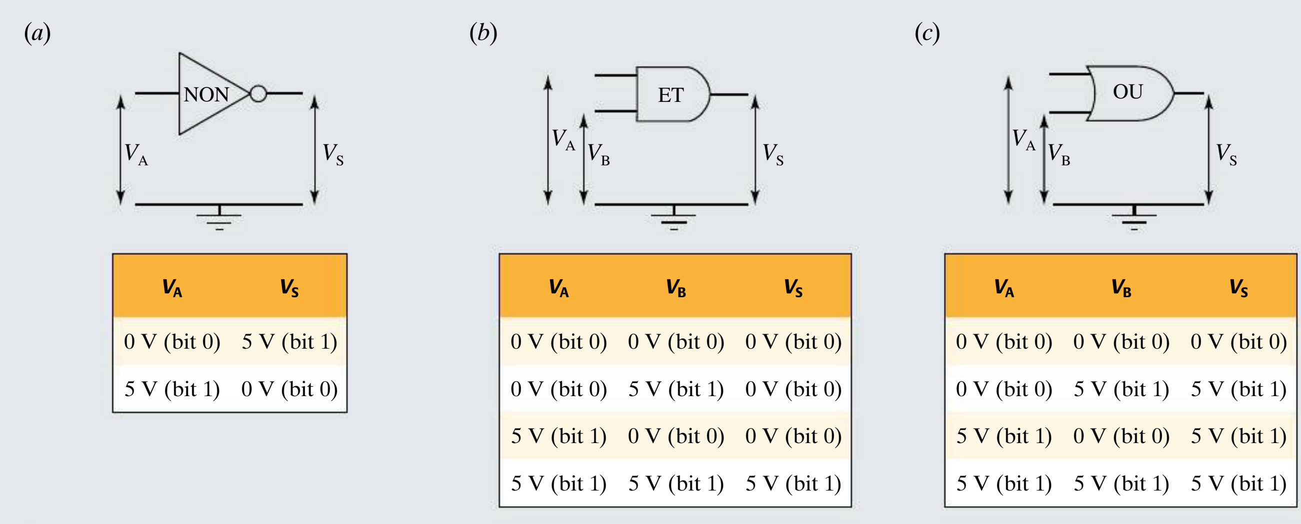
Chacun des circuits numériques comme le compteur ou les parties du circuit d'affichage sont faits de « morceaux de base » qu'on appelle des *portes logiques* et dont le rôle est d'effectuer des opérations élémentaires sur des bits. Par exemple, une porte NON a pour rôle d'inverser un bit, c'est-à-dire de produire la sortie 1 si elle reçoit le bit 0 et vice versa. Une porte ET reçoit plusieurs bits (habituellement deux) et ne produit la sortie 1 que si *tous* les bits reçus sont 1. Une porte OU produit la sortie 1 si *au moins un* des bits reçus est 1. Physiquement, un bit 0 est représenté par une tension de 0 V (entre la mise à la terre et la borne d'entrée d'une porte), et un bit 1, par une tension de 5 V (figure 7.53). (Il ne faut pas confondre ces tensions avec celle mesurée par le

►►►

voltmètre : elles ne servent qu'à représenter des bits, par exemple dans chacune des flèches grises à la figure 7.50*a*.)

Chaque porte logique forme, avec ce qui est relié à sa sortie, un circuit complet, alimenté par l'équivalent d'une pile de 5 V. En pratique, toutes les portes sont branchées, en parallèle, à la même alimentation et demeurent donc indépendantes, mais on n'illustre pas les fils de l'alimentation sur des schémas comme ceux des figures 7.53 ou 7.56. Les tensions d'entrée d'une porte ont pour seul rôle d'actionner des interrupteurs (figure 7.54) qui déterminent si la pile de 5 V est reliée aux bornes de sortie de la porte (ce qui représente le bit de sortie 1) ou non (ce qui représente le bit de sortie 0). Il n'y a donc *aucun* courant qui circule directement de l'entrée à la sortie. Par exemple, le circuit d'une porte logique NON est illustré à la figure 7.55 : si la tension d'entrée est de 5 V (bit 1), celle de sortie est de 0 V et vice versa, ce qui correspond bel et bien au comportement attendu d'une porte NON. On peut modifier facilement ce circuit pour fabriquer d'autres portes. Par exemple, en utilisant deux interrupteurs en série ou en parallèle, on peut faire des portes à deux entrées comme les portes ET et OU. On peut aussi faire d'autres types de portes. Par exemple, une porte NON-ET joue le même rôle qu'une porte ET en série avec une porte NON : elle ne produit le bit 0 que si tous les bits d'entrée sont 1, sinon elle produit le bit 1.

Pour comprendre comment des portes logiques peuvent être assemblées pour permettre à un circuit de mémoriser un bit, considérons premièrement un circuit formé de deux portes NON reliées en boucle (figure 7.56*a*). Si le signal d'entrée de la porte du haut correspond à un bit 1, elle émettra un bit 0. La porte du bas, recevant



(*a*)

V_A	V_S
0 V (bit 0)	5 V (bit 1)
5 V (bit 1)	0 V (bit 0)

(*b*)

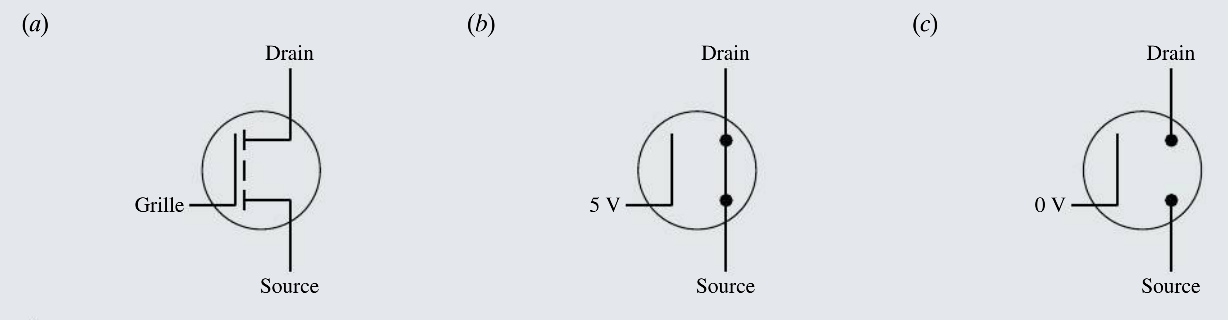
V_A	V_B	V_S
0 V (bit 0)	0 V (bit 0)	0 V (bit 0)
0 V (bit 0)	5 V (bit 1)	0 V (bit 0)
5 V (bit 1)	0 V (bit 0)	0 V (bit 0)
5 V (bit 1)	5 V (bit 1)	5 V (bit 1)

(*c*)

V_A	V_B	V_S
0 V (bit 0)	0 V (bit 0)	0 V (bit 0)
0 V (bit 0)	5 V (bit 1)	5 V (bit 1)
5 V (bit 1)	0 V (bit 0)	5 V (bit 1)
5 V (bit 1)	5 V (bit 1)	5 V (bit 1)

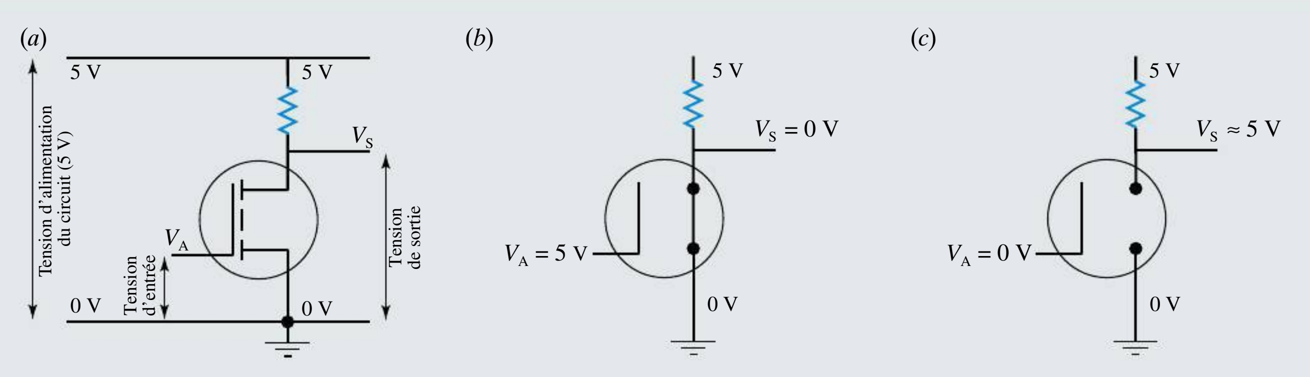
▲ **Figure 7.53**

Toutes les opérations sur des bits peuvent se décomposer en une succession d'opérations effectuées par seulement trois types de portes logiques. (*a*) La porte NON produit une tension qui représente le bit inverse de celui qu'elle reçoit. (*b*) La porte ET produit un bit 1 seulement si le bit A *et* le bit B sont 1. (*c*) La porte OU produit un bit 1 si au moins le bit A *ou* le bit B est 1.



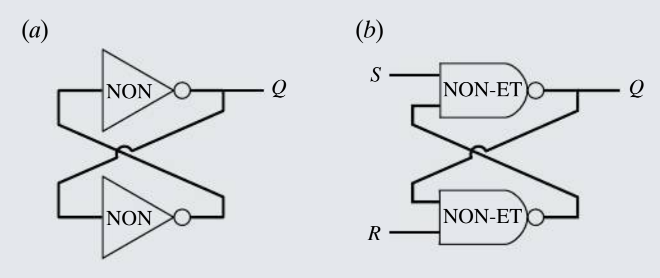
▲ **Figure 7.54**

Dans un circuit numérique, les transistors sont utilisés pour jouer uniquement le rôle d'interrupteurs. (*a*) Le symbole du transistor à effet de champ. Notez la présence de trois bornes : la grille est l'électrode de contrôle, qui détermine la résistance entre les deux autres bornes, appelées la source et le drain. La ligne hachurée représente ce possible canal conducteur. (*b*) Quand le potentiel de la grille est de 5 V par rapport à la source, le transistor est très conducteur (interrupteur fermé). (*c*) Quand le potentiel de la grille est de 5 V par rapport à la source, le transistor est très isolant (interrupteur ouvert).



▲ **Figure 7.55**

(*a*) Pour construire la porte NON illustrée à la figure 7.53*a*, on utilise un seul transistor, dont le seul rôle est de servir d'interrupteur. (*b*) Si le potentiel d'entrée est de 5 V (par rapport à la mise à la terre, donc par rapport à la source), le transistor se comporte comme un court-circuit, et la borne de sortie est mise à la terre. (*c*) Si le potentiel d'entrée est le même que celui de la mise à la terre, le transistor se comporte comme un interrupteur ouvert ; la borne de sortie est alors isolée de la mise à terre et se trouve approximativement à un potentiel de 5 V par rapport à celle-ci.



▲ **Figure 7.56**

Toute mémoire numérique repose sur l'utilisation d'une bascule pour stocker chaque bit. (*a*) Deux portes NON forment une bascule élémentaire dont il est impossible de changer le contenu Q. (*b*) Deux portes NON-ET se comportent de la même façon que deux portes NON tant que $S = R = 1$. Si S change d'état, le bit stocké devient $Q = 1$, et si R change d'état, il devient $Q = 0$.

ce bit 0, émettra donc un bit 1, et le cycle se reproduira, de telle sorte que le signal de sortie du circuit sera toujours $Q = 0$. (Notez que Q n'est pas une tension ou un potentiel, mais bien le bit que symbolise ce potentiel.) Le circuit peut conserver cet état de façon virtuellement éternelle : quelles que soient les pertes d'énergie dues à la résistance négligeable des fils reliant les deux portes, elles ne s'accumulent pas avec le temps, car la sortie d'une porte provient directement de la pile. En somme, le signal est « rafraîchi » chaque fois qu'il complète un cycle. Ainsi, ce circuit *garde en mémoire* un bit, c'est-à-dire le bit $Q = 0$ dans notre exemple.

Bien entendu, un tel circuit ne serait d'aucune utilité, car la valeur de Q ne peut être modifiée une fois qu'elle est fixée. Toutefois, si on remplace les deux portes NON par deux portes NON-ET (figure 7.56*b*), il devient possible de choisir le bit à garder en mémoire. En effet, tant que les entrées S et R demeurent toutes deux 1, la relation entre l'autre entrée d'une des portes et sa sortie est la même que celle d'une porte NON. Le circuit conserve donc en mémoire la valeur de Q. Toutefois, si l'entrée S devient 0, la sortie de la porte du haut (qui correspond à Q) devient alors 1 peu importe ce qu'était l'état précédent du circuit. Même si S cesse d'être 0, le circuit restera dans l'état $Q = 1$. À l'inverse, si c'est plutôt l'entrée R qui devient 0, alors la sortie de la porte du haut deviendra 1, peu importe ce qu'était l'état initial du circuit. Même si R cesse d'être 0, le circuit restera dans l'état $Q = 0$. Les entrées S et R permettent donc respectivement de fixer Q à 1 (opération « *set* ») ou de fixer Q à 0 (opération « *reset* »). Ce type de circuit formé de deux portes NON-ET et de deux entrées est appelé une *bascule* et est *à la base de nombreux circuits de mémoire, notamment ceux des microprocesseurs en informatique*. En effet, si on utilise huit bascules, on peut mémoriser un octet, c'est-à-dire un nombre de huit bits qui représente un caractère alphanumérique.

Les bascules que comporte le compteur du CAN de notre voltmètre sont nécessairement plus complexes, notamment parce qu'elles ne doivent changer d'état qu'au moment dicté par le signal d'horloge. Chacune de ces bascules comporte en réalité une dizaine de portes logiques. Si le compteur, par exemple, comporte dix bascules, alors il peut retenir un nombre de dix chiffres en binaire (dix bits). Le nombre d'intervalles avec lequel le CAN fonctionnera sera donc de $2^{10} = 1024$, ce qui est très proche de l'exemple que nous avons donné. Il est impressionnant de réaliser que le voltmètre que nous avons décrit, pourtant beaucoup plus simple qu'un ordinateur, utilise quelque 300 transistors uniquement dans son compteur et effectue plusieurs milliers d'opérations logiques pour chacun des affichages sur son écran frontal !

RÉSUMÉ



Une source de f.é.m. convertit une certaine forme d'énergie en énergie potentielle électrique. La *f.é.m.* est définie comme le travail effectué par unité de charge lors du déplacement des charges dans une boucle fermée :

$$\mathscr{E} = \frac{W_{\text{né}}}{q} \tag{7.1}$$

L'indice « né » signifie que le travail est effectué par un mécanisme non électrostatique. Lorsqu'une pile réelle produit un courant I, la différence de potentiel entre ses bornes est

$$\Delta V = \mathscr{E} - rI \tag{7.2a}$$

r étant la résistance interne de la pile. Si la pile est en train de se recharger, $\Delta V = \mathscr{E} + rI$. On voit facilement que $\Delta V = \mathscr{E}$ si $I = 0$ ou si $r = 0$. On peut donc mesurer la f.é.m. d'une pile à l'aide de la différence de potentiel en « circuit ouvert ».

Les résistances peuvent être reliées en série ou en parallèle. Dans chacun de ces cas, respectivement, la résistance équivalente est

(en série) $$R_{\text{éq}} = R_1 + R_2 + R_3 \ldots + R_N \tag{7.3}$$

(en parallèle) $$\frac{1}{R_{\text{éq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_N} \tag{7.4}$$

En général, un circuit comporte un courant différent dans chacune de ses branches. Tout circuit peut être analysé à partir des deux lois de Kirchhoff, dont l'énoncé est le suivant :

(loi des nœuds) $$\sum I = 0 \tag{7.5}$$

En un nœud du circuit, la somme algébrique des courants qui entrent et qui sortent est nulle, ou encore, le courant pénétrant dans un nœud doit être égal au courant qui en sort. La loi des nœuds découle de la conservation de la charge :

(loi des mailles) $$\sum \Delta V = 0 \tag{7.6}$$

La somme algébrique des *variations* de potentiel aux bornes des éléments le long d'une maille fermée est nulle. La loi des mailles découle de la conservation de l'énergie.

Il ne faut pas oublier que le courant circule dans le sens du potentiel décroissant. Lorsqu'on parcourt une résistance dans le sens du courant, la variation de potentiel est donc négative. Elle est positive si l'on parcourt la résistance dans le sens contraire au courant. Lorsqu'on traverse une source de f.é.m., le signe de la variation *ne dépend pas* du sens du courant.

Une résistance détermine le taux de charge ou de décharge d'un condensateur. Pour des circuits comportant un condensateur C et une résistance R, les équations correspondant à la décharge et à la charge sont les suivantes :

décharge $Q(t) = Q_0 e^{-t/RC}$ (7.8*a*) $I(t) = I_0 e^{-t/RC}$ (7.9) $\Delta V_C = \Delta V_R$

charge $Q(t) = Q_{\max}(1 - e^{-t/RC})$ (7.12*a*) $I(t) = I_0 e^{-t/RC}$ (7.13) $\Delta V_C + \Delta V_R = \mathscr{E}$

La demi-vie $T_{1/2}$ de la charge et de la décharge s'exprime par

$$T_{1/2} = RC \ln 2 \tag{7.11}$$

TERMES IMPORTANTS

ampèremètre (p. 260)
association en parallèle (p. 251)
association en série (p. 251)
branche (p. 268)
constante de temps (p. 277)
courant continu (c.c.) (p. 245)
court-circuit (p. 252)
demi-vie (p. 277)
f.é.m. (p. 247)
loi des mailles de Kirchhoff (p. 269)
loi des nœuds de Kirchhoff (p. 268)
maille (p. 268)
nœud (p. 268)
ohmmètre (p. 260)
pile réelle (p. 249)
voltmètre (p. 260)

RÉVISION

R1. Vrai ou faux ? Dans un circuit simple constitué d'une pile et d'une résistance, le courant est plus élevé avant le passage de la résistance et il chute après.

R2. Décrivez le fonctionnement d'une cellule plomb-acide munie d'une électrode de plomb et d'une autre de dioxyde de plomb (PbO_2) plongées dans une solution aqueuse d'acide sulfurique (H_2SO_4).

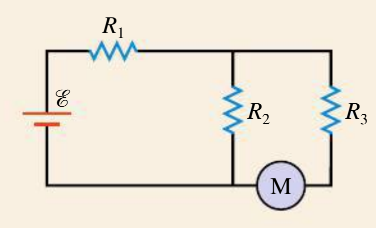
R3. Si on branche une résistance variable R aux bornes d'une pile réelle et qu'on diminue progressivement la résistance, ΔV va-t-elle augmenter ou diminuer ? Expliquez pourquoi.

R4. Soit deux résistances en série. Vrai ou faux ? (a) Le courant dans chacune des résistances est toujours le même ; (b) la différence de potentiel aux bornes de chacune des résistances est toujours la même.

R5. Soit deux résistances en parallèle. Vrai ou faux ? (a) le courant dans chacune des résistances est toujours le même ; (b) la différence de potentiel aux bornes de chacune des résistances est toujours la même.

R6. Énoncez les règles à suivre pour redessiner un circuit.

R7. Soit le circuit de la figure 7.57. D'après l'endroit où le multimètre M est placé, il ne devrait être que dans *un* des modes ampèremètre, voltmètre ou ohmmètre ; lequel ? (b) À quoi correspond la valeur lue au multimètre dans ce cas ? (c) Expliquez ce qui se passe si on règle le multimètre dans chacun des deux modes qui ne sont *pas* adéquats.



▲ **Figure 7.57**
Quel rôle joue ce multimètre ?

R8. Dans le circuit de la figure 7.57, montrez comment vous devez brancher le multimètre pour mesurer (a) la différence de potentiel aux bornes de R_1 ; (b) le courant qui traverse R_1 ; (c) la valeur de la résistance R_1.

R9. Pourquoi est-il impossible de mesurer la résistance interne d'une pile à l'aide d'un ohmmètre ?

R10. Énoncez les règles à appliquer pour déterminer les signes des ΔV dans la loi des mailles.

R11. Vrai ou faux ? Dans la méthode globale de Kirchhoff, il y a en général autant d'inconnues que de nœuds.

R12. Vrai ou faux ? La valeur du temps de demi-vie est la même, qu'il s'agisse de la charge ou de la décharge d'un condensateur.

R13. Vrai ou faux ? L'expression donnant la valeur du courant en fonction du temps est la même, qu'il s'agisse de la charge ou de la décharge d'un condensateur.

R14. Expliquez pourquoi la différence de potentiel aux bornes d'un condensateur qui se charge varie plus rapidement au début du processus qu'à la fin.

QUESTIONS

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

Q1. Lorsqu'elles fonctionnent séparément, deux ampoules ont respectivement une puissance de 25 W et de 100 W. Quelle ampoule est la plus proche de sa luminosité normale lorsqu'elles sont reliées en série ?

Q2. À quoi sert un fusible ? Sa fonction dans un circuit de câblage domestique est-elle différente de celle qu'il a dans un circuit électronique ou de haut-parleur ?

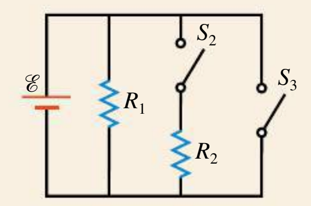
Q3. (a) La loi des mailles de Kirchhoff serait-elle valable si le tracé de la maille traversait une couche d'air ? (b) D'après votre réponse, quelle conclusion pouvez-vous tirer concernant le champ électrique dans l'espace entourant un circuit ?

Q4. Soit deux résistances, R_1 et R_2, avec $R_2 > R_1$. Pour une pile de différence de potentiel donnée, dans quelle résistance la puissance dissipée est-elle la plus grande lorsqu'elles sont reliées : (a) en série ; (b) en parallèle ?

Q5. (a) Expliquez la différence entre une pile réelle et une différence de potentiel. (b) Toutes les différences de potentiel sont-elles créées par des piles réelles ? Expliquez.

Q6. Huit piles de type D reliées en série donnent une différence de potentiel de 12 V. Ce montage peut-il être utilisé pour faire démarrer une automobile ? Justifiez votre réponse.

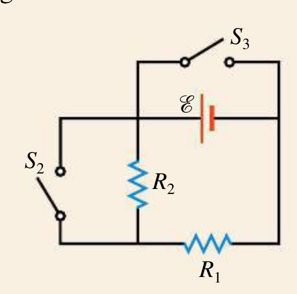
Q7. La figure 7.58 représente deux résistances reliées à une source de f.é.m. Initialement, les interrupteurs S_2 et S_3 sont ouverts. Comment varie le courant circulant dans R_1 lorsque : (a) S_2 est fermé, S_3 est ouvert ; (b) S_3 est fermé, S_2 est ouvert ?



▲ **Figure 7.58**

Question 7.

Q8. Reprenez la question Q7 pour le circuit représenté à la figure 7.59.



▲ **Figure 7.59**

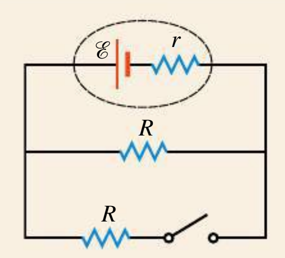
Question 8.

Q9. Une pile réelle de f.é.m. ℰ et de résistance interne r est reliée à deux résistances (figure 7.60). L'interrupteur est initialement ouvert. Lorsque l'interrupteur est fermé, la différence de potentiel aux bornes de la pile réelle augmente-t-elle ou diminue-t-elle ?

Q10. Décrivez comment vous pouvez mesurer la résistance interne d'une pile.

Q11. Le circuit de la figure 7.61 est composé d'une source idéale de f.é.m., d'une résistance et de deux interrupteurs.

(a) Si S_1 est fermé et S_2 est ouvert, quelles sont les différences de potentiel aux bornes de R et entre les contacts de S_2 ?



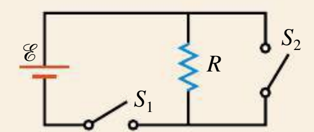
▲ **Figure 7.60**

Question 9.

(b) Si S_1 est ouvert et S_2 est fermé, quelles sont les différences de potentiel aux bornes de R et entre les contacts de S_1 ?

(c) Si S_1 et S_2 sont tous les deux fermés, quelle est la différence de potentiel aux bornes de R ?

(d) Si S_1 et S_2 sont tous les deux ouverts, quelles sont les différences de potentiel aux bornes de R et entre les contacts de S_1 et S_2 ?



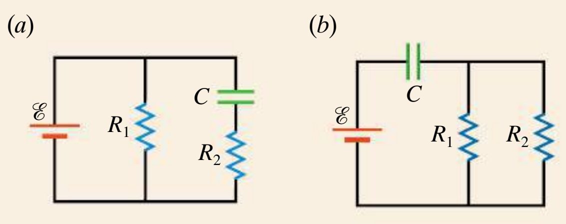
▲ **Figure 7.61**

Question 11.

Q12. Quels sont les avantages du pont de Wheatstone par rapport à d'autres méthodes de mesure de la résistance ? Quels sont les facteurs qui influent sur la précision ?

Q13. Comment pouvez-vous modifier le potentiomètre pour mesurer des f.é.m. très inférieures à $\mathscr{E}_s$, qui est la f.é.m. de la source étalon ?

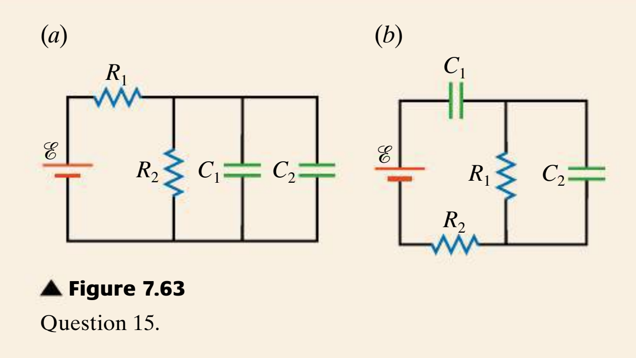
Q14. On suppose que les circuits de la figure 7.62 ont atteint le régime permanent. On donne ℰ = 10 V, R_1 = 5 Ω, R_2 = 10 Ω et C = 40 μF. Quelle est la différence de potentiel aux bornes des résistances et du condensateur (a) pour la figure 7.62*a* ; (b) pour la figure 7.62*b* ?



▲ **Figure 7.62**

Question 14.

Q15. Les circuits de la figure 7.63 ont atteint le régime permanent. Trouvez la différence de potentiel aux bornes de chaque résistance et de chaque condensateur pour (a) la figure 7.63*a* ; (b) la figure 7.63*b*. On donne ℰ = 12 V, R_1 = 2 Ω, R_2 = 3 Ω, C_1 = 6 μF et C_2 = 3 μF.



▲ **Figure 7.63**

Question 15.

Q16. Lors d'une défibrillation, pourquoi est-ce important que la peau du patient soit sèche ?

Q17. Comment peut-on utiliser un tournevis pour décharger un condensateur ?

Q18. Les deux bornes d'un condensateur chargé à 200 V entrent en contact avec votre peau. Que se passe-t-il ensuite ? Comment l'effet produit différerait-il si le condensateur était plutôt une source de f.é.m. constante de 200 V ?

EXERCICES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

7.1 F.é.m.

E1. (I) Une pile réelle a une f.é.m. $\mathscr{E}$ et une résistance interne r. Elle est reliée à une résistance externe R. Lorsque $R = 4\ \Omega$, la différence de potentiel aux bornes de la pile est de 9,5 V, et si $R = 6\ \Omega$, elle est de 10 V. Trouvez $\mathscr{E}$ et r.

E2. (I) La différence de potentiel aux bornes d'une batterie d'automobile est de 12,4 V lorsqu'elle n'est pas reliée à un circuit. Cette différence de potentiel chute à 11,2 V lorsque la pile est branchée au moteur du démarreur et que l'ensemble est parcouru d'un courant de 80 A. Quelle est la résistance interne de la batterie ?

E3. (I) Une pile réelle est reliée aux bornes d'une résistance externe variable R. Lorsque le courant est égal à 6 A, la différence de potentiel aux bornes de la pile réelle vaut 8,4 V. Lorsque le courant vaut 8 A, cette différence de potentiel est de 7,2 V. Trouvez la f.é.m. et la résistance interne de la pile réelle.

E4. (I) Une source de f.é.m. idéale est reliée à une résistance externe. Lorsqu'on insère une autre résistance de 2 Ω en série avec la première, le courant chute de 8 A à 6 A. Trouvez la valeur de la résistance et la f.é.m. de la pile.

E5. (I) Une pile réelle de f.é.m. $\mathscr{E} = 16$ V fournit 50 W à une résistance externe de 4 Ω. (a) Trouvez la résistance interne de la pile. (b) Pour quelle valeur de la résistance externe la puissance fournie serait-elle de 100 W ?

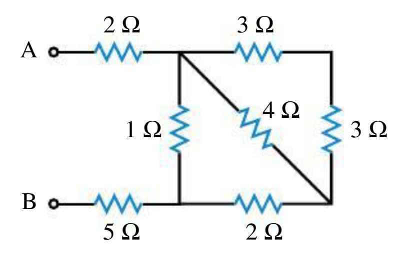
E6. (I) Une pile réelle de f.é.m. $\mathscr{E} = 12{,}4$ V dont la résistance interne vaut 0,05 Ω est chargée par une source de f.é.m. externe idéale de 14,2 V. Trouvez: (a) la puissance qui se dissipe sous forme de chaleur dans le circuit; (b) la puissance électrique qui est convertie en puissance chimique dans la pile.

E7. (I) Lorsqu'une pile réelle de f.é.m. 12 V fournit 50 W à une résistance externe, la différence de potentiel aux bornes de la pile est à 11,2 V. Trouvez la résistance interne de la pile.

E8. (II) Soit une pile réelle dont la f.é.m. est de 10 V et la résistance interne de 1 Ω. Lorsqu'elle est reliée à une résistance externe R, la puissance dissipée dans R est P. (a) Trouvez R dans le cas où lorsque R augmente de 50 %, P augmente de 25 %. (b) Trouvez R dans le cas où lorsque R augmente de 50 %, P diminue de 25 %.

7.2 Résistances en série et en parallèle

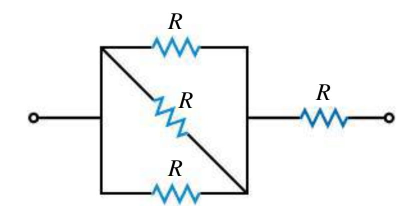
E9. MonLab (I) (a) Trouvez la résistance équivalente à l'association de résistances représentée à la figure 7.64. (b) Si une différence de potentiel de 10 V est appliquée entre les points A et B, trouvez la différence de potentiel aux bornes de la résistance de 4 Ω.



▲ **Figure 7.64**

Exercice 9.

E10. (I) La résistance équivalente à l'association représentée à la figure 7.65 est égale à 16 Ω. Que vaut R ?



▲ **Figure 7.65**

Exercice 10.

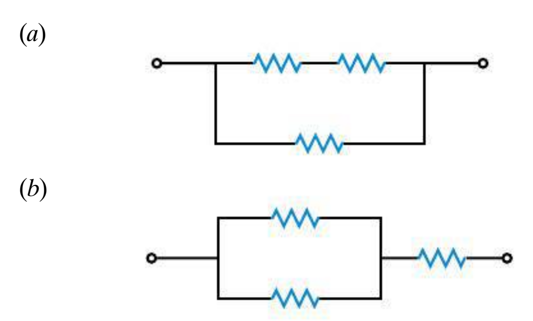
E11. (I) On donne trois résistances de valeur 2 Ω, 3 Ω et 4 Ω ; combien de résistances équivalentes différentes peut-on produire avec ces résistances ? Indiquez les valeurs.

E12. (I) Indiquez deux manières d'associer quatre résistances égales de valeur R pour obtenir une résistance équivalente R.

E13. (I) On veut produire les valeurs entières de résistance allant de 1 Ω à 10 Ω par l'association d'un nombre minimal de résistances identiques. Combien de résistances sont nécessaires et quelle valeur prend chacune d'elles ? La solution au problème est-elle unique ?

E14. (I) Pour des raisons liées à la géométrie d'une résistance et au matériau qui la constitue, et pour éviter qu'elle ne « grille », on fixe la valeur maximale du courant pouvant la traverser, ce qui détermine sa puissance maximale. Étant donné trois résistances de 5 Ω et de puissance maximale 10 W, trouvez la différence de potentiel maximale qui peut être appliquée à l'ensemble si elles sont reliées (a) toutes en série ; (b) comme sur la figure 7.66*a*.

E15. MonLab (I) Étant donné trois résistances de 4 Ω de puissance maximale égale à 20 W, trouvez la différence de potentiel maximale qui peut être appliquée à l'ensemble si elles sont reliées (a) toutes en parallèle ; (b) comme sur la figure 7.66*b*.

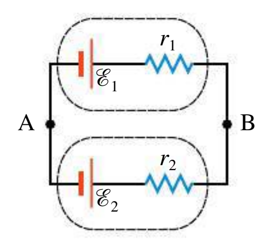


▲ **Figure 7.66**

Exercices 14 et 15.

7.4 Lois de Kirchhoff

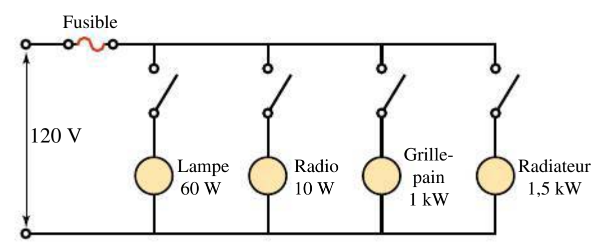
E16. (I) Deux piles réelles sont reliées l'une à l'autre comme à la figure 7.67. On donne $\mathscr{E}_1 = 1{,}53$ V, $r_1 = 0{,}05$ Ω, $\mathscr{E}_2 = 1{,}48$ V et $r_2 = 0{,}15$ Ω. Trouvez la différence de potentiel entre A et B et la puissance qui se dissipe sous forme de chaleur dans le circuit.



▲ **Figure 7.67**

Exercice 16 et problème 15.

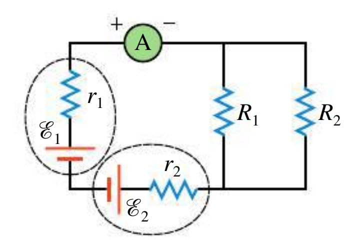
E17. (I) Le circuit électrique d'une résidence peut ressembler à celui de la figure 7.68, où l'on affiche la puissance dissipée dans chaque appareil, lorsqu'un courant le traverse. Calculez le courant circulant dans chaque dispositif. (Puisque le courant maximal autorisé pour un fil de cuivre de calibre 14 couramment utilisé dans les câblages domestiques est égal à 15 A, le radiateur devrait être dans un circuit séparé.)



▲ **Figure 7.68**

Exercice 17.

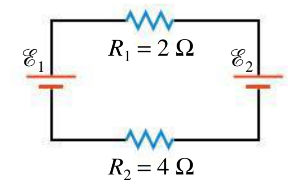
E18. MonLab (I) Dans le circuit représenté à la figure 7.69, $\mathscr{E}_1 = 12$ V, $\mathscr{E}_2 = 6$ V, $R_1 = 3$ Ω, $r_1 = r_2 = 1$ Ω. Le potentiel à la borne de l'ampèremètre identifiée par un + est plus élevé que le potentiel à la borne identifiée par un –. Le courant circulant dans l'ampèremètre est égal à 2 A. Trouvez : (a) R_2 ; (b) la puissance dissipée dans R_1 et R_2 ; (c) la différence de potentiel aux bornes de chaque pile réelle ; (d) la puissance fournie par chaque pile.



▲ **Figure 7.69**

Exercice 18.

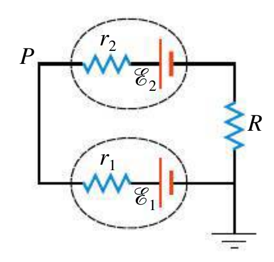
E19. (I) Deux f.é.m. idéales sont reliées en série avec deux résistances (figure 7.70). On donne $\mathscr{E}_1 = 9$ V, $\mathscr{E}_2 = 6$ V. Trouvez : (a) le courant dans le circuit ; (b) la puissance dissipée dans chaque résistance ; (c) la puissance fournie par chaque pile.



▲ **Figure 7.70**

Exercice 19.

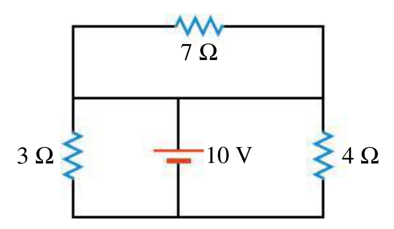
E20. (I) Dans le circuit représenté à la figure 7.71, l'un des points est relié à la terre (0 V). On donne $\mathscr{E}_1 = 5$ V, $\mathscr{E}_2 = 9{,}5$ V, $r_1 = 1\ \Omega$, $r_2 = 2\ \Omega$, $R = 1{,}5\ \Omega$. (a) Quel est le potentiel au point P ? (b) Quelle est la différence de potentiel aux bornes de chaque pile réelle ? (c) Trouvez la puissance dissipée dans R.



▲ **Figure 7.71**

Exercice 20.

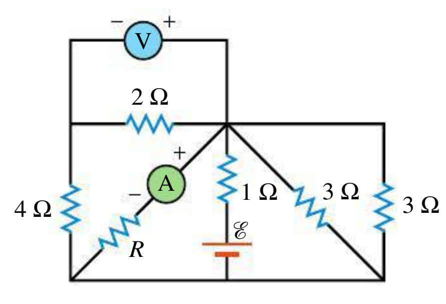
E21. MonLab (I) Une f.é.m. idéale est reliée à trois résistances (figure 7.72). Trouvez le courant dans chaque résistance.



▲ **Figure 7.72**

Exercice 21.

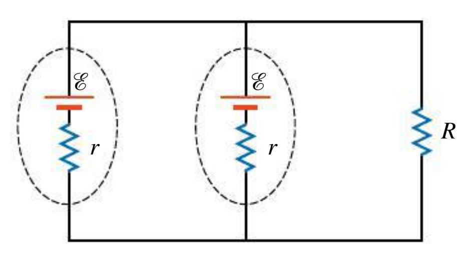
E22. MonLab (II) Dans le circuit de la figure 7.73, l'ampèremètre indique 2 A et le voltmètre indique 4 V. Trouvez la f.é.m. $\mathscr{E}$ et la résistance R. Le potentiel à la borne des appareils de mesure identifiée par un + est plus élevé que le potentiel à la borne identifiée par un –.



▲ **Figure 7.73**

Exercice 22.

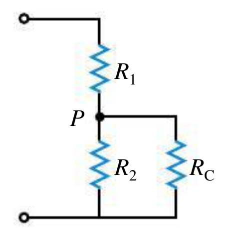
E23. (II) Deux piles de même f.é.m. $\mathscr{E}$ et de résistance interne r sont en parallèle avec une résistance R (figure 7.74). (a) Pour quelle valeur de R la puissance qui se dissipe sous forme de chaleur dans R est-elle maximale ? (b) Dans le cas où $r = 1\ \Omega$ et $\mathscr{E} = 1$ V, tracez le graphe de la puissance qui se dissipe sous forme de chaleur dans R en fonction de R, sur un intervalle incluant la réponse à la question (a). Le résultat de la question (a) se confirme-t-il graphiquement ?



▲ **Figure 7.74**

Exercice 23.

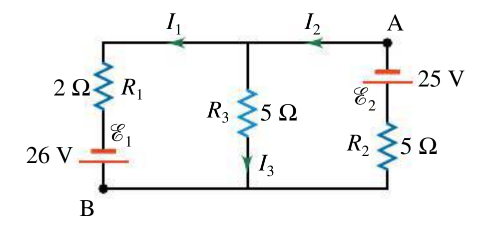
E24. (II) Une différence de potentiel est appliquée aux bornes des résistances R_1 et R_2 de la figure 7.75. R_C est une résistance de « charge ». Pour quelle valeur de R_C la puissance dissipée dans R_C est-elle maximale ?



▲ **Figure 7.75**

Exercices 24 et 48.

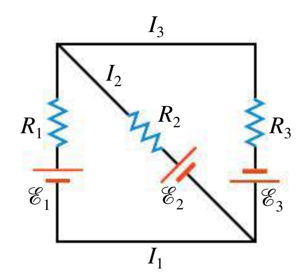
E25. MonLab (II) Pour le circuit représenté à la figure 7.76, trouvez : (a) le courant et la différence de potentiel pour chaque résistance ; (b) la différence de potentiel $V_A - V_B$ (les directions données aux courants dans la figure sont arbitraires). (c) Vérifiez que la puissance nette fournie par les piles est bien entièrement transformée en chaleur dans les résistances.



▲ **Figure 7.76**

Exercice 25.

E26. (II) (a) Pour le circuit représenté à la figure 7.77, trouvez le courant et la différence de potentiel pour chaque résistance. On donne $R_1 = R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, $\mathscr{E}_1 = 12$ V, $\mathscr{E}_2 = 8$ V et $\mathscr{E}_3 = 6$ V. (b) Vérifiez que la



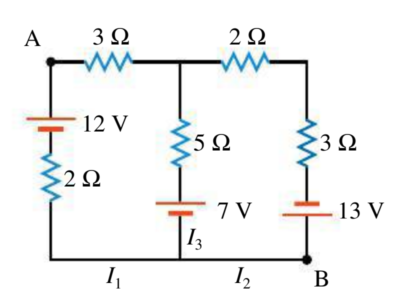
▲ **Figure 7.77**

Exercices 26 et 27.

puissance nette fournie par les piles est bien entièrement transformée en chaleur dans les résistances.

E27. (II) (a) Pour le circuit représenté à la figure 7.77, trouvez le courant et la différence de potentiel pour chaque résistance. On donne : $R_1 = 4\ \Omega$, $R_2 = R_3 = 3\ \Omega$, $\mathscr{E}_1 = 12$ V, $\mathscr{E}_2 = 7$ V et $\mathscr{E}_3 = 5$ V. (b) Vérifiez que la puissance nette fournie par les piles est bien entièrement transformée en chaleur dans les résistances.

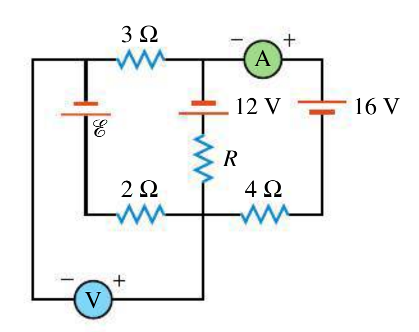
E28. MonLab (II) Pour le circuit de la figure 7.78, trouvez les courants dans les trois branches. Quelle est la différence de potentiel $V_A - V_B$?



▲ **Figure 7.78**

Exercice 28.

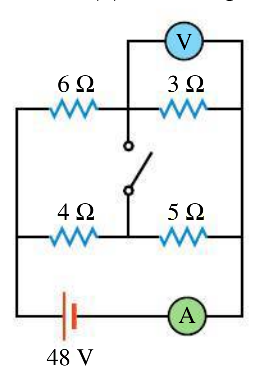
E29. MonLab (II) Dans le circuit de la figure 7.79, l'ampèremètre indique 6,0 A et le voltmètre 14 V. Trouvez la f.é.m. $\mathscr{E}$ et la résistance R. Le potentiel à la borne des appareils de mesure identifiée par un + est plus élevé que le potentiel à la borne identifiée par un –.



▲ **Figure 7.79**

Exercice 29.

E30. (II) Quelles sont les valeurs indiquées par l'ampèremètre et le voltmètre de la figure 7.80 lorsque (a) l'interrupteur est ouvert ; (b) l'interrupteur est fermé ?

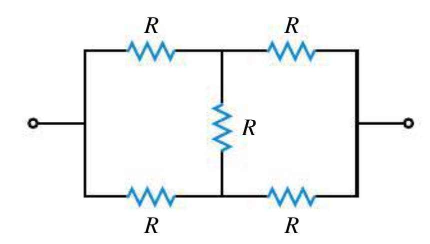


▲ **Figure 7.80**

Exercice 30.

E31. (II) Lorsque deux résistances R_1 et R_2 sont reliées en parallèle, elles dissipent quatre fois la puissance qu'elles dissiperaient si elles étaient en série avec la même source idéale de f.é.m. Si $R_1 = 3\ \Omega$, trouvez R_2.

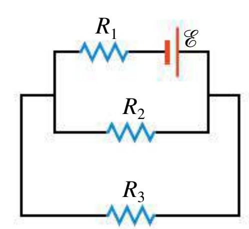
E32. (I) On considère les résistances de la figure 7.81. Le montage qu'elles forment n'est ni en série ni en parallèle. (a) Lorsqu'une différence de potentiel ΔV est appliquée aux bornes du montage, quelle est la différence de potentiel aux bornes de chaque résistance ? (b) Quelle est la résistance équivalente du montage ?



▲ **Figure 7.81**

Exercice 32.

E33. (II) Dans le circuit de la figure 7.82, on donne $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 4\ \Omega$, $R_3 = 2\ \Omega$. (a) Quelle f.é.m. idéale $\mathscr{E}$ va fournir 6 W à R_3 ? (b) Évaluez la puissance qui se dissipe sous forme de chaleur dans les autres résistances.



▲ **Figure 7.82**

Exercice 33.

E34. (I) Dans le circuit représenté à la figure 7.83, déterminez : (a) les valeurs des f.é.m. ; (b) la différence de potentiel $V_B - V_A$.

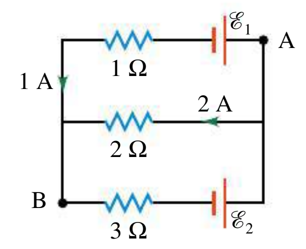


Figure 7.83
Exercice 34.

7.5 Circuits *RC*

E35. (I) Un condensateur de capacité 0,01 μF est chargé par une source de f.é.m. idéale. Une fois la charge complétée, on débranche la source et on relie ce condensateur à une résistance pour qu'il se décharge. Sa charge chute alors à 25 % de sa valeur initiale en 2 ms. Quelle est la valeur de la résistance ?

E36. (I) Quelle est la constante de temps pour l'association représentée à la figure 7.84 ?

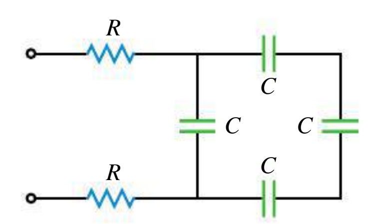


Figure 7.84
Exercice 36.

E37. (I) On forme un circuit d'une seule maille avec une pile, une résistance et un condensateur, où $R = 10^4$ Ω. Si la charge sur C augmente de 0 à 90 % de sa valeur finale en 2 s, trouvez la valeur de C.

E38. (I) On forme un circuit d'une seule maille avec une pile, une résistance et un condensateur tels que $\mathscr{E} = 200$ V, $R = 2 \times 10^5$ Ω, $C = 50$ μF et $Q = 0$ à $t = 0$. Trouvez : (a) la différence de potentiel aux bornes de C après une constante de temps ; (b) la différence de potentiel aux bornes de R après une constante de temps ; (c) l'énergie emmagasinée dans C au bout de 5 s ; (d) la puissance dissipée dans R à 5 s.

E39. MonLab (II) Un condensateur est relié à une résistance. On donne $R = 2{,}5 \times 10^4$ Ω et $C = 40$ μF. La différence de potentiel initiale aux bornes de C est égale à 25 V. Trouvez : (a) la charge sur C et le courant circulant dans R lorsque $t = \tau = RC$; (b) l'énergie emmagasinée dans C lorsque $t = \tau = RC$; (c) la puissance qui se dissipe sous forme de chaleur dans R à 0,5 s ; (d) le taux de perte d'énergie (dU/dt) de C à 0,5 s. (e) En vous servant de l'équation 7.8*a*, tracez le graphe de $Q(t)$ pour un intervalle de t allant de 0 à 8τ. Est-il facile d'observer sur le graphe le fait que la charge n'est pas tout à fait nulle à la fin de cet intervalle ? (f) Quel multiple entier de la constante de temps faut-il pour que la charge du condensateur devienne inférieure à celle d'un électron ?

E40. (II) On forme un circuit d'une seule maille avec une pile, une résistance et un condensateur. (a) À l'instant initial, quel est le taux d'augmentation de la charge (dQ/dt) sur le condensateur, sachant que $Q = 0$ à $t = 0$? (b) Si ce taux était constant, combien de temps faudrait-il au condensateur pour atteindre sa charge maximale ?

E41. MonLab (II) Un condensateur initialement chargé est relié à une résistance. Le courant chute à 10 % de la valeur initiale en 5 s. (a) Combien de temps met-il pour chuter à 50 % ? (b) Exprimez le courant circulant à 10 s sous forme d'un pourcentage du courant initial.

E42. (I) L'espace entre les plaques d'un condensateur est rempli d'air et sa capacité est de 250 pF. Il est en série avec une résistance de 2×10^6 Ω et une pile. On remplit l'espace entre les armatures avec un matériau de constante diélectrique κ. Lorsqu'on ferme l'interrupteur, le courant chute à 5 % de sa valeur initiale en 0,02 s. Quelle est la constante diélectrique ? (On suppose qu'il n'y a pas de fuites de courant dans le matériau.)

E43. (II) Le circuit de la figure 7.85 comprend un condensateur. (a) Quel est le courant dans chaque résistance lorsque le régime permanent s'est établi ? (b) Quelle est la charge du condensateur ?

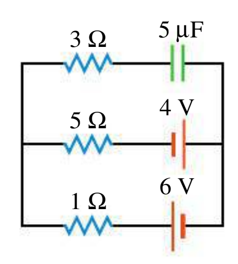
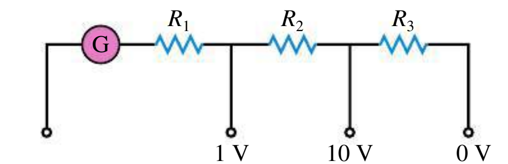


Figure 7.85
Exercice 43.

7.6 Utilisation du galvanomètre

E44. (I) Un multimètre est calibré à 20 000 Ω/V. (a) Quel est le courant nécessaire pour produire la déviation maximale de l'aiguille ? (b) Quelle est la résistance effective de l'instrument lorsqu'il est utilisé comme voltmètre sur l'échelle de 50 V ?

E45. (I) Un galvanomètre a une résistance interne de 50 Ω et la déviation maximale de l'aiguille correspond à 1 mA. Quelles sont les résistances en série nécessaires pour qu'il puisse être utilisé dans le montage de la figure 7.86 comme voltmètre avec différentes échelles ? La figure donne la position des résistances en série et la valeur maximale de la différence de potentiel mesurée sur chaque branche.



▲ **Figure 7.86**

Exercice 45.

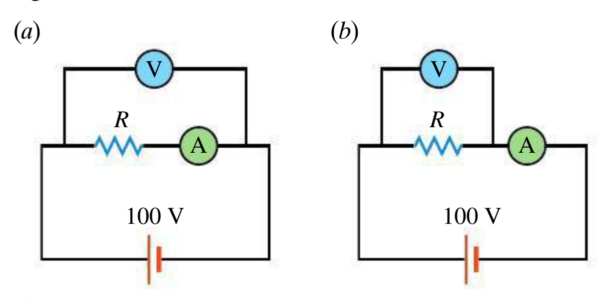
E46. (I) Un multimètre est calibré à 20 000 Ω/V. (a) Quel est le courant nécessaire dans le galvanomètre pour produire la déviation maximale de l'aiguille ? Si la résistance du galvanomètre est égale à 40 Ω, trouvez la valeur de la résistance en série ou du shunt pour obtenir une déviation maximale de (b) 250 V ; (c) 5 A.

E47. (I) Un galvanomètre a une résistance de 20 Ω et enregistre une déviation maximale de l'aiguille pour un courant de 50 μA. Transformez-le en : (a) un voltmètre mesurant de 0 à 10 V ; (b) un ampèremètre mesurant de 0 à 500 mA.

E48. (II) La figure 7.75 représente un « diviseur de tension ». On applique un potentiel V à la borne supérieure du circuit et le potentiel à la borne inférieure est supposé égal à 0 V. Trouvez le potentiel en P pour les valeurs suivantes de la résistance de charge R_C : (a) zéro ; (b) infini ; (c) R_2 ; (d) $0{,}5R_2$.

E49. (I) Dans le circuit de la figure 7.87*a*, les résistances internes du voltmètre et de l'ampèremètre sont $R_V = 1$ kΩ, $R_A = 0{,}1$ Ω. La résistance R a une valeur de 10 Ω. (a) Quelles sont les vraies valeurs du courant circulant dans la résistance et de la différence de potentiel à ses bornes ? (b) Quelles sont les valeurs du courant et de la différence de potentiel mesurées par les instruments ?

E50. (I) Reprenez l'exercice E49 pour le circuit de la figure 7.87*b*.



▲ **Figure 7.87**

Exercices 49 et 50.

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

7.1 F.é.m.

E51. (I) La différence de potentiel mesurée aux bornes d'une pile réelle de résistance interne 0,2 Ω est de 11,4 V lorsqu'elle est branchée à une résistance de 2,3 Ω. Trouvez la f.é.m. de la pile.

7.2 Résistances en série et en parallèle

E52. (I) Lorsqu'une résistance R est branchée à une f.é.m. idéale, le courant traversant le circuit est de 1,4 A. Si une résistance de 2 Ω est branchée en parallèle avec la résistance R, le courant traversant la f.é.m. monte à 1,82 A. Trouvez R.

E53. (I) Deux résistances ont une résistance équivalente à 8,0 Ω lorsqu'elles sont branchées en série et à 1,5 Ω lorsqu'elles sont en parallèle. Déterminez leur valeur individuelle.

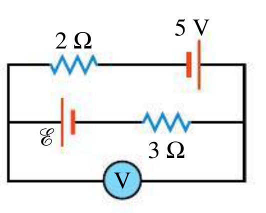
7.4 Lois de Kirchhoff

E54. (II) À la figure 7.88, déterminez R, sachant que le courant qui la traverse est de 0,8 A.

E55. (II) Le voltmètre, dans la figure 7.89, indique 1,0 V. Déterminez la valeur de $\mathscr{E}$ si le potentiel du côté droit du voltmètre est (a) plus élevé que celui du côté gauche ; (b) moins élevé que celui du côté gauche.

▲ **Figure 7.88**

Exercice 54.

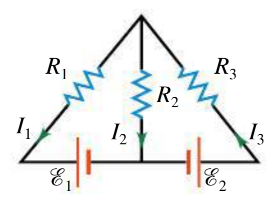


▲ **Figure 7.89**

Exercice 55.

E56. (I) Deux résistances de 2,0 Ω et de 5,0 Ω ont, individuellement, une puissance maximale de 10 W. Quelle différence de potentiel maximale peut être appliquée à l'arrangement qu'elles forment lorsqu'elles sont branchées (a) en parallèle ; (b) en série ?

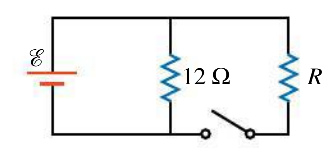
E57. MonLab (II) À la figure 7.90, les résistances et les f.é.m. idéales sont $R_1 = R_3 = 30$ Ω, $R_2 = 50$ Ω, $\mathscr{E}_1 = 1{,}6$ V et $\mathscr{E}_2 = 6{,}3$ V. Déterminez les trois courants.



▲ **Figure 7.90**

Exercice 57.

E58. (II) Lorsqu'on ferme le commutateur de la figure 7.91, le courant fourni par la f.é.m. idéale augmente d'un facteur 3. Trouvez R.

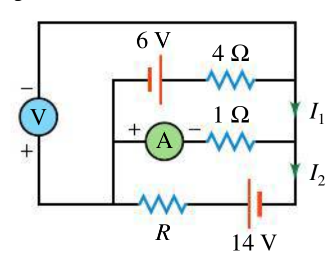


▲ **Figure 7.91**

Exercice 58.

E59. (II) Lorsqu'une pile réelle fournit un courant de 0,8 A, la différence de potentiel entre ses bornes est de 1,44 V. Lorsqu'on recharge cette pile en la traversant d'un courant de 0,5 A, la différence de potentiel entre ses bornes est de 1,7 V. Déterminez la f.é.m. et la résistance interne de cette pile.

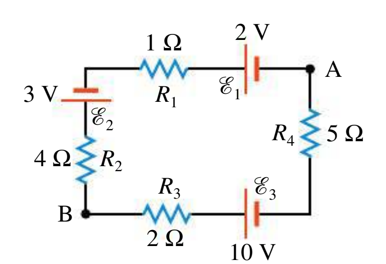
E60. (II) À la figure 7.92, l'ampèremètre indique 2,0 A et le voltmètre indique 2,0 V. Utilisez ces informations pour trouver la valeur de la résistance inconnue R ainsi que les courants I_1 et I_2. Le potentiel à la borne des appareils de mesure identifiée par un + est plus élevé que le potentiel à la borne identifiée par un –.



▲ **Figure 7.92**

Exercice 60.

E61. (I) Un circuit à une maille contient trois f.é.m. idéales et quatre résistances. Les valeurs des éléments sont indiquées à la figure 7.93. Évaluez (a) la puissance qui se dissipe sous forme de chaleur dans la résistance R_2; (b) la puissance fournie par la f.é.m. $\mathscr{E}_3$; (c) la différence de potentiel $V_A - V_B$.

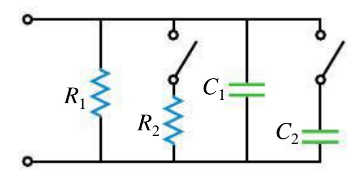


▲ **Figure 7.93**

Exercice 61.

7.5 Circuits *RC*

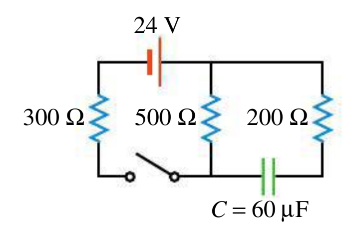
E62. (II) La constante de temps du circuit apparaissant à la figure 7.94 est la même, que les deux commutateurs soient ouverts ou fermés. Si $R_1 = 2{,}0 \times 10^5\ \Omega$, $C_1 = 60\ \mu F$ et $C_2 = 20\ \mu F$, trouvez R_2.



▲ **Figure 7.94**

Exercice 62.

E63. (II) Le commutateur de la figure 7.95 est initialement fermé. (a) Quelle charge possédera le condensateur à l'équilibre ? (b) Si on ouvre le commutateur à l'instant $t = 0$, à quel moment la charge sur le condensateur sera-t-elle réduite à 25 % de sa valeur initiale ?



▲ **Figure 7.95**

Exercice 63.

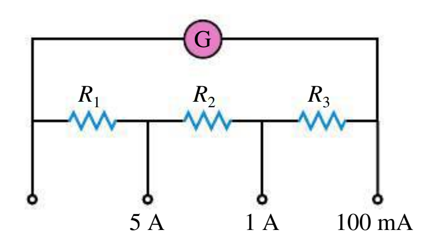
7.6 Utilisation du galvanomètre

E64. (I) Une résistance de 1,0 Ω est branchée à une f.é.m. idéale de 20 V. Quelle valeur maximale doit posséder la résistance interne d'un ampèremètre branché en série à la résistance et à la f.é.m. pour que la mesure effective du courant ne diffère pas de sa valeur réelle de plus de 1 % ?

PROBLÈMES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

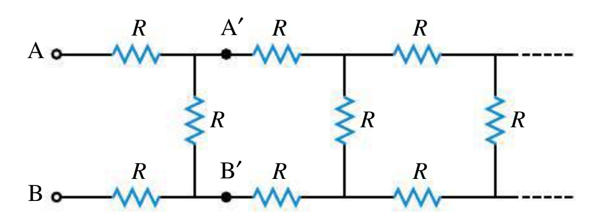
P1. (I) Un galvanomètre a une résistance interne de 20 Ω et donne une déviation maximale de l'aiguille lorsqu'il est traversé par un courant de 2 mA. Quels sont les shunts nécessaires pour les trois échelles indiquées à la figure 7.96 ? La figure donne la position des shunts et la valeur maximale du courant mesuré sur chaque branche.



▲ **Figure 7.96**

Problème 1.

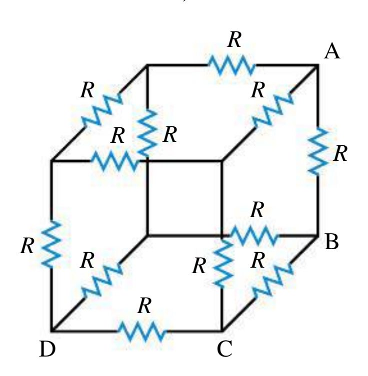
P2. (II) Le montage des résistances d'égale valeur représenté à la figure 7.97 se répète indéfiniment. Montrez que la résistance équivalente entre les bornes A et B est $(1 + \sqrt{3})R$. (*Indice*: Le montage étant reproduit indéfiniment, la résistance entre les points A′ et B′ est la même qu'entre A et B.)



▲ **Figure 7.97**

Problème 2.

P3. (II) Soit 12 résistances identiques formant un cube (figure 7.98). Trouvez la résistance équivalente entre les points A et D. (*Indice*: Numérotez les sommets du cube. Utilisez la symétrie du montage pour trouver les points correspondant au même potentiel et joignez-les par un fil conducteur. Cela change-t-il quelque chose à la résistance équivalente ? Utilisez cette simplification pour dessiner un montage équivalent à deux dimensions.)



▲ **Figure 7.98**

Problèmes 3 et 4.

P4. (II) Reprenez le problème P3 pour les points (a) A et B; (b) A et C.

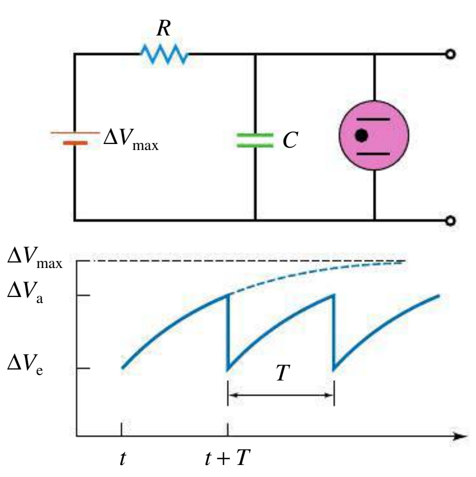
P5. (I) Un condensateur plan est rempli d'un matériau de constante diélectrique κ. Ce matériau est faiblement conducteur, de sorte qu'on lui attribue une résistivité ρ. Montrez que, si le condensateur est chargé et que l'on enlève la pile, la charge va diminuer avec une constante de temps $\tau = \varepsilon_0 \kappa \rho$.

P6. (II) *Fonctionnement d'un stroboscope*. Un condensateur peut servir à faire varier les intervalles de temps séparant les éclairs émis par un petit tube au néon dans le circuit représenté à la figure 7.99. Lorsqu'il est froid, le gaz est un bon isolant. Le tube s'allume (ionisation et émission de lumière) lorsque la différence de potentiel entre ses bornes atteint la valeur d'allumage ΔV_a. Sa résistance devient très petite et le condensateur se décharge donc rapidement dans le tube. Au fur et à mesure que la différence de potentiel diminue, le gaz se refroidit, et il redevient un isolant à la différence de potentiel d'extinction ΔV_e. À ce stade, le condensateur recommence à se charger. Le graphe représente la variation de la différence de potentiel aux bornes du condensateur et du tube. On remarque que

$$\Delta V_e = \Delta V_{max}(1 - e^{-t/RC})$$
$$\Delta V_a = \Delta V_{max}(1 - e^{-(t+T)/RC})$$

t étant un instant quelconque et T étant la période des éclairs. Montrez que

$$T = RC \ln\left(\frac{\Delta V_{max} - \Delta V_e}{\Delta V_{max} - \Delta V_a}\right)$$

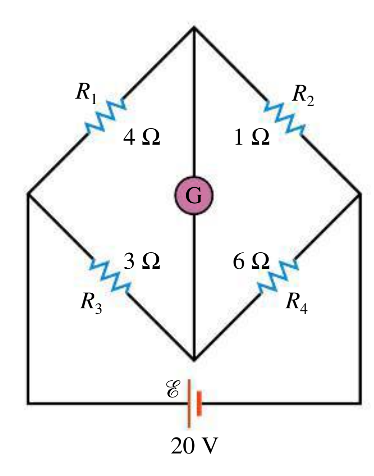


▲ **Figure 7.99**

Problème 6.

P7. (II) Quelle est la valeur du courant dans le galvanomètre du pont de Wheatstone non équilibré représenté à la figure 7.100 ? La résistance du galvanomètre est égale à 20 Ω.

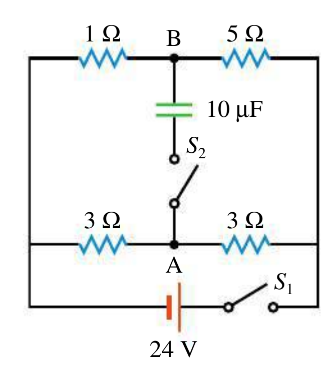
P8. (I) Un condensateur de 40 µF a une charge initiale de 50 µC. Il se décharge dans une résistance de 8000 Ω. Trouvez: (a) le courant à 10 ms; (b) la charge à 10 ms; (c) la puissance qui se dissipe sous forme de chaleur dans la résistance à 10 ms. (d) Combien faut-il de temps pour que l'énergie dans le condensateur chute à 10 % de sa valeur initiale ?



▲ **Figure 7.100**

Problème 7.

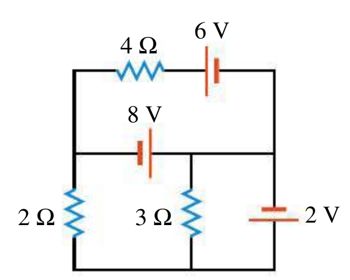
P9. (I) Dans le circuit de la figure 7.101, l'interrupteur S_1 est initialement fermé et S_2 est ouvert. (a) Trouvez $V_A - V_B$. (b) On ferme S_2 tout en gardant S_1 fermé. Que devient $V_A - V_B$? (c) On ouvre S_1 et on garde S_2 fermé. Quelle est la constante de temps pour la décharge du condensateur ?



▲ **Figure 7.101**

Problème 9.

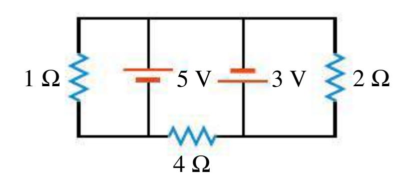
P10. (I) Le circuit de la figure 7.102 comprend trois f.é.m. idéales et trois mailles. Trouvez le courant dans chaque résistance.



▲ **Figure 7.102**

Problème 10.

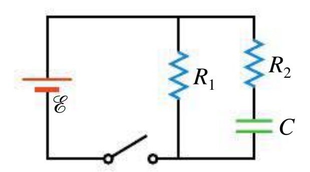
P11. (I) Trouvez le courant dans chaque résistance du circuit de la figure 7.103.



▲ **Figure 7.103**

Problème 11.

P12. (I) Pour le circuit de la figure 7.104, trouvez : (a) le courant initial dans chaque résistance lorsqu'on ferme l'interrupteur ; (b) le courant final en régime permanent dans chaque résistance ; (c) l'énergie finale emmagasinée dans le condensateur ; (d) la constante de temps lorsque l'interrupteur est réouvert après que la charge maximale soit atteinte.



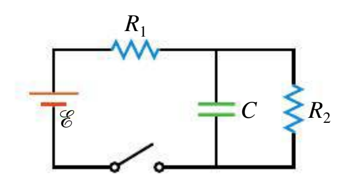
▲ **Figure 7.104**

Problème 12.

P13. (II) À la figure 7.105, on ferme l'interrupteur à $t = 0$. (a) Quels sont les courants dans les résistances à (a) $t = 0$; (b) $t \to \infty$? (c) Montrez que le courant de charge du condensateur est donné par

$$I_C = \frac{\mathscr{E}}{R_1} e^{-t/\tau}$$

où $\tau = R_1R_2C/(R_1 + R_2)$. (*Indice* : Appliquez la loi des mailles pour chaque maille et établissez une relation entre les courants à l'aide de la loi des nœuds. Obtenez une équation différentielle pour I_C et intégrez-la.)



▲ **Figure 7.105**

Problème 13.

P14. (II) On forme un circuit d'une seule maille avec une pile, une résistance et un condensateur initialement déchargé tels que $\mathscr{E} = 100$ V, $C = 80$ μF et $R = 10^5$ Ω. Trouvez : (a) le temps nécessaire pour que l'énergie dans le condensateur atteigne 50 % de sa valeur maximale ; (b) le taux de charge dQ/dt du condensateur à 2 s ; (c) la puissance qui se dissipe sous forme de chaleur dans R à 2 s ; (d) l'énergie totale dissipée par la résistance entre 0 et 10 s.

P15. (II) On donne deux piles de f.é.m. $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ et de résistances internes r_1 et r_2. Elles sont reliées en parallèle (comme à la figure 7.67, p. 296). Montrez qu'elles sont équivalentes à une pile de f.é.m. $\mathscr{E}_{\text{éq}}$, avec

$$\mathscr{E}_{\text{éq}} = \left(\frac{\mathscr{E}_1}{r_1} + \frac{\mathscr{E}_2}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)^{-1}$$

(*Indice*: Considérez les piles reliées à une résistance externe R. Remarquez que $\mathscr{E}_{\text{éq}} - r_{\text{éq}}I = RI$.)

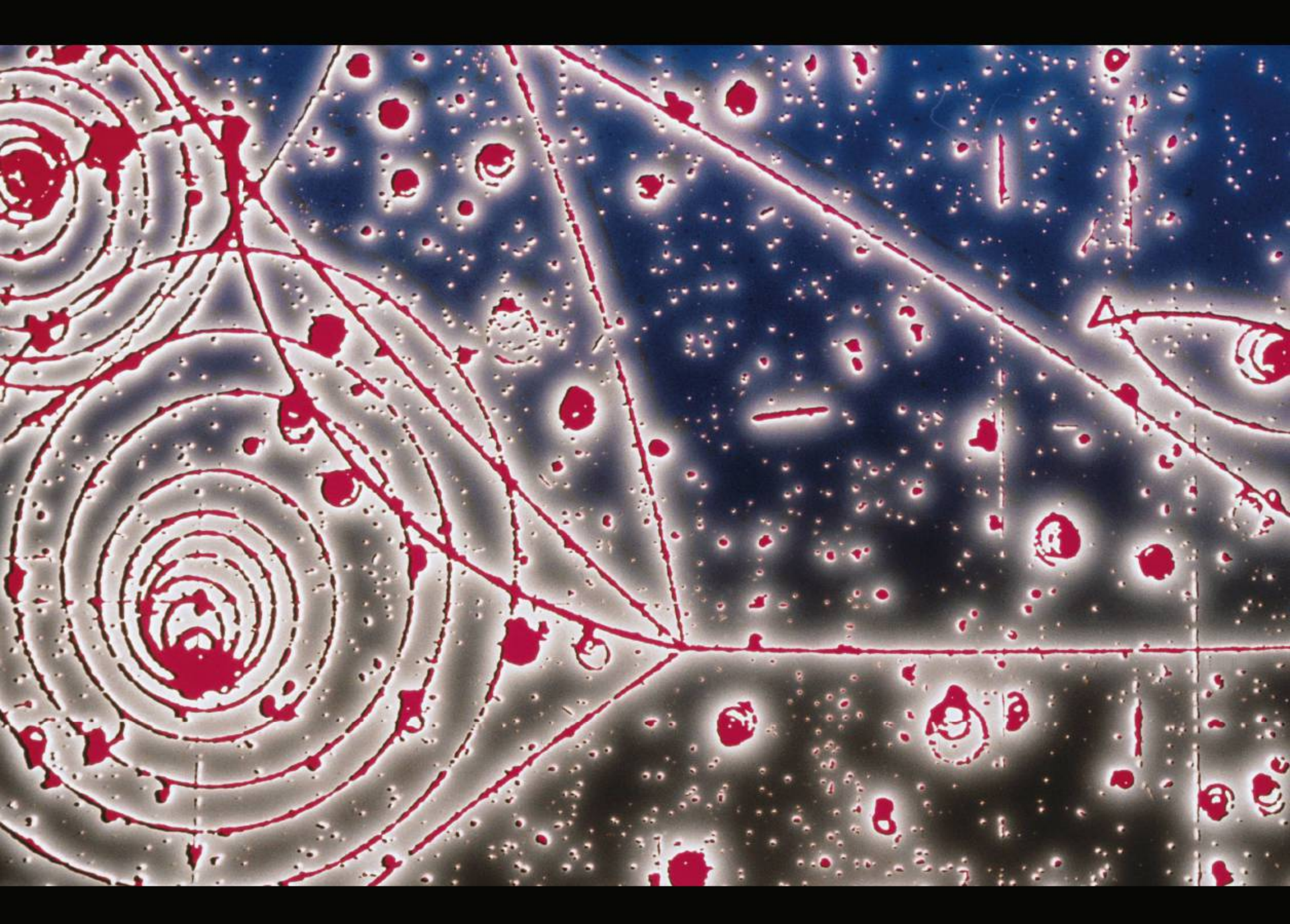
P16. (I) Calculez les coefficients α_1 et α_2 dans l'exemple 7.16, puis la valeur de la résistance équivalente entre les points A et B. On donne $R_1 = 2\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 1\ \Omega$, $R_4 = 5\ \Omega$ et $R_5 = 4\ \Omega$.

P17. (II) Deux piles ont la même f.é.m. $\mathscr{E}$ et la même résistance interne r. Elles sont reliées à une résistance externe R. Les piles doivent-elles être reliées en série ou en parallèle pour que le taux de dissipation thermique dans R soit maximal, sachant que (a) $r < R$; (b) $r > R$?

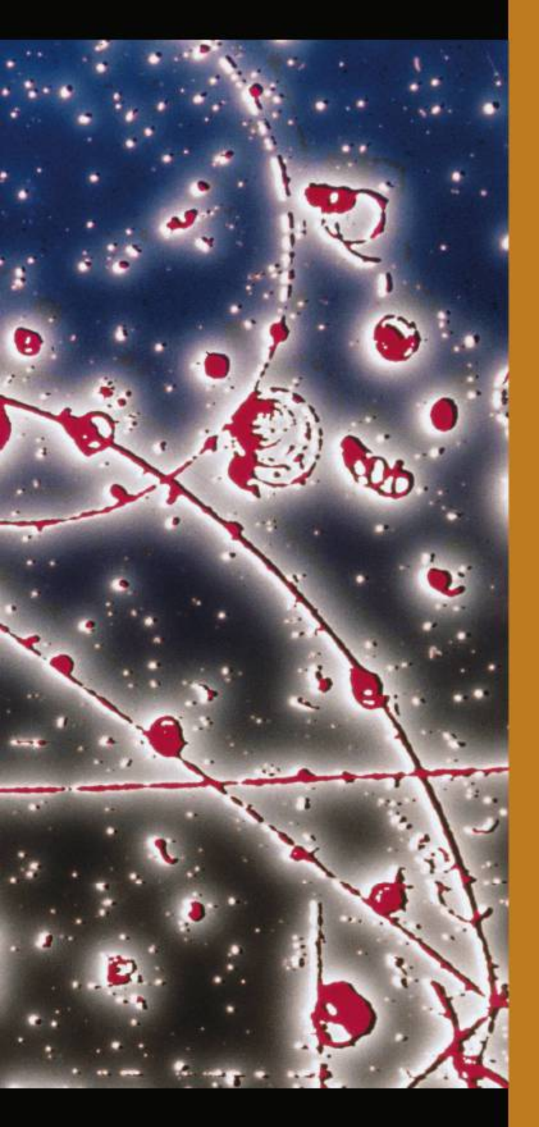


CHAPITRE 8

LE CHAMP MAGNÉTIQUE



SOMMAIRE



Lorsqu'une particule élémentaire chargée traverse un détecteur appelé chambre à bulles, elle laisse une traînée de petites bulles qui permet de reconstituer sa trajectoire (la couleur a été ajoutée). La courbure de cette trajectoire est due à la force qu'exerce un champ magnétique ; elle permet de déterminer les caractéristiques de la particule. Nous décrirons de telles trajectoires dans ce chapitre.

Alors que les chapitres 1 à 7 ont porté sur les phénomènes électriques, ce chapitre amorce l'étude des phénomènes *magnétiques*. Les aimants qu'on colle sur le réfrigérateur, les électroaimants avec lesquels on soulève des voitures et le champ magnétique terrestre en sont des manifestations.

De nos jours, les aimants et les électroaimants sont utilisés dans les moteurs, les haut-parleurs, les bandes magnétiques des cartes bancaires, les mémoires d'ordinateur, en analyse chimique, pour concentrer et diriger le faisceau d'électrons dans un tube à rayons cathodiques et dans une foule d'autres mécanismes. En plus d'être utile à la navigation, le champ magnétique terrestre nous protège contre les effets dangereux des particules chargées provenant de l'espace à haute vitesse (voir la fin de la section 8.5).

Au chapitre 2, nous avons conçu l'interaction électrique entre les charges selon un modèle en deux étapes : 1) les charges *sources* produisent un champ ; 2) une charge *cible* subit une force exercée par ce champ. Nous verrons qu'un modèle semblable, dans lequel les sources et les cibles sont des *charges en mouvement*, s'applique aux phénomènes magnétiques. Un champ *magnétique* est donc produit par des objets chargés en mouvement, par des courants en circulation ou, dans le cas d'aimants, par l'équivalent à l'échelle atomique. La production du champ magnétique est l'objet du chapitre 9.

Dans ce chapitre, nous étudierons la force qu'exerce le champ magnétique sur des particules chargées en mouvement (sections 8.2 et 8.5) et sur des conducteurs parcourus par des courants (sections 8.3 et 8.4). Nous étudierons aussi plusieurs applications technologiques ou scientifiques de cette force (sections 8.6 à 8.9).

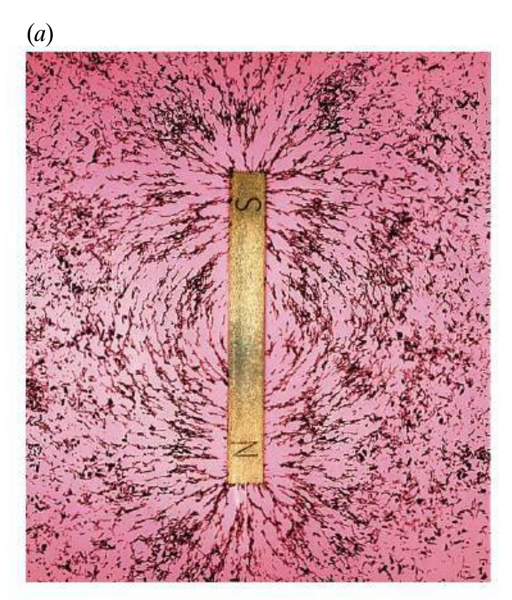
8.1 LE CHAMP MAGNÉTIQUE

Dans cette section, nous ferons un survol des phénomènes magnétiques. Nous allons notamment montrer que les aimants, les courants et les objets chargés en mouvement ont tous en commun d'exercer les uns sur les autres une force qui est de même nature. Nous verrons qu'il faut avoir recours à un nouveau champ, le *champ magnétique*, pour expliquer cette interaction.

Considérons d'abord le cas des aimants. En 1269, Pierre de Maricourt rapporta avoir étudié un aimant de forme sphérique en plaçant une petite aiguille magnétisée en plusieurs points de sa surface. Il réalisa que les extrémités de l'aiguille pointaient toujours vers deux régions situées de chaque côté de la sphère, comme les lignes de longitude de la Terre pointent vers ses pôles. Par analogie, il appela ces régions des *pôles* magnétiques.

Pour visualiser facilement les pôles magnétiques, il faudrait utiliser simultanément plusieurs aiguilles magnétisées, par exemple en disposant des boussoles autour d'un aimant. Saupoudrer de la limaille de fer produit le même effet, chaque grain de fer se magnétisant (figure 8.1*a*). La figure 8.1*b* est une reproduction de la figure 2.9*a* (p. 42), où chaque semence de gazon, un petit dipôle électrique, pointe toujours vers une des deux charges d'un gros dipôle électrique. Ces deux figures présentent une ressemblance évidente, les pôles *magnétiques* nord et sud semblant jouer un rôle identique aux charges *électriques* $+Q$

(*a*)



(*b*)

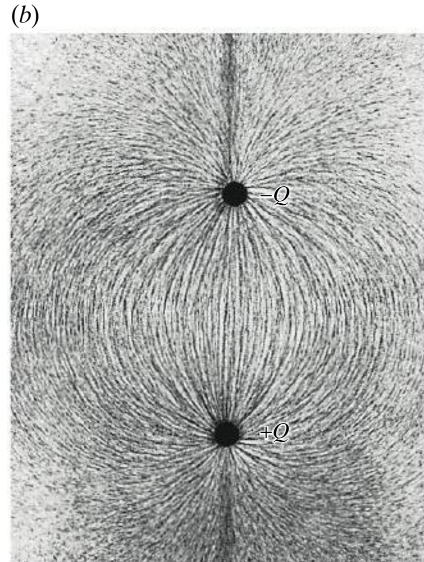
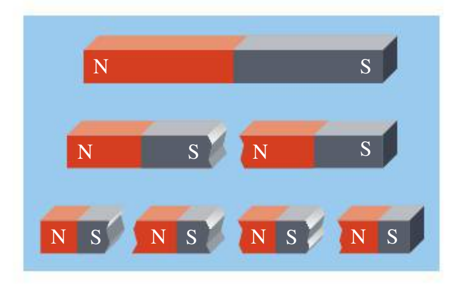


Figure 8.1

Malgré leur similitude évidente, ces deux figures représentent des phénomènes complètement différents. (*a*) Un dipôle magnétique. (*b*) Un dipôle électrique.

et $-Q$, respectivement. Cette ressemblance entre un dipôle électrique et un *dipôle magnétique*, bien qu'elle sera utile pour développer des équations analogues, n'est qu'apparente ; en fait, nous allons maintenant montrer qu'il s'agit de phénomènes différents.

D'abord, les deux charges d'un dipôle électrique peuvent être séparées et agissent alors comme deux sources de champ électrique distinctes, capables de faire pivoter les semences de gazon. En revanche, si l'on essaie d'isoler les pôles magnétiques en coupant l'aimant de la figure 8.1*a*, on obtient deux aimants (figure 8.2). Si l'on coupe l'aimant en tranches très fines, chaque fragment garde toujours deux pôles, ce qu'illustre bien le code de couleurs que nous avons choisi pour représenter les pôles. Même à l'échelle atomique, nul n'est parvenu à trouver un *monopôle*, c'est-à-dire un pôle magnétique isolé.



▲ **Figure 8.2**
Lorsqu'on coupe un aimant, on obtient deux aimants plus petits. Il n'est pas possible d'isoler le pôle nord ou le pôle sud.

En somme, quand on place deux aimants identiques bout à bout et qu'on constate qu'ils se repoussent si leurs pôles semblables se font face ou s'attirent si deux pôles différents se font face, il ne faut *pas* en conclure qu'il se produit une interaction entre les pôles. Les pôles semblables *semblent* se repousser et les pôles différents *semblent* s'attirer, mais nous venons de montrer que ce sont les aimants *entiers* qui interagissent.

Les pôles d'un aimant n'interagissent pas réellement.

Il y a aussi une différence plus subtile : un petit dipôle électrique placé entre les charges $+Q$ et $-Q$ à la figure 8.1*b* aligne sa charge positive vers $-Q$, alors qu'un petit dipôle magnétique qu'on placerait entre les deux pôles à la figure 8.1*a* (il faudrait percer un trou dans l'aimant) alignerait son pôle nord vers le pôle *nord* de l'aimant. Ainsi, l'analogie entre un pôle nord et une charge positive ne tient que pour des endroits éloignés de l'aimant. On a vraiment affaire à un tout nouveau phénomène, la **force magnétique**.

Cette nouvelle interaction « à distance » pose les mêmes problèmes conceptuels que dans le cas de la force électrique (voir l'introduction du chapitre 2 et la section 2.1). Par exemple, si on déplace un aimant, la force sur un autre aimant n'est pas modifiée de façon instantanée. L'existence de ce délai implique obligatoirement qu'il y ait un intermédiaire permettant aux aimants d'agir l'un sur l'autre. Comme dans le cas de la force électrique, nous devons concevoir que les aimants agissent par l'intermédiaire d'un champ, le **champ magnétique**. On dit qu'un des aimants, la *source*, produit un champ magnétique, alors que l'autre, la *cible*, subit la force magnétique exercée par le champ.

D'autres sources de champ magnétique

En 1600, William Gilbert suggéra l'idée importante que la Terre elle-même était un gigantesque aimant, puisque les aiguilles aimantées des boussoles s'orientent toujours selon un axe nord-sud. En fait, tout barreau aimanté, si on le suspend, s'oriente de la même façon. C'est Gilbert qui appela « pôle nord » le pôle d'un aimant qui pointe vers le pôle Nord géographique. Il ressort donc que le pôle *nord* géographique de la Terre est en fait son pôle *sud* magnétique (voir la figure 9.49, p. 392).

À partir de 1735, on commença aussi à soupçonner qu'il existait une relation entre l'électricité et le magnétisme lorsqu'on découvrit que la foudre pouvait magnétiser des objets métalliques comme des fourchettes et des cuillères. Dès 1813, le professeur danois Hans Christian Œrsted (figure 8.3) se mit à essayer de produire des effets magnétiques à partir de l'électricité. Comme d'autres scientifiques, il tenta diverses expériences, l'une d'elles consistant à suspendre une pile voltaïque par une corde pour voir si elle s'orientait comme une boussole.


▲ **Figure 8.3**
Hans Christian Œrsted (1777-1851).

Au printemps 1820, en préparant un cours pour ses étudiants, Œrsted fut inspiré par l'idée que l'aiguille d'une boussole fluctue pendant que la foudre se déchaîne : il plaça une aiguille de boussole sous un mince fil conducteur et, lorsqu'il fit passer un courant intense, vit l'aiguille tourner et s'écarter de son orientation normale selon le champ magnétique terrestre. Ainsi, un courant *électrique* peut produire un champ *magnétique*.

Par la suite, Œrsted montra aussi qu'un aimant exerce une force sur un fil conducteur traversé par un courant. Tout comme un aimant, le courant peut donc à la fois agir comme source et comme cible. Pour vérifier que le conducteur n'a rien à voir, on peut remplacer le courant par un jet de particules chargées et on observe essentiellement les mêmes phénomènes. En fait, même une charge ponctuelle, si elle bouge à haute vitesse, peut produire un champ magnétique ou subir une force magnétique.

Tout champ magnétique est dû à des charges en mouvement.

Qu'ont en commun les différentes sources de champ magnétique que sont la Terre, le courant, les aimants, les jets de particules ? Elles contiennent toutes des *charges en mouvement* : dans un fil conducteur ou dans le noyau terrestre, ce mouvement est macroscopique, et dans un aimant permanent, il est microscopique : il se produit au sein de chaque atome, en raison de la rotation des électrons autour du noyau et sur eux-mêmes, selon l'interprétation de la mécanique quantique.

Au niveau le plus fondamental, on peut donc reformuler notre modèle comme suit : une charge en mouvement, la *source*, produit un champ magnétique, alors qu'une autre charge en mouvement, la *cible*, subit la force magnétique exercée par le champ.

La valeur $\vec{\mathbf{B}}$ du champ magnétique

Comme dans le cas du champ électrique, il serait difficile pour le moment de décrire la nature du champ magnétique. Nous utiliserons donc la même approche qu'à la section 2.1 : nous dirons que le champ magnétique en un point de l'espace a une certaine valeur $\vec{\mathbf{B}}$*, sans préciser ce que cette valeur représente. La valeur $\vec{\mathbf{B}}$ n'est pas définie à partir de ce qu'*est* le champ magnétique, mais à partir des *effets* qu'on lui attribue, c'est-à-dire la force que celui-ci exerce sur une charge cible en mouvement. Comme pour le champ électrique, cette « *définition opérationnelle* » suffira pour expliquer tous les phénomènes que nous étudierons, car elle permet de calculer la force produite par le champ sans avoir à préciser sa nature.

Définissons d'abord l'orientation du vecteur $\vec{\mathbf{B}}$. Celle du vecteur $\vec{\mathbf{E}}$ a été définie comme étant parallèle à la force électrique que ce champ exerçait sur une charge d'essai positive. On ne peut pas procéder de la même façon pour $\vec{\mathbf{B}}$, car la force sur la charge d'essai q dépend aussi de l'orientation de la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ de cette charge, alors que $\vec{\mathbf{B}}$ ne doit dépendre que de la source. L'analogie entre les figures 8.1*a* et 8.1*b* peut nous servir d'inspiration : nous définirons que l'orientation du vecteur $\vec{\mathbf{B}}$ est celle prise par la limaille ou les boussoles placées à proximité de l'aimant source. Cela permettra aux lignes de champ $\vec{\mathbf{B}}$ produites par un aimant d'être analogues aux lignes de champ $\vec{\mathbf{E}}$ produites par un dipôle (figure 8.4), même si la force magnétique n'est *jamais* parallèle à $\vec{\mathbf{B}}$. Ainsi, le pôle nord de l'aiguille d'une boussole placée sur une telle ligne de champ indique *par définition* le sens de $\vec{\mathbf{B}}$. Cette définition a aussi un fondement

* Il peut sembler étrange d'utiliser la lettre B pour désigner le champ magnétique. Mais la lettre M, qui apparaît comme un choix plus naturel, sert à désigner un autre paramètre appelé « aimantation » (voir la section 9.6). Quant au choix de la lettre B, il ne s'explique par aucun motif particulier.

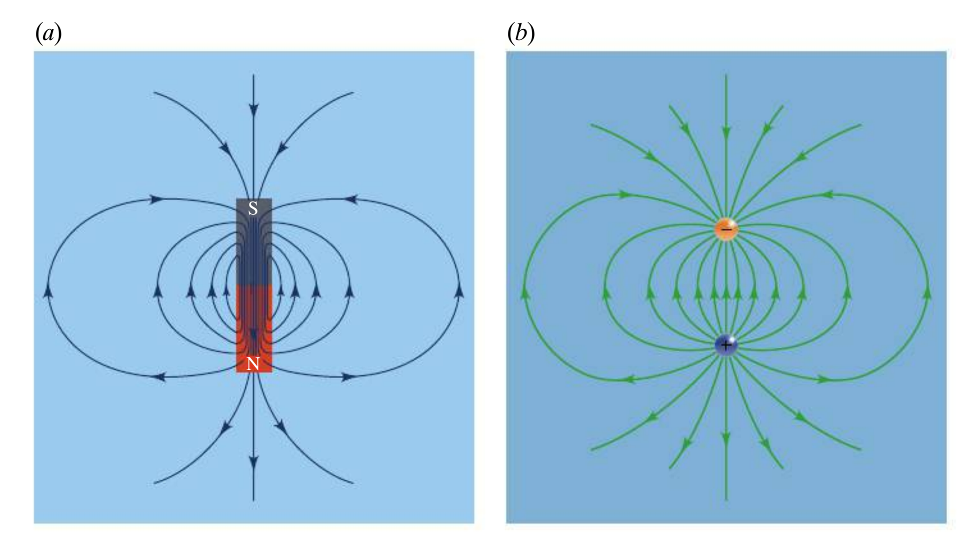


Figure 8.4

(*a*) Lignes de champ magnétique produites par l'aimant de la figure 8.1*a*. (*b*) Lignes de champ électrique produites par le dipôle de la figure 8.1*b*. Notez la similitude loin de la source, mais les différences à proximité.

historique : c'est à partir des configurations formées par la limaille que Michael Faraday eut l'idée d'introduire la notion du champ magnétique et les lignes de champ correspondantes.

En comparant les figures 8.4*a* et 8.4*b*, on constate que les lignes de champ électrique débutent et se terminent à des charges, mais que les lignes de champ magnétique forment des boucles fermées. À l'extérieur de l'aimant, les lignes émergent du pôle nord et entrent par le pôle sud ; à l'intérieur, elles sont orientées du pôle sud vers le pôle nord.

Il reste à définir le *module* du champ magnétique. Dans le cas du champ électrique, le vecteur $\vec{\mathbf{E}}$ avait été défini de façon à ce que la force sur une charge cible q soit donnée par $\vec{\mathbf{F}}_E = q\vec{\mathbf{E}}$. Quand on projette à la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ une charge cible q dans un champ magnétique, on mesure une force $\vec{\mathbf{F}}_B$ dont le module a les caractéristiques suivantes :

(i) Il est proportionnel à la charge $|q|$ et au module de la vitesse v, c'est-à-dire : $F_B \propto |q|v$.

(ii) Si la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ de la charge q fait un angle θ avec les lignes de $\vec{\mathbf{B}}$, on trouve $F_B \propto \sin\theta$.

En combinant ces deux résultats, on obtient

$$F_B \propto |q|v\sin\theta$$

On définit donc le module du champ magnétique B comme étant la constante de proportionnalité :

$$F_B = |q|vB\sin\theta \qquad (8.1)$$

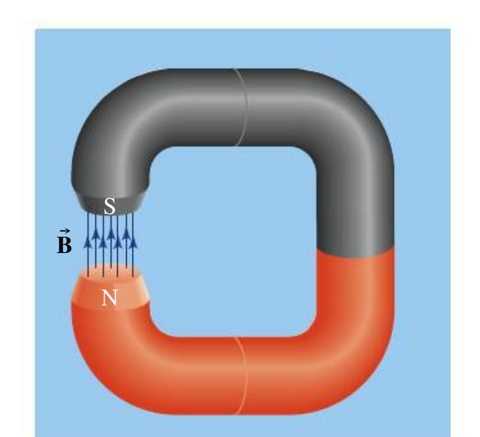
L'unité SI de champ magnétique est le **tesla** (T) : d'après l'équation 8.1, on voit que 1 T = 1 (N·s)/(C·m). Le tesla est une unité de très grande taille. Par exemple, le champ magnétique terrestre près du sol n'est que de 50 μT, celui produit par les aimants supraconducteurs larges de plusieurs mètres est typiquement de 2 ou 3 T et ne dépasse pas 30 T. Enfin, le champ magnétique le plus intense jamais produit dans un laboratoire sans détruire l'équipement utilisé a été obtenu en 2006 à Los Alamos, seulement par pulsations d'une durée très courte, et il ne s'agit « que » d'un champ de 101 T. Comme le tesla est une unité de grande taille, on utilise souvent une autre unité, le **gauss** (G), qui n'est pas une unité SI. Entre ces deux unités, le facteur de conversion est

$$1\ \text{G} = 10^{-4}\ \text{T}$$

Exprimé dans cette unité, le module du champ magnétique terrestre près du sol est voisin de 0,5 G, alors que le module du champ au voisinage d'un barreau aimanté peut atteindre 50 G.

Enfin, soulignons que la façon dont nous avons défini le module du champ fait en sorte qu'il est proportionnel au nombre de lignes de champ traversant une surface unitaire normale au champ, comme c'était aussi le cas pour $\vec{\mathbf{E}}$.

8.2 LA FORCE MAGNÉTIQUE SUR UNE PARTICULE CHARGÉE



▲ **Figure 8.5**

Lorsqu'on rapproche les pôles d'un barreau aimanté, on crée une région dans laquelle le champ magnétique est uniforme.

Maintenant que nous avons défini le champ magnétique, nous allons nous intéresser à la force qu'il exerce sur une particule chargée en mouvement. Seule la valeur du vecteur $\vec{\mathbf{B}}$ à la position de la particule importe, mais, pour mieux visualiser, nous pouvons supposer que le champ magnétique est uniforme, c'est-à-dire que sa valeur $\vec{\mathbf{B}}$ est constante dans l'espace. On peut produire un champ magnétique uniforme de plusieurs façons, l'une étant représentée à la figure 8.5. Dans la mesure où un petit espace sépare les pôles et où les phénomènes observés se produisent au centre* de l'espace entre les pôles, on peut en effet considérer que le champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ est uniforme.

Si on projette à la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ une charge cible q dans le champ de la figure 8.5, cette charge subit une force dont le module est $F_B = |q|vB \sin\theta$. Mais l'orientation de cette force est surprenante : on observe que $\vec{\mathbf{F}}_B$ est perpendiculaire à la fois à $\vec{\mathbf{v}}$ et à $\vec{\mathbf{B}}$, donc au plan défini par $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$. Il s'agit donc d'un phénomène à trois dimensions.

La perpendicularité au plan contenant $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ ne définit qu'une direction, c'est-à-dire un axe. Le vecteur $\vec{\mathbf{F}}_B$ est parallèle à cet axe et peut avoir deux sens possibles, selon le signe de la charge q (figure 8.6*a*). Si la charge q est positive, on observe la règle suivante :



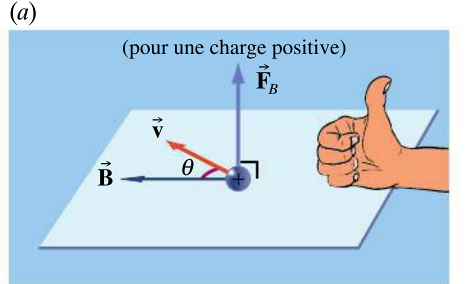
Orientation de la force magnétique

Si on oriente les doigts de la main droite selon $\vec{\mathbf{v}}$ et qu'on les replie pour qu'ils s'alignent sur $\vec{\mathbf{B}}$, alors le pouce pointe selon $\vec{\mathbf{F}}_B$. Pour une charge q négative, $\vec{\mathbf{F}}_B$ est orientée dans le sens opposé au pouce.

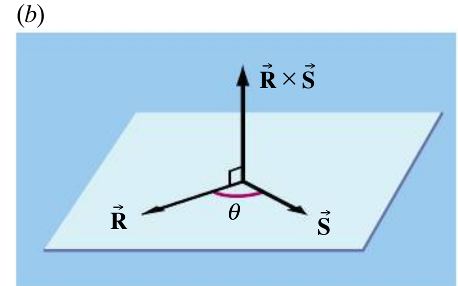
▶ **Figure 8.6**

(*a*) La force magnétique $\vec{\mathbf{F}}_B$ agissant sur une particule de vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ est perpendiculaire à la fois à $\vec{\mathbf{v}}$ et à $\vec{\mathbf{B}}$. (*b*) D'après la règle de la main droite, si on oriente les doigts de la main droite (sauf le pouce) selon $\vec{\mathbf{R}}$ et qu'on les replie pour qu'ils s'alignent sur $\vec{\mathbf{S}}$, alors le pouce pointe selon $\vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{S}}$.

(*a*)



(*b*)



On peut se servir du produit vectoriel (voir le chapitre 2 du tome 1) pour exprimer plus simplement la force magnétique. En effet, le produit vectoriel entre deux vecteurs $\vec{\mathbf{R}}$ et $\vec{\mathbf{S}}$ quelconques (noté $\vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{S}}$) est perpendiculaire à $\vec{\mathbf{R}}$ et à $\vec{\mathbf{S}}$,

* Nous n'avons représenté qu'une partie des lignes de champ magnétique entre les deux pôles. Ces lignes s'infléchissent vers l'extérieur lorsqu'on s'éloigne trop du centre.

et l'orientation de $\vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{S}}$ est donnée par la **règle de la main droite** : *si on oriente les doigts de la main droite selon* $\vec{\mathbf{R}}$ *et qu'on les replie pour qu'ils s'alignent sur* $\vec{\mathbf{S}}$*, alors le pouce pointe selon* $\vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{S}}$ (figure 8.6*b*). De plus, le module de $\vec{\mathbf{R}} \times \vec{\mathbf{S}}$ vaut $RS \sin\theta$, où θ est l'angle entre les vecteurs $\vec{\mathbf{R}}$ et $\vec{\mathbf{S}}$. En fonction du produit vectoriel, on peut donc écrire une équation qui décrit complètement (module, direction et sens) la force magnétique qui agit sur une charge en mouvement :

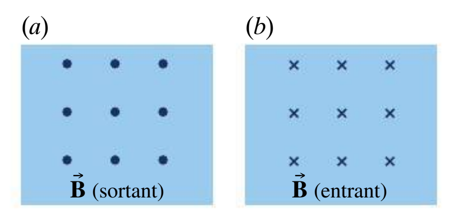
Force exercée par le champ magnétique sur une charge en mouvement

$$\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \tag{8.2}$$

On remarque qu'*il n'y a pas* de valeur absolue dans cette équation : lorsque q est négatif, le signe moins inverse le sens du vecteur $\vec{\mathbf{F}}_B$, tel que désiré. Formellement, on peut dire que l'équation 8.2 définit le vecteur $\vec{\mathbf{B}}$ et pas seulement son module ; le recours à la limaille de fer n'est donc pas requis pour définir l'orientation, mais cela a le mérite d'en faciliter la visualisation.

Puisque $\vec{\mathbf{F}}_B$ est toujours perpendiculaire à $\vec{\mathbf{v}}$, *une force magnétique n'effectue aucun travail sur une particule libre et ne peut servir à faire varier son énergie cinétique.*

Étant donné ce que nous venons de présenter, il est évident que dans ce chapitre et les suivants, nous aurons souvent à représenter des vecteurs dans les trois dimensions de l'espace. Pour nous faciliter la tâche, nous utiliserons la convention illustrée à la figure 8.7 pour représenter des vecteurs perpendiculaires à la page. Le point représente la pointe d'une flèche venant vers nous ($\vec{\mathbf{B}}$ sort de la page). La croix représente l'extrémité d'une flèche qui s'éloigne ($\vec{\mathbf{B}}$ entre dans la page).



▲ **Figure 8.7**

La convention utilisée pour représenter les lignes du champ magnétique (*a*) sortant et (*b*) entrant dans la page.

Méthode de résolution

Force magnétique sur une charge en mouvement

Pour appliquer l'équation 8.2, trois approches sont possibles. Quand les vecteurs sont faciles à visualiser, on suit les étapes suivantes :

1. Dessiner un schéma en trois dimensions où on représente $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$.
2. Déterminer le plan qui contient $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$; la force est parallèle à un axe perpendiculaire à ce plan.
3. Appliquer la règle de la main droite pour déterminer le sens le long de cet axe ; ne pas oublier l'effet du signe de q.
4. Calculer le module $F_B = |q|vB \sin\theta$, où θ est un angle mesuré dans le plan qui contient $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$. Cet angle est défini comme le plus petit angle mesuré entre les deux vecteurs quand leurs origines coïncident, mais, comme illustré à la figure 2.21 du tome 1, l'angle $180° - \theta$ peut aussi être utilisé, car il a la même valeur de sinus.

On peut aussi procéder selon une approche mathématique qui utilise les vecteurs unitaires et ne nécessite pas de visualiser les vecteurs :

1. On exprime $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ en fonction de leurs composantes cartésiennes.
2. En coordonnées cartésiennes, le produit vectoriel se calcule ainsi :

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} &= (v_x\vec{\mathbf{i}} + v_y\vec{\mathbf{j}} + v_z\vec{\mathbf{k}}) \times (B_x\vec{\mathbf{i}} + B_y\vec{\mathbf{j}} + B_z\vec{\mathbf{k}}) \\ &= (v_yB_z - v_zB_y)\vec{\mathbf{i}} + (v_zB_x - v_xB_z)\vec{\mathbf{j}} \\ &\quad + (v_xB_y - v_yB_x)\vec{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

En algèbre matricielle, cette équation correspond au *déterminant* d'une matrice de trois lignes et de trois colonnes et peut donc se réécrire ainsi :

$$\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} = \begin{vmatrix} \vec{\mathbf{i}} & \vec{\mathbf{j}} & \vec{\mathbf{k}} \\ v_x & v_y & v_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

La troisième option est une variante de la deuxième :

1. On exprime $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ en fonction de leurs composantes cartésiennes et des vecteurs $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$ et $\vec{\mathbf{k}}$.
2. On distribue le produit vectoriel à chacun des termes composant les deux vecteurs.
3. On factorise les termes scalaires.
4. On remplace les produits vectoriels de vecteurs unitaires en sachant que le produit vectoriel d'un vecteur par lui-même est nul, que $\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{i}}$ et $\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{i}} = \vec{\mathbf{j}}$ et, enfin, que les produits commutés suivent la règle $\vec{\mathbf{B}} \times \vec{\mathbf{A}} = -\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}$.

Dans les trois cas, on doit exprimer clairement le résultat. En trois dimensions, il est insuffisant d'exprimer l'orientation d'un vecteur à l'aide d'un seul angle comme on le fait souvent dans un plan ; il importe de bien spécifier dans quel plan chaque angle est mesuré, à partir de quel axe il est mesuré et dans lequel des deux sens possibles il est pris à partir de cet axe.

Exemple 8.1

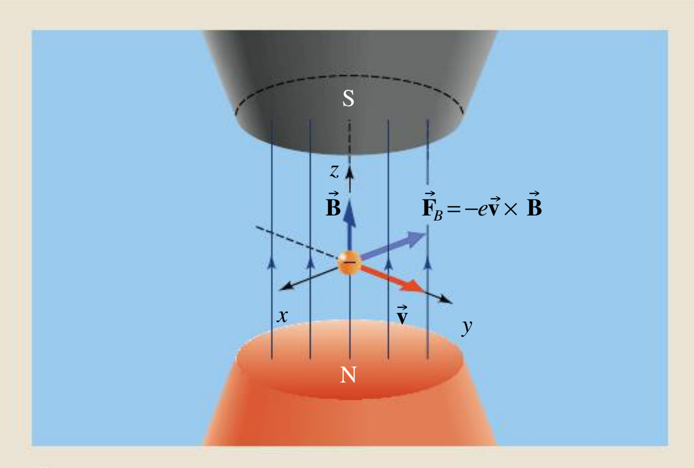
Un électron a une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = 10^6\vec{\mathbf{j}}$ m/s dans un champ $\vec{\mathbf{B}} = 500\vec{\mathbf{k}}$ G (figure 8.8). Quelle est la force magnétique agissant sur l'électron ?

Solution

En unités SI, on a $B = 5 \times 10^{-2}$ T. Comme le plan yz contient $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$, la force est parallèle à l'axe des x. En tenant compte que $q = -e$ est négatif, on obtient que la force est orientée vers les x négatifs. Son module est

$$\begin{aligned} F_B &= |q|vB \sin\theta \\ &= (1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(10^6\ \text{m/s}) \times (5 \times 10^{-2}\ \text{T}) \\ &= 8{,}00 \times 10^{-15}\ \text{N} \end{aligned}$$

On aurait pu procéder selon la seconde approche, qui aurait donné $\vec{\mathbf{F}}_B = -e\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} = -8{,}00 \times 10^{-15}\vec{\mathbf{i}}$ N. La troisième aurait aussi donné le même résultat, car $\vec{\mathbf{j}} \times \vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{i}}$.



▲ **Figure 8.8**
La force magnétique sur un électron est $\vec{\mathbf{F}}_B = -e\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$.

Exemple 8.2

En un point donné, le champ magnétique terrestre est horizontal et orienté vers le nord. Quelle est l'orientation de la force magnétique agissant sur un électron en mouvement (a) vertical ascendant ; (b) horizontal vers l'est ; (c) horizontal vers le sud-ouest ?

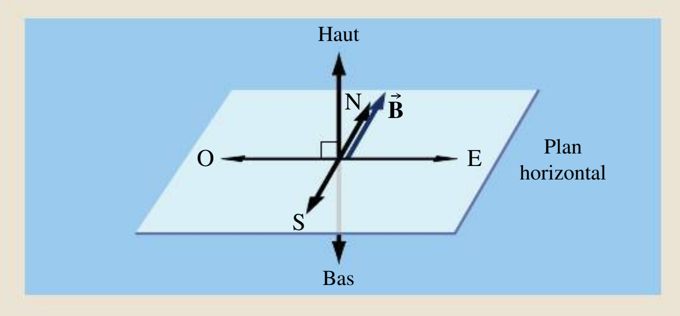
Solution

Il faut bien distinguer la direction nord-sud et la direction haut-bas (figure 8.9) : la direction nord-sud est horizontale (parallèle au sol), tandis que la direction haut-bas est verticale (perpendiculaire au sol). ■

(a) L'électron se déplace vers le haut, le champ magnétique est vers le nord. La force étant perpendiculaire à ces deux directions, elle est forcément parallèle à l'axe est-ouest. Si on applique la règle de la main droite, le pouce pointe vers l'ouest. Toutefois, comme il s'agit d'une charge négative, la force est vers l'est.

(b) L'électron se déplace vers l'est, le pouce pointe vers le haut et la force est vers le bas.

(c) L'électron se déplace dans le plan horizontal à mi-chemin entre le sud et l'ouest. Le pouce pointe vers le bas et la force est vers le haut.



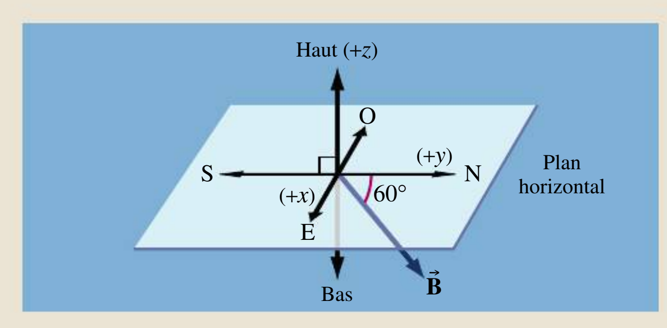
▲ **Figure 8.9**
Diagramme utile pour se repérer en trois dimensions à l'aide des points cardinaux. Dans les cas à l'étude dans l'exemple 8.2, le champ est vers le nord, ce qu'il ne faut pas confondre avec le *haut*.

Exemple 8.3

En un point donné, le champ magnétique terrestre est orienté vers le nord et fait un angle de 60° vers le bas par rapport à l'horizontale. En visualisant les vecteurs en cause, obtenir l'orientation de la force magnétique agissant sur un proton en mouvement (a) vertical ascendant; (b) horizontal vers l'est. (c) Reprendre les questions (a) et (b) et y répondre en faisant appel à l'approche des vecteurs unitaires décrite dans la méthode de résolution.

Solution

Il est bon de changer l'orientation de la figure 8.9 pour pouvoir représenter plus facilement le champ magnétique (figure 8.10). ■

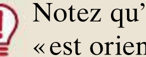


▲ **Figure 8.10**

Le champ magnétique est orienté vers le nord et fait un angle de 60° vers le bas par rapport à l'horizontale. Afin d'utiliser les vecteurs unitaires, on associera les axes x, y et z aux directions indiquées sur la figure.

(a) Le proton se déplace vers le haut, donc la force est parallèle à l'axe est-ouest, puisqu'elle est perpendiculaire à la fois à $\vec{\mathbf{v}}$ et à $\vec{\mathbf{B}}$. Si on applique la règle de la main droite, le pouce pointe vers l'ouest: puisque le proton est chargé positivement, la force est vers l'ouest.

(b) Le proton se déplace vers l'est. La force est perpendiculaire au plan défini par la direction est-ouest et le champ magnétique; elle est donc inclinée de 30° par rapport à la direction nord-sud. En appliquant la règle de la main droite, on trouve que la force est orientée vers le nord à 30° vers le haut par rapport à l'horizontale.



Notez qu'il serait insuffisant de dire que la force «est orientée à 30° par rapport au nord». ■

(c) Afin d'exprimer le résultat sous forme vectorielle, on associera l'axe des z à la direction haut-bas, l'axe des y à la direction nord-sud et l'axe des x à la direction est-ouest (figure 8.10). D'après l'énoncé, on a

$$\vec{\mathbf{B}} = B\cos 60°\,\vec{\mathbf{j}} - B\sin 60°\,\vec{\mathbf{k}}$$

Dans le cas présenté en (a), la vitesse du proton est donnée par $\vec{\mathbf{v}} = v\vec{\mathbf{k}}$, de sorte que

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_B &= e\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}\\ &= e(v\vec{\mathbf{k}}) \times (B\cos 60°\,\vec{\mathbf{j}} - B\sin 60°\,\vec{\mathbf{k}})\end{aligned}$$

Par substitution directe dans l'équation matricielle présentée dans la méthode de résolution, on obtient $\vec{\mathbf{F}}_B = -evB\cos 60°\,\vec{\mathbf{i}}$. On peut aussi obtenir ce résultat en utilisant le fait que $\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{j}} = -\vec{\mathbf{i}}$ et que $\vec{\mathbf{k}} \times \vec{\mathbf{k}} = \vec{\mathbf{0}}$. Notons que la force est bien orientée vers l'ouest.

Dans le cas présenté en (b), la vitesse du proton est donnée par $\vec{\mathbf{v}} = v\vec{\mathbf{i}}$, de sorte que

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_B &= e\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}\\ &= e(v\vec{\mathbf{i}}) \times (B\cos 60°\,\vec{\mathbf{j}} - B\sin 60°\,\vec{\mathbf{k}})\\ &= evB\cos 60°(\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{j}}) - evB\sin 60°(\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{k}})\\ &= evB\cos 60°\,\vec{\mathbf{k}} + evB\sin 60°\,\vec{\mathbf{j}}\end{aligned}$$

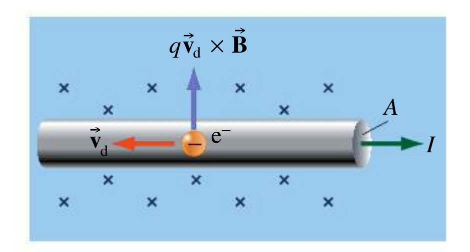
car $\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{j}} = \vec{\mathbf{k}}$ et $\vec{\mathbf{i}} \times \vec{\mathbf{k}} = -\vec{\mathbf{j}}$. La force magnétique a donc bien deux composantes et s'oriente dans le plan yz. Pour déterminer l'angle θ entre cette force et l'axe des y, on écrit

$$\theta = \arctan(F_z/F_y) = \arctan(\cos 60°/\sin 60°) = 30°$$

comme on s'y attendait.

8.3 LA FORCE MAGNÉTIQUE SUR UN CONDUCTEUR PARCOURU PAR UN COURANT

Si l'on place un fil conducteur dans un champ magnétique, il n'est soumis à aucune force bien qu'il soit fait de particules chargées, car celles-ci ont des vitesses thermiques orientées au hasard. Par contre, lorsque le fil est parcouru par un courant, les électrons de conduction acquièrent une faible vitesse de dérive $\vec{\mathbf{v}}_d$ et sont donc soumis à une force magnétique qui est ensuite transmise au fil (ce mécanisme est expliqué à la fin de la section 8.8).



▲ **Figure 8.11**

Lorsqu'un courant circule dans un fil, la force magnétique sur les électrons en mouvement est transmise au fil.

Considérons un segment rectiligne de fil de longueur ℓ et de section A parcouru par un courant I perpendiculaire à un champ magnétique uniforme (figure 8.11). Si n est le nombre d'électrons de conduction par unité de volume, le nombre de ces électrons dans ce segment de fil est $nA\ell$. Selon l'équation 8.2, chaque électron est soumis à une force de module $ev_dB \sin 90° = ev_dB$ et dont l'orientation est perpendiculaire à la fois à la vitesse de dérive (donc au fil) et au champ. En multipliant cette force par le nombre d'électrons de conduction que contient le segment de fil, on obtient que le module de la force magnétique totale exercée sur les électrons dans ce segment est

$$F_B = (nA\ell)ev_dB$$

D'après l'équation 6.2, $I = nAev_d$, et l'expression précédente devient $F_B = I\ell B$. Si le conducteur parcouru par un courant n'est pas perpendiculaire au champ, la force subie par chaque électron de conduction demeure perpendiculaire à la fois au fil et au champ, mais n'a plus le même module (voir l'équation 8.2). Le module de la force totale devient donc

$$F_B = I\ell B \sin\theta \qquad (8.3)$$

où θ est l'angle entre le sens du courant et le champ. Cette force est toujours normale à la fois au fil et aux lignes de champ.

On voit que l'équation 8.3 a la forme d'un module de produit vectoriel. Si on définit un vecteur $\vec{\boldsymbol{\ell}}$ dont le sens est celui du courant (et dont le module est la longueur du fil), alors θ devient l'angle entre ce vecteur $\vec{\boldsymbol{\ell}}$ et le champ $\vec{\mathbf{B}}$*, et l'équation 8.3 peut s'exprimer sous la forme vectorielle suivante :

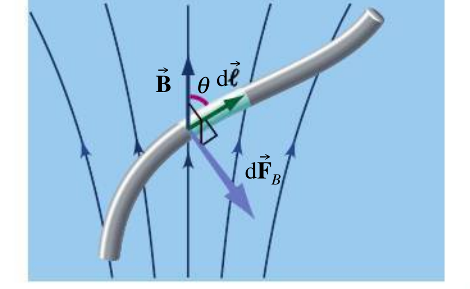
Force magnétique s'exerçant sur un conducteur parcouru par un courant

$$\vec{\mathbf{F}}_B = I\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (8.4a)$$

Comme dans le cas de l'équation 8.2, il est avantageux de repérer d'abord le plan qui contient le fil et $\vec{\mathbf{B}}$, la force étant orientée selon un axe perpendiculaire à ce plan. La règle de la main droite permet ensuite de choisir entre les deux sens possibles.

Dans l'éventualité où il y a N conducteurs parallèles parcourus par un même courant, l'équation 8.4*a* devient

$$\vec{\mathbf{F}}_B = NI\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (8.4b)$$



▲ **Figure 8.12**

La force magnétique sur un élément de fil parcouru par un courant est $d\vec{\mathbf{F}}_B = I\, d\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\mathbf{B}}$.

L'équation 8.4*a* n'est valable que pour un tronçon de fil *rectiligne* plongé dans un champ magnétique *uniforme*. Si l'une ou l'autre de ces conditions n'est pas respectée, il faut subdiviser le fil en segments infinitésimaux, appliquer l'équation 8.4*a* sur chacun d'eux et additionner (intégrer) leurs contributions. En somme, dans un tel cas, la force agissant sur un élément de fil infinitésimal $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ (figure 8.12) est

Force magnétique agissant sur un élément infinitésimal

$$d\vec{\mathbf{F}}_B = I\, d\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (8.5)$$

---

* Il pourrait paraître surprenant que l'angle ne soit pas mesuré plutôt entre la *vitesse de dérive* et le champ, ce qui serait le cas si on appliquait l'équation 8.2 à un électron individuel. Toutefois, comme les électrons ont une charge négative, le sens de la force magnétique est le même. En d'autres termes, les produits vectoriels $-\vec{\mathbf{v}}_d \times \vec{\mathbf{B}}$ et $+\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\mathbf{B}}$ pointent dans la même direction. En fait, l'équation 8.4*a* fonctionne aussi pour un courant constitué de charges positives en mouvement.

et la force totale sur le fil est donnée par l'intégrale des forces infinitésimales :

$$\vec{\mathbf{F}}_B = \int d\vec{\mathbf{F}}_B$$

Comme cette intégrale représente une *somme* et qu'on ne peut additionner directement les modules de vecteurs, on doit décomposer cette intégrale selon ses trois composantes :

$$F_{B_x} = \int dF_{B_x}\,; \qquad F_{B_y} = \int dF_{B_y}\,; \qquad F_{B_z} = \int dF_{B_z}$$

En pratique, deux de ces trois intégrales sont souvent nulles. Pour évaluer celle qui reste, il est nécessaire d'employer une méthode similaire à celle décrite à la section 2.5. En particulier, il faut habituellement faire des transformations de variables pour tout exprimer en fonction d'une même variable d'intégration (habituellement une des coordonnées du système d'axes ou encore une coordonnée angulaire). Cela implique donc, notamment, d'exprimer $d\ell$ en fonction de cette coordonnée. L'exemple 8.7 ci-dessous illustre cette méthode.

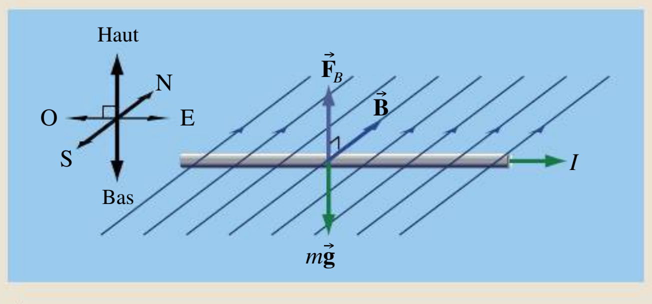
Exemple 8.4

Un fil rectiligne de 0,050 kg, long de 30 cm, suit la direction est-ouest. Le champ magnétique terrestre en ce point est horizontal, orienté vers le nord et a un module de 0,8 G. Pour quel courant la force magnétique compense-t-elle le poids du fil ?

Solution

Le champ magnétique terrestre est orienté vers le nord (figure 8.13). Pour que la force magnétique soit verticale et orientée vers le haut, le courant doit circuler d'ouest en est. Comme $\theta = 90°$, l'équation 8.3 nous donne $F_B = I\ell B$. Ce module doit être égal à celui du poids, mg. Par conséquent,

$$I = \frac{mg}{\ell B} = 2{,}04 \times 10^4 \text{ A}$$



▲ **Figure 8.13**

Le fil et le champ magnétique sont dans le plan horizontal. La force magnétique est verticale et orientée vers le haut.

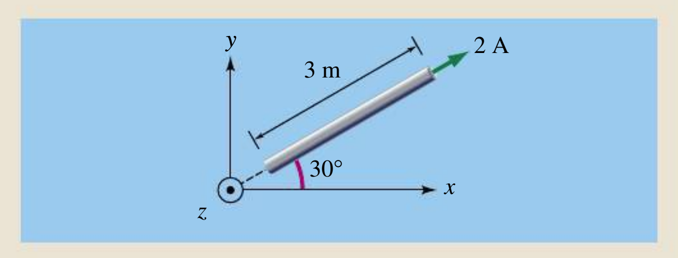
Un fil de cuivre ordinaire fondrait rapidement s'il était parcouru par un tel courant, mais pas un fil supraconducteur. ■

Exemple 8.5

Un fil long de 3 m porte un courant de 2 A. Il se trouve dans le plan xy, fait un angle de 30° avec l'axe des x (figure 8.14) et est placé dans un champ magnétique uniforme $B = 0{,}5$ T. Calculer la force magnétique $\vec{\mathbf{F}}_B$ s'exerçant sur le fil si le champ magnétique est orienté : (a) vers les x positifs ; (b) vers les y positifs ; (c) vers les z positifs.

Solution

(a) L'angle θ entre le fil et $\vec{\mathbf{B}}$ est de 30°. Par l'équation 8.3, $F_B = (2 \text{ A})(3 \text{ m})(0{,}5 \text{ T}) \sin 30° = 1{,}50$ N. Cette force étant perpendiculaire à la fois au fil et au champ, elle est parallèle à l'axe des z. Si on applique la règle de la main droite, le pouce pointe vers la page, c'est-à-dire dans le sens des z négatifs. Ainsi, $\vec{\mathbf{F}}_B = -1{,}50\vec{\mathbf{k}}$ N.



▲ **Figure 8.14**

Un fil parcouru par un courant est placé dans un champ magnétique.

(b) L'angle θ vaut 60°, et on trouve $\vec{\mathbf{F}}_B = +2{,}60\vec{\mathbf{k}}$ N.

(c) L'angle θ vaut 90°, et on trouve $F_B = 3{,}00$ N dans le plan xy, à 60° sous l'axe des x. Pour exprimer ce résultat en fonction des composantes vectorielles, on doit décomposer en x et en y, ce qui donne $\vec{\mathbf{F}}_B = (1{,}50\vec{\mathbf{i}} - 2{,}60\vec{\mathbf{j}})$ N.

Exemple 8.6

Un fil rectiligne est orienté selon une diagonale centrale d'un cube imaginaire d'arête $a = 20$ cm et il est parcouru par un courant de 5 A (figure 8.15 ; notez l'orientation du système d'axes). Trouver la force qu'un champ uniforme $\vec{\mathbf{B}} = 0{,}6\vec{\mathbf{j}}$ T exerce sur le fil.

Solution

Pour utiliser l'équation 8.3, il faudrait trouver l'angle entre $\vec{\ell}$ et $\vec{\mathbf{B}}$. Nous pouvons éviter ce calcul en utilisant la notation des vecteurs unitaires, puis en ayant recours à l'équation 8.4*a*. ■

D'après la figure 8.15, on voit que

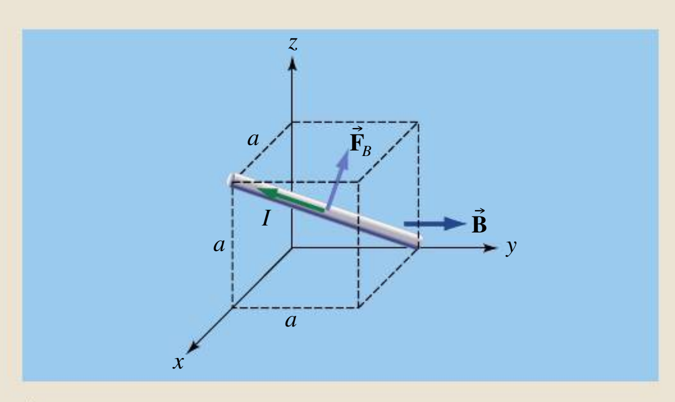
$$\vec{\ell} = a\vec{\mathbf{i}} - a\vec{\mathbf{j}} + a\vec{\mathbf{k}}$$

La force magnétique est donc

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{F}}_B &= I\vec{\ell} \times \vec{\mathbf{B}} = IaB(\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}}) \times (\vec{\mathbf{j}}) \\ &= IaB(-\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{k}})\end{aligned}$$

La force est située dans le plan xz et a pour module

$$F_B = \sqrt{2}IaB = 0{,}848 \text{ N}$$



▲ **Figure 8.15**

Un fil rectiligne est orienté selon une diagonale centrale d'un cube, c'est-à-dire une des grandes diagonales comportant les trois composantes. La force magnétique est parallèle à la diagonale d'une des faces du cube, c'est-à-dire une diagonale ne comportant que deux composantes. La notation utilisant les vecteurs unitaires ($\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$) est utile dans ce genre de cas.

Exemple 8.7

Un fil conducteur en forme de demi-cercle de rayon R est parcouru par un courant I et son plan est perpendiculaire à un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ (figure 8.16). Quelle force magnétique la boucle demi-circulaire subit-elle ?

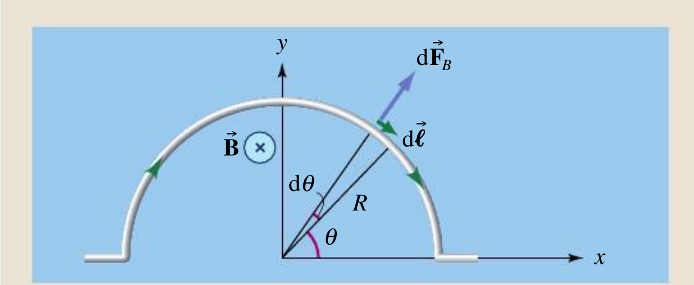


Figure 8.16

▲ La force magnétique infinitésimale $\mathrm{d}\vec{\mathbf{F}}_B$ est celle qui agit sur un élément de courant de longueur $\mathrm{d}\vec{\ell}$. Par symétrie, la composante en x de la force totale sur la boucle demi-circulaire est nulle.

Solution

Considérons d'abord un élément de courant arbitraire de longueur $\mathrm{d}\ell$. Quel que soit l'endroit où il est situé le long de la portion semi-circulaire du conducteur, il est intercepté par un angle $\mathrm{d}\theta$ identique* (figure 8.16). Il est donc avantageux d'en exprimer la longueur en fonction de cet angle : $\mathrm{d}\ell = R\,\mathrm{d}\theta$. Puisqu'il est perpendiculaire à $\vec{\mathbf{B}}$, le module de la force agissant sur cet élément de courant est $\mathrm{d}F_B = I\,\mathrm{d}\ell\,B = I(R\,\mathrm{d}\theta)B$, et la force est radiale et orientée vers l'extérieur, tel qu'illustré.

On note tout d'abord que $\mathrm{d}F_{B_z} = 0$, donc qu'il n'y a aucune force sur le fil selon z. Ensuite, si on considère la force selon x, on voit par symétrie qu'à tout élément situé à droite de l'axe des y correspond un élément équivalent à gauche. Les composantes $\mathrm{d}F_{B_x}$ des forces agissant sur ces éléments s'annulent par paires. Cet argument nous évite d'avoir à intégrer selon x et nous pouvons écrire directement

$$F_{B_x} = \int \mathrm{d}F_{B_x} = 0$$

* Comparez cette situation à celle, similaire, de la figure 2.40, p. 64, ou à celle, différente, de la figure 2.36, p. 61.

Il ne reste donc plus qu'à considérer la situation selon y. La composante selon cet axe de la force magnétique $d\vec{\mathbf{F}}_B$ agissant sur l'élément de courant représenté sur la figure est

$$dF_{B_y} = dF_B \sin\theta = IRB\, d\theta \sin\theta$$

Pour obtenir la force totale selon y, on intègre, d'où

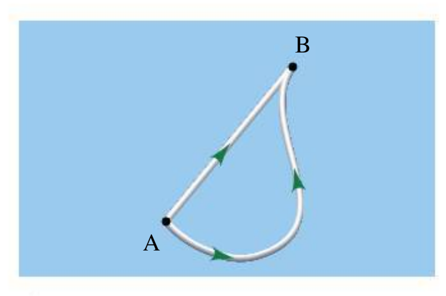
$$F_{B_y} = IRB\int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta = IRB[-\cos\theta]\Big|_0^{\pi} = 2IRB$$

La force exercée sur le demi-cercle est donc

$$\vec{\mathbf{F}}_B = 2IRB\vec{\mathbf{j}} = I(2R)B\vec{\mathbf{j}}$$

On remarque que cette expression correspond à la force qui serait exercée sur un fil rectiligne de longueur $2R$ qui joindrait les extrémités du demi-cercle. ■

Le résultat du dernier exemple peut être généralisé à tous les fils plongés dans un champ magnétique *uniforme*, quelle que soit leur forme. Ainsi, on peut montrer (voir le problème P2) que la force totale subie par un tel fil de forme quelconque est égale à celle que subirait un fil rectiligne reliant ses extrémités, pourvu qu'il transporte le même courant (figure 8.17).



▲ **Figure 8.17**

Dans un champ *uniforme*, la force magnétique s'exerçant sur un fil incurvé joignant les points A et B est la même que la force agissant sur un fil rectiligne joignant les mêmes points, pourvu qu'il transporte le même courant.

Ce résultat a une autre conséquence : si un courant fait un parcours fermé, on peut choisir deux points quelconques A et B de ce parcours et réaliser que la force exercée sur le courant passant de A vers B est égale et opposée à celle qui est exercée sur le courant de B vers A. En conséquence :

Force sur une boucle de courant

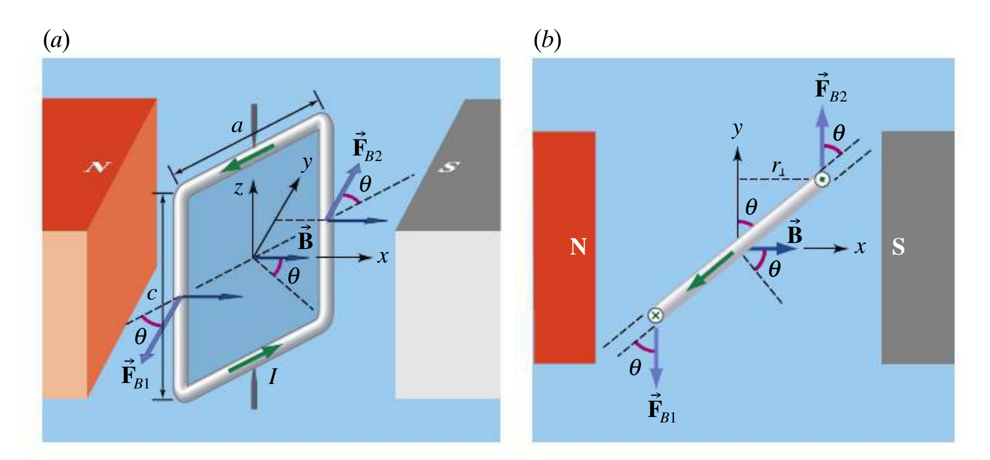
Dans un champ magnétique *uniforme*, la force magnétique résultante sur toute boucle *fermée* parcourue par un courant est nulle.

8.4 LE MOMENT DE FORCE SUR UNE BOUCLE DE COURANT

Nous avons montré à la section précédente que les forces agissant sur une boucle de courant plongée dans un champ magnétique uniforme ont une résultante nulle. Mais nous allons voir qu'elles peuvent quand même faire *pivoter* la boucle.

Pour le montrer, considérons un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}} = B\vec{\mathbf{i}}$, où se trouve une boucle de courant en forme de cadre rectangulaire de côtés a et c, qui peut pivoter autour d'un axe vertical (figure 8.18*a*). La figure 8.18*b* représente le même cadre vu d'en haut, si l'on regarde vers le bas dans le sens des z négatifs. Pour décrire cette situation, il est pratique d'utiliser l'angle θ entre la *normale* au plan du cadre et le champ magnétique.

Sur les deux figures, on a représenté les forces opposées agissant sur les côtés verticaux. On voit qu'elles feront pivoter la boucle. Puisque ces forces gardent la même orientation quand la boucle pivote, on déduit que cette rotation se poursuivra jusqu'à ce que l'angle θ devienne nul : les forces sont alors concourantes (alignées) et ont tendance à écarter les côtés de la boucle, mais pas à la faire tourner. Quant aux forces sur les côtés du haut et du bas (horizontaux), elles sont concourantes en tout temps ; nous ne les avons donc pas illustrées.



▶ **Figure 8.18**
Un cadre parcouru par un courant, libre de pivoter dans un champ magnétique. Les forces magnétiques agissant sur les côtés verticaux produisent un moment de force par rapport à l'axe central. (*a*) Le cadre vu de côté ; (*b*) le cadre vu d'en haut.

La tendance d'une force à causer une rotation est son *moment* (voir la section 11.5 du tome 1). On peut calculer le moment de force qui cause la rotation uniquement à partir des deux forces illustrées, qui sont

$$\vec{\mathbf{F}}_{B1} = I(-c\vec{\mathbf{k}}) \times (B\vec{\mathbf{i}}) = -IcB\vec{\mathbf{j}}$$
$$\vec{\mathbf{F}}_{B2} = I(+c\vec{\mathbf{k}}) \times (B\vec{\mathbf{i}}) = +IcB\vec{\mathbf{j}}$$

Le bras de levier pour chacune de ces forces est $r_\perp = (a/2)\sin\theta$, où θ est l'angle que nous avons défini plus tôt, entre le champ magnétique et la perpendiculaire à la boucle ; le module du moment de force total produit par ces deux forces par rapport à l'axe est donc

$$\tau = 2(IcB)\left(\frac{a}{2}\sin\theta\right) = IAB\sin\theta$$

où $A = ac$ est l'aire du cadre. Pour un cadre comportant N **spires** (une spire est un tour complet de fil), le module du moment de force est N fois plus grand. On a donc

Module du moment de force s'exerçant sur une boucle de courant

$$\tau = NIAB\sin\theta \qquad (8.6)$$

Cette équation s'applique à toute boucle d'aire A même si elle n'est pas rectangulaire. Le plus souvent, les boucles de courant ont d'ailleurs des spires circulaires. Le moment de force exercé sur une spire parcourue par un courant dans un champ magnétique est utilisé dans les moteurs électriques et était utilisé pour faire tourner l'aiguille dans les anciens instruments de mesure analogiques.

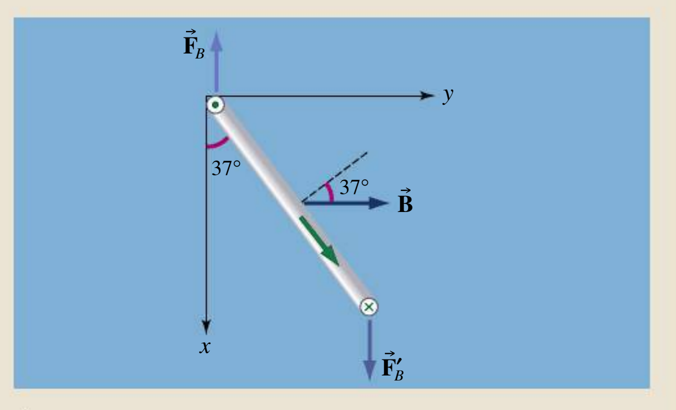
Si le champ magnétique n'est pas uniforme, l'équation 8.6 demeure valable en première approximation, mais à la condition que la boucle de courant soit petite (le champ local est alors presque uniforme et on peut utiliser dans l'équation 8.6 la valeur de B au centre de la boucle). Par contre, une boucle de courant dans une telle situation subira *aussi* une force résultante non nulle. Elle aurait donc deux comportements : 1) pivoter pour aligner son plan perpendiculairement au champ et 2) accélérer dans la direction de la force magnétique résultante. Nous verrons ci-dessous que ce comportement est analogue à celui du dipôle électrique.

En terminant, soulignons qu'une boucle de courant a un comportement analogue à celui d'une aiguille de boussole : quand elles sont plongées dans un champ magnétique, la première pivote jusqu'à ce que sa normale forme un angle $\theta = 0$ avec le champ, exactement comme la seconde pivote jusqu'à former

un angle θ = 0 avec le champ. Nous verrons aussi que leur comportement est semblable quand on les considère comme des sources de champ magnétique (comparez les figures 8.1*a*, p. 308, et 9.13, p. 367). En conséquence, la boucle de courant est elle aussi un *dipôle magnétique*.

Exemple 8.8

Le cadre carré de la figure 8.19 a des côtés de longueur 20 cm. Il comporte cinq spires et il est parcouru par un courant de 2 A. La normale au cadre fait un angle de 37° avec un champ uniforme $\vec{\mathbf{B}} = 0{,}5\vec{\mathbf{j}}$ T. Trouver le module du moment de force sur le cadre.



▲ **Figure 8.19**
On peut déterminer le moment de force s'exerçant sur le cadre carré en calculant les forces magnétiques agissant sur les côtés verticaux ou directement à l'aide de l'équation 8.6.

Solution

D'après l'équation 8.6,

$$\begin{aligned}\tau &= NIAB \sin\theta \\ &= (5)(2\text{ A})(0{,}2\text{ m})^2(0{,}5\text{ T})\sin 37° \\ &= 0{,}120\text{ N·m}\end{aligned}$$

Ce moment de force a pour effet de faire pivoter la boucle pour que son plan soit perpendiculaire au champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$. ■

Le moment dipolaire magnétique

À la section 8.1, nous avons souligné qu'un dipôle magnétique a parfois un comportement analogue à celui d'un dipôle électrique. Or, nous avons défini à la section 2.6 le moment dipolaire électrique $\vec{\mathbf{p}}$ qui nous a permis d'exprimer le moment de force subi par un dipôle électrique comme $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}}$. Par analogie, nous définissons le **moment dipolaire magnétique** $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ qui nous permettra d'exprimer le moment de force sur un dipôle magnétique comme

Moment de force exercé sur un dipôle magnétique

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{\mu}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (8.7)$$

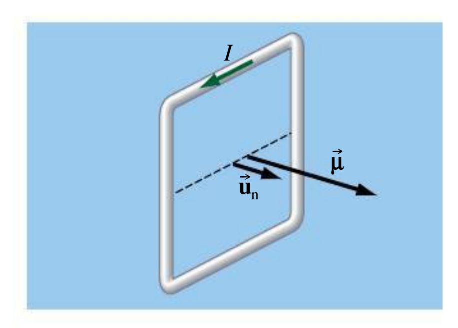
Ce moment de force a tendance à aligner le moment dipolaire magnétique $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ sur le champ $\vec{\mathbf{B}}$, tout comme le moment de force donné par $\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}}$ a tendance à aligner le moment dipolaire électrique $\vec{\mathbf{p}}$ sur le champ $\vec{\mathbf{E}}$. Ces équations sont exactes si le champ est uniforme, approximatives sinon.

Si on mesure le moment dipolaire magnétique $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ de l'aiguille d'une boussole, l'équation 8.7 donnera aussi le moment de force qu'elle subit et qui a tendance à l'aligner sur le champ $\vec{\mathbf{B}}$. L'équation 8.7 est valable quelle que soit la nature du dipôle magnétique.

En comparant l'équation 8.7 avec l'équation 8.6, on déduit qu'il faut définir le moment dipolaire magnétique d'une boucle de courant comme

Moment dipolaire magnétique d'une boucle de courant

$$\vec{\boldsymbol{\mu}} = NIA\vec{\mathbf{u}}_n \qquad (8.8)$$



▲ **Figure 8.20**

Le sens du moment dipolaire magnétique $\vec{\mu}$ est donné par la règle de la main droite : si vous refermez vos doigts dans le sens du courant, votre pouce tendu donne l'orientation de $\vec{\mathbf{u}}_n$.

L'unité SI de moment dipolaire magnétique est l'ampère-mètre carré (A·m^2). Le vecteur unitaire $\vec{\mathbf{u}}_n$ est par définition perpendiculaire au plan de la boucle de courant et son sens est donné par la règle de la main droite : si vous refermez les doigts de votre main droite dans le sens du courant, votre pouce est orienté dans le sens de $\vec{\mathbf{u}}_n$ (figure 8.20).

De nombreuses formes de vie s'orientent grâce au champ magnétique terrestre. Cette capacité à percevoir le champ, appelée *magnétoception*, a été clairement établie chez des bactéries et des algues, où les membranes cellulaires contiennent des creux entourant de petits cristaux de magnétite (Fe_3O_4). Ces cristaux agissent comme des dipôles plongés dans le champ magnétique terrestre : ils subissent un moment de force qui tend à les aligner sur ce champ. La rotation de ces cristaux affecte des protéines spécifiques situées dans la membrane les entourant.

On sait que les abeilles, des drosophiles et certains animaux perçoivent aussi le champ magnétique terrestre. Par exemple, les pigeons voyageurs sont capables de détecter des fluctuations de champ magnétique de moins de 2 G. Mais dans bien des cas, il n'y a pas d'explication clairement établie quant au mécanisme utilisé. Des dipôles de Fe_3O_4, qu'on a trouvé dans les membranes de certains neurones, peuvent être en cause. Mais un autre mécanisme est possible : des protéines appelées *cryptochromes*, trouvées dans la rétine, forment en présence de lumière bleue deux radicaux chimiques qui possèdent, en raison d'un phénomène quantique, des moments magnétiques couplés. Le champ magnétique terrestre, en agissant sur ce couplage, changerait la stabilité de la protéine et pourrait provoquer un changement de conformation.

Quelle que soit la protéine en jeu dans chaque cas, elles ont toutes en commun que leur réaction au champ magnétique amorce une cascade d'événements (par exemple, des influx nerveux) que le sujet peut utiliser pour s'orienter. ●

L'analogie entre les équations $\vec{\tau} = \vec{\mathbf{p}} \times \vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{\mathbf{B}}$ nous permet de faire aussi une analogie avec l'équation 2.25, $U_E = -\vec{\mathbf{p}} \cdot \vec{\mathbf{E}}$, donnant l'énergie potentielle d'un dipôle électrique dans un champ électrique, et ainsi d'obtenir

$$U_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{\mathbf{B}} \tag{8.9}$$

qui donne l'énergie potentielle d'un dipôle magnétique dans le champ magnétique. Comme pour le dipôle électrique, nous verrons qu'on pose $U_B = 0$ lorsque l'angle entre $\vec{\mu}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ est égal à 90°.

Pour démontrer l'équation 8.9 de façon plus formelle, il suffit de répéter la démarche ayant conduit à l'équation 2.25 : quand le dipôle magnétique pivote de θ_i à θ_f, un travail conservatif $W = -\int \tau \, d\theta$ est fait. On pose ensuite $\Delta U_B = -W$, d'où

$$\Delta U = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \mu B \sin\theta \, d\theta = -\mu B \cos\theta_f + \mu B \cos\theta_i$$

On choisit ensuite que U_f et U_i correspondent respectivement aux premier et second termes du membre de droite, ce qui équivaut effectivement à choisir la référence $U_B = 0$ en $\theta = 90°$. On obtient $U_B = -\mu B \cos\theta$, ce qui est identique à l'équation 8.9.

La force exercée sur un dipôle

Nous allons maintenant voir que l'analogie entre les dipôles électrique et magnétique s'étend aussi au cas de la *force résultante* qu'ils subissent. Quand le champ est uniforme, cette force résultante est nulle dans les deux cas. Mais après s'être aligné sur les lignes de champ d'un champ $\vec{\mathbf{E}}$ non uniforme, un dipôle électrique

subit une force résultante : si on choisit un axe des x parallèle aux lignes de champ, nous avons vu à la section 2.6 qu'on a

$$F_x = p\frac{dE}{dx}$$

Par analogie, nous allons admettre sans démonstration qu'un dipôle magnétique $\vec{\mu}$, après s'être aligné sur les lignes de champ d'un champ $\vec{B}$ non uniforme, subit une force résultante et que

$$F_x = \mu\frac{dB}{dx}$$

C'est pour cette raison qu'une aiguille aimantée ne fait pas que pivoter lorsqu'on l'approche d'un des pôles d'un aimant droit ; elle subit en plus une force attractive ou répulsive. En effet, le champ à proximité du pôle d'un aimant est non uniforme. La force subie par une aiguille de moment dipolaire $\vec{\mu}$ est proportionnelle au module μ de même qu'au taux de variation du champ. Nous reviendrons à la section 9.5 sur l'interaction entre deux dipôles magnétiques.

Exemple 8.9

Soit la situation de l'exemple 8.8. Trouver : (a) le moment dipolaire magnétique ; (b) le moment de force (vectoriel) s'exerçant sur le cadre ; (c) le travail que doit fournir un agent extérieur pour faire tourner le cadre de sa position d'énergie minimale à la position donnée.

Solution

(a) La figure 8.21 montre que $\vec{u}_n = -\sin 37°\vec{i} + \cos 37°\vec{j} = -0{,}602\vec{i} + 0{,}799\vec{j}$. Rappelons que $\vec{u}_n$ a pour module 1. Le moment magnétique est

$$\begin{aligned}\vec{\mu} &= NIA\vec{u}_n = (5)(2\text{ A})(0{,}2\text{ m})^2(-0{,}602\vec{i} + 0{,}799\vec{j})\\ &= -0{,}241\vec{i} + 0{,}319\vec{j}\text{ A·m}^2\end{aligned}$$

(b) On peut trouver le moment de force en calculant d'abord les forces magnétiques agissant sur les côtés parallèles à l'axe des z. Mais nous choisissons d'utiliser l'équation 8.7 :

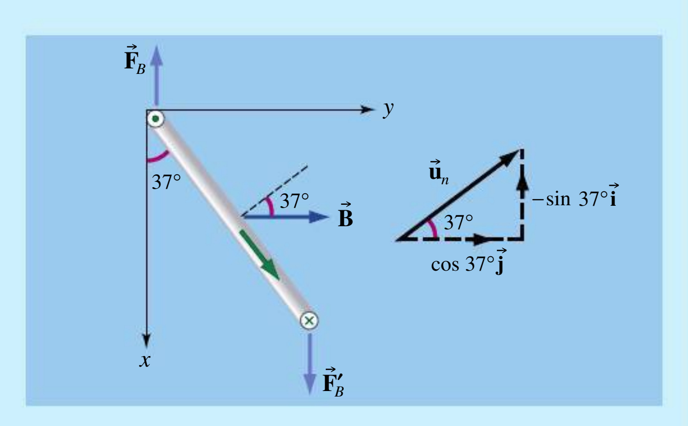
$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{\mu} \times \vec{B} = (-0{,}241\vec{i} + 0{,}319\vec{j}) \times (0{,}5\vec{j})\\ &= 0{,}120\vec{k}\text{ N·m}\end{aligned}$$

Pointant vers l'axe des z négatifs (figure 8.21), le moment de force (de sens horaire selon la perspective de la figure) a tendance à orienter $\vec{\mu}$ parallèlement à $\vec{B}$, c'est-à-dire à aligner le plan de la boucle perpendiculairement au champ.

(c) L'énergie potentielle du cadre est $U = -\mu B \cos\theta$, avec $\mu = NIA = 0{,}4$ A·m^2 et $B = 0{,}5$ T. Sa position d'énergie minimale est $\theta = 0$. Le travail extérieur, $W_{ext} = +\Delta U$, nécessaire pour le faire tourner dans la position donnée, est donc

$$\begin{aligned}U_f - U_i &= (-\mu B\cos 37°) - (-\mu B\cos 0°)\\ &= (0{,}4)(0{,}5)(1 - 0{,}8) = 0{,}0403\text{ J}\end{aligned}$$

Le travail extérieur est positif puisque le moment dipolaire tourne en s'éloignant de la direction du champ. Le dipôle emmagasine donc de l'énergie potentielle magnétique.



▲ **Figure 8.21**

On peut trouver le moment de force sur le cadre carré en calculant d'abord les forces agissant sur les côtés verticaux ou, comme on le fait ici, en déterminant le moment dipolaire magnétique. Le moment de force a tendance à aligner le moment magnétique parallèlement au champ.

Exemple 8.10

Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène (voir la section 9.7 du tome 3), un électron décrit une orbite circulaire autour d'un proton stationnaire. Le rayon de l'orbite est de $0{,}53 \times 10^{-10}$ m et la vitesse de l'électron a un module de $2{,}2 \times 10^6$ m/s. (a) Quel est le module du moment dipolaire magnétique attribuable au mouvement orbital ? (b) Écrire la relation entre le moment magnétique et le moment cinétique orbital de l'électron.

Solution

(a) Le courant moyen correspondant au mouvement de l'électron est $I = \Delta q/\Delta t = e/T$, où $T = 2\pi r/v$ est la période de l'orbite. Le module du moment dipolaire magnétique de cette « boucle de courant » est

$$\mu = IA = \left(\frac{ev}{2\pi r}\right)(\pi r^2) = \frac{evr}{2} \qquad \text{(i)}$$

En remplaçant les variables par leur valeur dans l'équation (i), on trouve une quantité appelée le *magnéton de Bohr* :

$$\mu_B = \tfrac{1}{2}(1{,}6 \times 10^{-9}\ \text{C})(2{,}2 \times 10^6\ \text{m/s})(0{,}53 \times 10^{-10}\ \text{m}) = 9{,}34 \times 10^{-24}\ \text{A·m}^2$$

Cette quantité est une unité pratique encore utilisée aujourd'hui pour mesurer les moments dipolaires magnétiques des atomes.

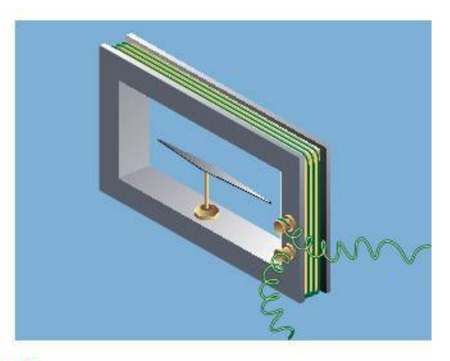
(b) Le module du moment cinétique d'une particule en orbite circulaire est $L = mvr$ (voir le chapitre 12 du tome 1). D'après l'équation (i), nous avons $\mu = evr/2$. Donc, en notation vectorielle,

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}\vec{\mathbf{L}} \qquad \text{(ii)}$$

Le signe négatif indique que les vecteurs sont de sens opposés.

Le principe du fonctionnement du galvanomètre

La pile voltaïque inventée par Volta en 1800 fit considérablement avancer les recherches en électricité, car elle permettait de produire un courant continu. Mais avant 1820, la présence d'un courant électrique ne pouvait être détectée que par une élévation de température dans un fil, par les transformations chimiques se produisant dans une pile ou par la sensation produite par le courant lorsqu'il passe sur la langue. Ces méthodes ne se prêtaient pas à des *mesures* précises du courant. Peu après la découverte d'Œrsted, on réalisa que la déviation de l'aiguille d'une boussole pouvait servir à mesurer un courant. Johann Schweigger (1779-1857) eut l'idée de former une bobine en enroulant un grand nombre de spires autour d'un cadre rectangulaire de façon à accentuer le champ magnétique produit par le courant. Quand une boussole était ensuite placée au centre de ce cadre (figure 8.22), l'effet devenait plus facile à détecter. (Nous reparlerons de la production d'un champ magnétique par un courant au chapitre 9.)



▲ **Figure 8.22**

Un des premiers instruments servant à détecter un courant. L'aiguille aimantée est déviée à partir de sa position normale, parallèle au champ terrestre, lorsqu'un courant circule dans le cadre.

S'inspirant de ce montage, Arsène d'Arsonval (1851-1940) le perfectionna pour confectionner ce que l'on appelle un *galvanomètre à cadre mobile*, instrument encore utilisé jusqu'à récemment, avant l'invention d'appareils numériques suffisamment sensibles, pour mesurer un courant. Le courant circule dans un cadre comportant un grand nombre de spires de fil fin. Le cadre est suspendu ou pivote dans un champ magnétique extérieur, tout en étant relié à un ressort de torsion (figure 8.23). Lorsque le courant circule dans le cadre, le module du moment de force dû au champ magnétique extérieur $\vec{\mathbf{B}}$ est

$$\tau_B = \mu B \sin\theta = NIAB \sin\theta$$

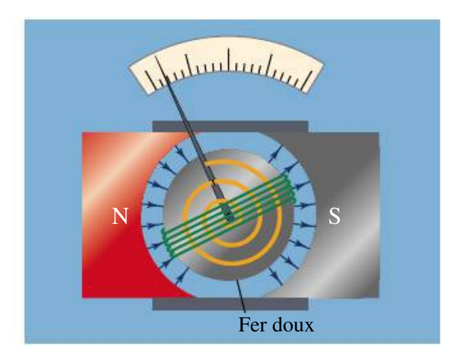
où θ est l'angle entre $\vec{\mu}$ et $\vec{\mathbf{B}}$. Le moment de force mécanique exercé par le ressort de torsion s'oppose au moment de force dû au champ magnétique. Ce moment de rappel du ressort obéit à la loi de Hooke, de sorte que son module est :

$$\tau_{\text{res}} = \kappa\phi$$

où ϕ est l'angle de torsion du ressort et κ la constante de torsion. Le cadre s'immobilise lorsque ces deux moments s'équilibrent :

$$NIAB \sin\theta = \kappa\phi$$

Cette équation peut servir à déterminer le courant I. Toutefois, le facteur $\sin\theta$ introduit une complication puisqu'il rend l'échelle non linéaire. Pour qu'elle soit linéaire, les faces des pôles de l'aimant doivent être cylindriques (figure 8.23).



▲ **Figure 8.23**

Le principe fondamental d'un galvanomètre d'Arsonval. Un cadre est bobiné sur un morceau de fer cylindrique. Lorsqu'un courant circule, le cadre est soumis à un moment de force magnétique et au moment de force mécanique de rappel du ressort.

Dans ce cas, les lignes de champ sont essentiellement radiales* au lieu d'être uniformes (pour contribuer à ce qu'elles demeurent radiales, on place un cylindre de fer doux à l'intérieur du cadre). Ainsi, comme le plan du cadre est toujours parallèle aux lignes de champ et le moment dipolaire magnétique, toujours normal aux lignes, sin $\theta = 1$ et

$$\phi = \frac{NAB}{\kappa} I$$

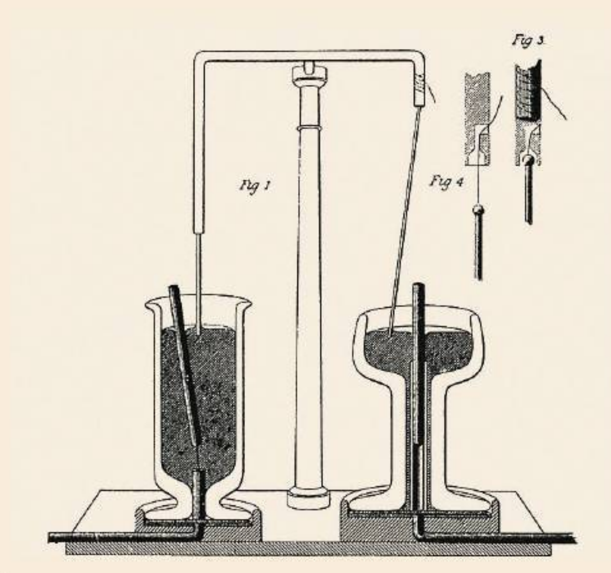
Dans ces conditions, la déviation de l'aiguille est directement proportionnelle au courant. Un bon galvanomètre peut enregistrer une intensité de 1 μA, et les meilleurs appareils peuvent mesurer des courants très faibles de l'ordre de 1 pA.

APERÇU HISTORIQUE

Le moteur électrique

La découverte par Œrsted du champ magnétique produit par un fil conducteur comportait un aspect intrigant : les boussoles qu'on dispose autour d'un même fil s'orientent toutes selon une tangente à un cercle situé dans le plan perpendiculaire au fil (voir la figure 9.1*b*, p. 356). Si on interprète ce phénomène comme l'effet d'une force agissant sur les pôles de l'aiguille de la boussole (raisonnement considéré aujourd'hui comme incorrect), on en déduit que cette force agit en direction de cette tangente. Cette « circularité » de la force magnétique est une propriété qui la distingue nettement des forces centrales de gravitation ou des forces électrostatiques, qui agissent le long de la droite joignant les particules.

En juillet 1821, Michael Faraday réalisa une expérience grâce à laquelle il estimait avoir démontré cette nouvelle propriété. Il affirma qu'un pôle « isolé » (l'extrémité d'un long barreau aimanté) serait soumis à une force qui lui ferait décrire un trajet circulaire autour d'un fil parcouru par un courant. Ce phénomène est illustré du côté gauche de l'appareil sur la figure 8.24. Pour permettre au courant de circuler, il utilisait du mercure liquide. Faraday démontra également qu'un fil parcouru par un courant décrit un cercle autour d'un des pôles d'un aimant immobile. C'est ce qu'illustre le côté droit de la figure. Faraday avait ainsi produit le premier moteur électrique à courant continu ! Son appareil démontrait brillamment que les forces magnétiques pouvaient produire un mouvement mécanique continu, mais il n'eut malheureusement aucune application pratique.



▲ **Figure 8.24**
La démonstration par Michael Faraday du mouvement continu produit par une force magnétique. Ce fut le premier moteur.

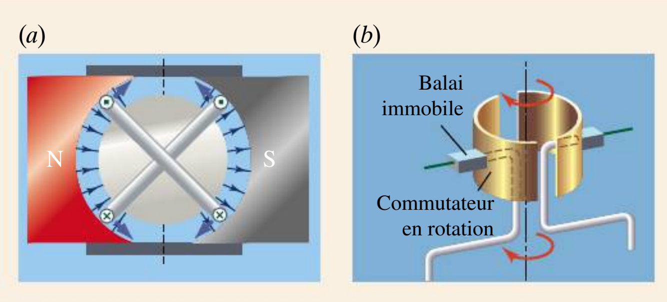
Le *moteur à courant continu* moderne fonctionne différemment du dispositif réalisé par Faraday : tout comme le galvanomètre, il effectue un travail en utilisant le moment de force sur un cadre parcouru par un courant dans un champ magnétique. Toutefois, si le courant circulant dans le cadre tournant conserve toujours le même sens, le sens du moment de force agissant sur le cadre s'inverse chaque fois que le plan du cadre passe par le plan pointillé de la figure 8.25*a*. On utilise donc, pour inverser le sens du courant au bon instant, après chaque demi-révolution, un dispositif appelé *commutateur*, qui est composé de deux demi-anneaux reliés électriquement au cadre (figure 8.25*b*). Le courant entre et sort du cadre en passant par deux contacts à balai qui glissent sur le commutateur. Aujourd'hui, ce commutateur mécanique est souvent remplacé par un dispositif

▶▶▶

* Évidemment, elles ne demeurent pas radiales au point de se croiser au centre de l'appareil, ce qui est impossible. Il suffit toutefois qu'elles demeurent momentanément radiales avant de s'incurver, puisque seule leur orientation au moment où elles rencontrent le cadre mobile importe.

plus durable qui effectue électroniquement la même tâche, à l'aide de transistors.

Le montage rudimentaire de la figure 8.25*a*, avec son unique boucle de courant, présente l'inconvénient suivant : le moment de force s'annule chaque fois que le courant doit changer de sens. Le moment de force produit subit donc des fluctuations. En pratique, on bobine dans les montages un grand nombre de spires de fil autour d'un cylindre en fer doux, chaque spire étant parallèle à un plan différent. Le moment de force fourni par le moteur est ainsi considérablement augmenté et relativement stable.



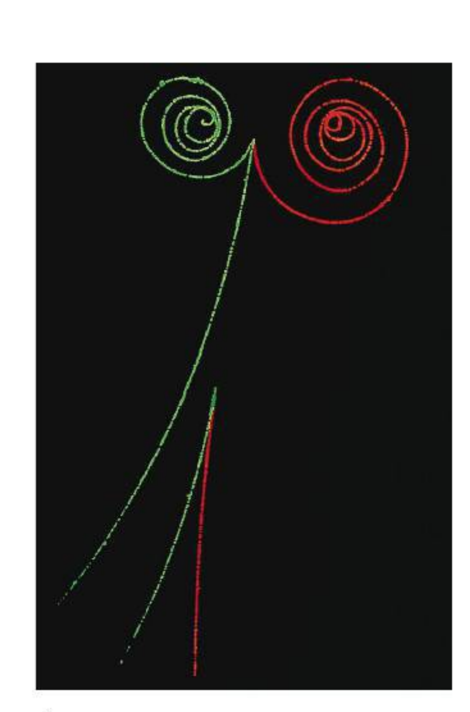
▲ **Figure 8.25**

(*a*) Le sens du moment de force magnétique s'inverse lorsque le cadre passe au niveau de la ligne pointillée au cours de sa rotation. (*b*) Un commutateur inverse le sens du courant dans le cadre, de sorte que le moment de force garde toujours le même sens.

8.5 LE MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE DANS UN CHAMP MAGNÉTIQUE

Nous avons vu à la section 8.2 qu'une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique est soumise à une force. Nous allons maintenant voir que, sous l'effet de cette force, elle décrit une trajectoire très différente de la trajectoire parabolique, étudiée à la section 2.4, qu'elle décrirait dans un champ *électrique* uniforme.

Cette capacité à imprimer une trajectoire à des particules libres permet au champ magnétique terrestre de nous protéger contre les particules cosmiques de haute énergie. Elle permet aussi diverses applications où le champ magnétique dévie et focalise des jets de particules chargées comme dans un tube à rayons cathodiques, confine et contrôle des gaz complètement ionisés (plasma) comme ceux utilisés dans la recherche sur la fusion nucléaire, sépare les particules élémentaires produites dans les accélérateurs de particules (figure 8.26 et photo de la page titre du chapitre), etc.



▲ **Figure 8.26**

Particules élémentaires décrivant des trajectoires circulaires sous l'effet d'un champ magnétique. À cause de la friction, leur vitesse diminue progressivement et on obtient une spirale (voir l'exercice E69). Les deux couleurs, ajoutées artificiellement, montrent que le sens de rotation dépend du signe de la charge de chaque particule.

Nous commençons notre étude par le cas simple d'une particule de charge positive animée d'une vitesse initiale $\vec{\mathbf{v}}$ perpendiculaire à un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}}$. La figure 8.27 représente cette situation selon deux perspectives différentes. Comme $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ sont perpendiculaires, la particule est soumise à une force de module constant $F_B = qvB$, orientée perpendiculairement à $\vec{\mathbf{v}}$. Il s'agit donc d'une force centripète ; cette force fait en sorte que la particule décrit un mouvement circulaire uniforme. D'après la deuxième loi de Newton appliquée selon un axe r orienté vers le centre du cercle, $\sum F_r = ma_r$, nous avons

Force magnétique produisant un mouvement circulaire uniforme

$$|q|vB = \frac{mv^2}{r} \qquad (8.10)$$

où r est le rayon du cercle. Si la charge q est négative, la particule décrit une trajectoire circulaire en sens inverse, mais l'équation 8.10 demeure valable. De cette équation, on tire

$$r = \frac{mv}{|q|B} \qquad (8.11)$$

Ainsi, le rayon de la trajectoire circulaire est directement proportionnel à la quantité de mouvement de la particule et inversement proportionnel au champ magnétique.

La vitesse de la particule ayant un module constant, elle correspond au rapport de la circonférence sur la période : $T = 2\pi r/v$. En substituant l'équation 8.11, on obtient

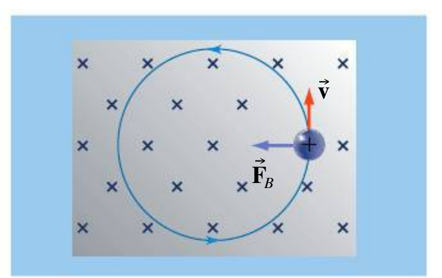
$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{|q|B} \qquad (8.12a)$$

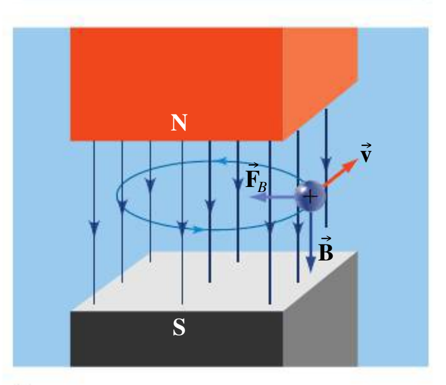
Puisque $f = 1/T$, la fréquence du mouvement circulaire uniforme f_c est



Fréquence du mouvement circulaire uniforme

$$f_c = \frac{|q|B}{2\pi m} \qquad (8.12b)$$





▲ **Figure 8.27**
Une particule chargée se déplaçant perpendiculairement aux lignes de champ décrit une trajectoire circulaire.

Étant donné son importance dans le fonctionnement d'un accélérateur de particules appelé le *cyclotron* (voir la section 8.7), f_c est souvent appelée **fréquence cyclotron**. L'indice « c » dans f_c renvoie à cette appellation. Les équations 8.12*a* et 8.12*b* permettent de tirer deux conclusions importantes :

(i) La période (et la fréquence) est indépendante de la vitesse de la particule.

(ii) Toutes les particules ayant le même rapport charge/masse, q/m, ont la même période et la même fréquence de rotation.

Exemple 8.11

Un électron d'énergie cinétique 10^3 eV se déplace perpendiculairement aux lignes d'un champ magnétique uniforme de module $B = 1$ G. (a) Quelles sont la période et la fréquence de son mouvement circulaire uniforme ? (b) Quel est le rayon de sa trajectoire circulaire ?

Solution

(a) D'après l'équation 8.12*a*, la période est

$$T = \frac{2\pi m}{eB} = \frac{2(3{,}14)(9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})}{(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(10^{-4}\ \text{T})} = 3{,}57 \times 10^{-7}\ \text{s}$$

On pourrait penser que la grande fréquence, $f_c = 1/T = 2{,}8$ MHz, est due au fait que l'énergie cinétique, donc la vitesse, est considérable, mais ce serait incorrect : la période et la fréquence sont indépendantes de la vitesse.

(b) Pour trouver le rayon à partir de l'équation 8.10, on doit d'abord déterminer la vitesse. Puisque $K = \frac{1}{2}mv^2 = 1{,}6 \times 10^{-16}$ J, on trouve $v = \sqrt{2K/m} = 1{,}87 \times 10^7$ m/s. (Si la vitesse de la particule se rapproche de la vitesse de la lumière, les effets prédits par la théorie de la relativité d'Einstein, que nous étudierons au chapitre 8 du tome 3, entraînent une modification de la définition de l'énergie cinétique ; en pratique, pour les vitesses inférieures à 3×10^7 m/s, soit un dixième de la vitesse de la lumière, on peut négliger les effets relativistes.)

Le rayon de la trajectoire circulaire est

$$r = \frac{mv}{eB} = \frac{(9{,}11 \times 10^{-31}\ \text{kg})(1{,}87 \times 10^7\ \text{m/s})}{(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(10^{-4}\ \text{T})} = 1{,}07\ \text{m}$$

Exemple 8.12

Un proton décrit un cercle de rayon 20 cm, perpendiculaire à un champ magnétique de module $B = 0{,}05$ T. Trouver : (a) le module de sa quantité de mouvement ; (b) son énergie cinétique en électronvolts.

Solution

Conformément à l'équation 8.10, la deuxième loi de Newton donne $evB = mv^2/r$. D'où on tire

$$\begin{aligned} v &= erB/m \\ &= \frac{(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(0{,}20\ \text{m})(0{,}05\ \text{T})}{1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg}} \\ &= 9{,}58 \times 10^5\ \text{m/s} \end{aligned}$$

(a) La quantité de mouvement est

$$\begin{aligned} p &= mv \\ &= (1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg}) \times (9{,}58 \times 10^5\ \text{m/s}) \\ &= 1{,}60 \times 10^{-21}\ \text{kg·m/s} \end{aligned}$$

(b) L'énergie cinétique est

$$\begin{aligned} K &= \tfrac{1}{2}mv^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg}) \times (9{,}58 \times 10^5\ \text{m/s})^2 \\ &= 7{,}66 \times 10^{-16}\ \text{J} = 4{,}79\ \text{keV} \end{aligned}$$

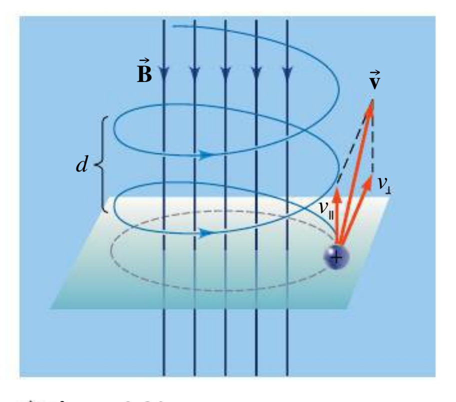
Exemple 8.13

Deux particules chargées se déplacent perpendiculairement à un champ magnétique uniforme. Leurs masses et leurs charges sont telles que $m_2 = 4m_1$ et $q_2 = 2q_1$. Quel est le rapport des rayons des orbites, sachant que les particules ont (a) la même vitesse ; (b) la même énergie cinétique ?

Solution

(a) À partir de $|q|vB = mv^2/r$, on trouve $r \propto mv/|q|$ (pour un champ $\vec{\mathbf{B}}$ de module constant). La particule 2 a une masse quatre fois plus grande et une charge deux fois plus grande que celles de la particule 1. Si sa vitesse est la même, son rayon sera donc $4 \times 1/2 = 2$ fois plus grand : $r_2/r_1 = 2$.

(b) Si les énergies cinétiques $\frac{1}{2}mv^2$ sont les mêmes, on doit avoir $v \propto 1/\sqrt{m}$. La particule 2 ayant une masse quatre fois plus grande que celle de la particule 1, elle aura une vitesse deux fois plus *petite*. Par $r \propto mv/|q|$, on trouve un rapport entre les deux rayons de $4 \times 0{,}5/2 = 1$: les deux rayons sont égaux.



▲ **Figure 8.28**

Une particule chargée dont la vitesse fait un certain angle avec le champ magnétique décrit une trajectoire hélicoïdale.

Le mouvement hélicoïdal

Considérons maintenant le mouvement d'une particule positive dont la vitesse a aussi une composante *parallèle* aux lignes d'un champ magnétique uniforme. Nous appelons $v_{\parallel}$ la composante de $\vec{\mathbf{v}}$ parallèle à $\vec{\mathbf{B}}$ et $v_{\perp}$ la composante de $\vec{\mathbf{v}}$ perpendiculaire à $\vec{\mathbf{B}}$ (figure 8.28). Comme précédemment, la composante perpendiculaire $v_{\perp}$ donne lieu à une force de module $|q|v_{\perp}B$ qui produit un mouvement circulaire de rayon $r = mv_{\perp}/|q|B$ et de période donnée par l'équation 8.12*a* ; toutefois, la composante parallèle $v_{\parallel}$ *ne change pas*. On obtient la superposition d'un mouvement circulaire uniforme perpendiculaire aux lignes de champ et d'un mouvement rectiligne uniforme parallèle aux lignes. Ces deux mouvements se combinent pour produire une trajectoire en spirale ou *hélicoïdale*. Le **pas de l'hélice** est le déplacement de la particule dans la direction des lignes de champ pendant une période, soit la distance d à la figure 8.28, donnée par

$$d = v_{\parallel}T = v_{\parallel}\frac{2\pi m}{|q|B} \qquad (8.13)$$

Le mouvement dans un champ non uniforme

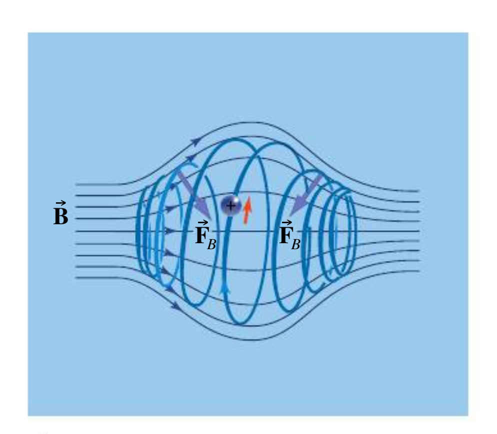
Dans un champ non uniforme, le rayon de la trajectoire varie. Si les autres variables ont des valeurs fixes, on peut voir d'après l'équation 8.10 ou 8.11 que

$r \propto 1/B$, ce qui signifie que le rayon décroît quand la particule se dirige là où le module du champ est plus élevé. Il se produit aussi un effet plus important, lié au fait que la particule est soumise à une force orientée vers la région où le champ est plus faible (figure 8.29). Cela est dû au fait que cette force doit demeurer perpendiculaire aux lignes de champ. Il en résulte que la composante de la vitesse le long des lignes de B, c'est-à-dire $v_{\|}$, n'est pas constante.

Si la particule se dirige vers la région où le champ est plus intense, elle peut être amenée à s'arrêter et à inverser le sens de son mouvement (à condition que v ne soit pas trop grande). Cette particularité est utilisée dans la conception des « bouteilles magnétiques » qui servent à confiner les plasmas à haute température dans les recherches sur la fusion. Le plasma ne peut pas être confiné dans un récipient ordinaire parce qu'il se refroidirait rapidement au contact des parois.

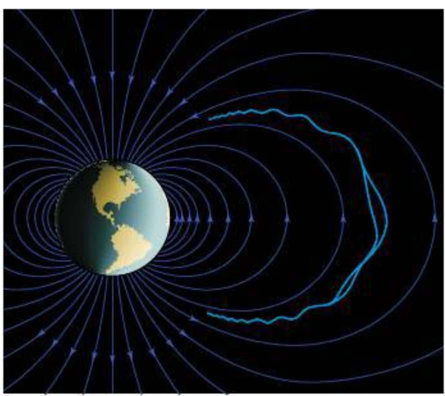


La forme de ces éruptions solaires montre qu'une force centripète agit sur elles. La seule façon d'expliquer cela est de concevoir que le Soleil produit un puissant champ magnétique.



▲ Figure 8.29

Dans un champ magnétique non uniforme, une particule chargée est soumise à une force orientée vers les régions où le champ est plus faible. Le sens du mouvement sur la trajectoire en spirale peut être inversé. C'est le principe de la « bouteille magnétique ».



▲ Figure 8.30

Les protons et les électrons de l'espace sont confinés par le champ magnétique terrestre. Comparez leur trajectoire (la ligne bleue) avec celle des charges dans une bouteille magnétique (figure 8.29).

Un autre exemple important du confinement magnétique est observé dans le champ magnétique terrestre. Les particules chargées provenant de l'espace, qu'elles soient associées au vent solaire ou au rayonnement cosmique, au lieu de percuter la Terre, sont déviées et décrivent des trajectoires en spirale le long des lignes de champ d'un pôle à l'autre (figure 8.30). Ces particules captives sont confinées dans des régions que l'on appelle *ceintures de Van Allen*, qui sont décrites dans le sujet connexe du chapitre 9. En l'absence de champ magnétique terrestre, ces particules à haute énergie atteindraient la surface et causeraient des mutations importantes chez tout être vivant qui y serait exposé. Il n'est pas évident de déterminer si la vie aurait pu apparaître en l'absence de cette protection naturelle, mais il est clair qu'elle ne se serait pas développée de la même façon. ●

Il est intéressant de noter qu'une bouteille magnétique a une faiblesse : une charge qui se déplace selon l'axe de symétrie du champ magnétique n'a aucune composante de vitesse perpendiculaire au champ. Elle se dirige donc en ligne droite vers l'extrémité de la bouteille et peut la quitter. En pratique, on perd moins de 5 % du plasma de cette façon. Dans le cas des bouteilles magnétiques naturelles que constituent les ceintures de Van Allen, les petites quantités de charges qui fuient à chaque extrémité excitent des molécules de la haute atmosphère et causent les aurores boréales.



Ce magnifique phénomène naturel, une aurore boréale, est dû à la petite quantité de charges que le champ magnétique terrestre n'arrive pas à confiner (voir le sujet connexe du chapitre 9).

8.6 LA COMBINAISON DES CHAMPS ÉLECTRIQUE ET MAGNÉTIQUE

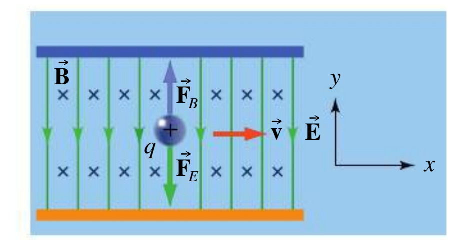
Lorsqu'une particule est soumise à un champ électrique et à un champ magnétique dans la même région, la force résultante agissant sur elle est la somme vectorielle de la force électrique $\vec{\mathbf{F}}_E = q\vec{\mathbf{E}}$ et de la force magnétique $\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$, soit

Force de Lorentz

$$\vec{\mathbf{F}} = q(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) \qquad (8.14)$$

Cette résultante est appelée **force de Lorentz**, d'après le physicien hollandais Hendrik A. Lorentz (1853-1928). La trajectoire d'une particule est hélicoïdale dans un champ magnétique uniforme et est parabolique dans un champ électrique uniforme. Lorsqu'elle est soumise aux deux champs simultanément, la particule a donc en général un mouvement assez complexe. Toutefois, nous allons maintenant voir que les cas particuliers où les champs sont perpendiculaires entre eux sont simples à analyser et s'avèrent fort utiles dans diverses applications. L'aperçu historique de la fin de cette section donnera aussi une application où les champs sont parallèles entre eux (voir la figure 8.35, p. 333).

Le sélecteur de vitesse



▲ **Figure 8.31**
Un sélecteur de vitesse. Dans une région où règnent un champ électrique et un champ magnétique perpendiculaires entre eux, seules les particules ayant une vitesse qui vérifie la condition $\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ ne sont pas déviées.

La figure 8.31 représente une région où un champ électrique $\vec{\mathbf{E}} = -E\vec{\mathbf{j}}$ est perpendiculaire à un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}} = -B\vec{\mathbf{k}}$. On projette dans cette région une particule de charge positive q avec une vitesse initiale $\vec{\mathbf{v}} = v\vec{\mathbf{i}}$. Les forces électrique et magnétique, $\vec{\mathbf{F}}_E = -qE\vec{\mathbf{j}}$ et $\vec{\mathbf{F}}_B = qvB\vec{\mathbf{j}}$, sont de sens opposés et vont s'annuler si elles ont le même module. Autrement dit, $\vec{\mathbf{F}}_E + \vec{\mathbf{F}}_B = q(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) = 0$ si

$$\vec{\mathbf{E}} = -\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$$

ou, en fonction des modules, si $E = vB$. Par conséquent, si un faisceau de particules a une certaine distribution de vitesse, seules les particules ayant une vitesse de module

$$v = \frac{E}{B} \qquad (8.15)$$

vont traverser la zone des champs perpendiculaires sans être déviées. On note que cette équation est valable pour des charges des deux signes. Les particules dont la vitesse est telle que $v > E/B$ subissent une plus grande force magnétique ($F_B > F_E$), et dans le cas où $v < E/B$, on a $F_B < F_E$. Dans les deux cas, il y a déviation, le sens de celle-ci dépendant du signe de q.

Ce montage de champs électrique et magnétique perpendiculaires s'appelle un **sélecteur de vitesse**. Il s'agit d'une façon pratique de mesurer les vitesses de particules chargées ou de les trier selon leur vitesse.

Le spectromètre de masse

Un **spectromètre de masse** est un dispositif qui sépare les particules chargées, en général des ions, selon leur rapport masse/charge. Si les charges sont toutes identiques, l'instrument peut servir à mesurer la masse des ions. L'aperçu historique à la fin de cette section présente le développement de la spectrométrie

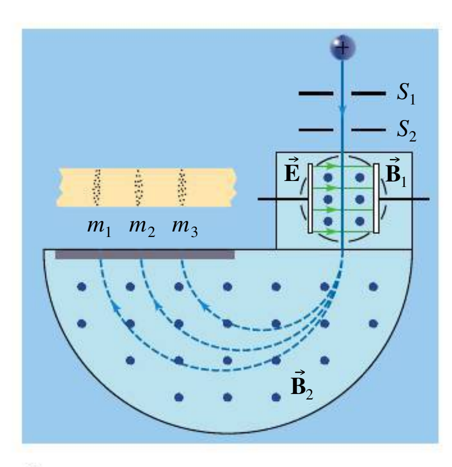
de masse ainsi que les nombreuses applications pratiques qu'elle a eues au cours de son histoire. La figure 8.32 représente un modèle de spectromètre de masse fabriqué par Kenneth T. Bainbridge (1904-1996) en 1933. Les particules chargées passent dans un collimateur constitué par les fentes S_1 et S_2, de sorte qu'il ne reste qu'un faisceau étroit. Celui-ci pénètre alors dans un sélecteur de vitesse où le champ magnétique est $\vec{\mathbf{B}}_1$ et le champ électrique perpendiculaire est $\vec{\mathbf{E}}$. Il s'ensuit que seules les particules de vitesse $v = E/B_1$ continuent en ligne droite et pénètrent dans la section suivante (analyseur), où il ne règne qu'un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}_2$. Les particules décrivent des trajectoires demi-circulaires et frappent une plaque photographique ou un détecteur numérique équivalent. D'après l'équation 8.10 ou 8.11, on sait que le rayon de la trajectoire est $r = mv/|q|B_2$. En remplaçant $v = E/B_1$, on obtient

$$\frac{m}{|q|} = \frac{B_1 B_2}{E} r \qquad (8.16)$$

Pour une valeur donnée de $|q|$, la masse est proportionnelle au rayon de la trajectoire. On utilise aussi cette technique pour séparer les isotopes, qui sont des atomes ayant les mêmes propriétés chimiques mais des masses légèrement différentes (voir le chapitre 12 du tome 3). Cet instrument permet de déceler des différences de masses d'environ 0,01 %. La largeur des traces laissées sur le détecteur nous renseigne également sur l'abondance relative des particules. La spectroscopie de masse est utilisée couramment en analyse chimique, par exemple dans la détection des polluants ou des impuretés (figure 8.33).

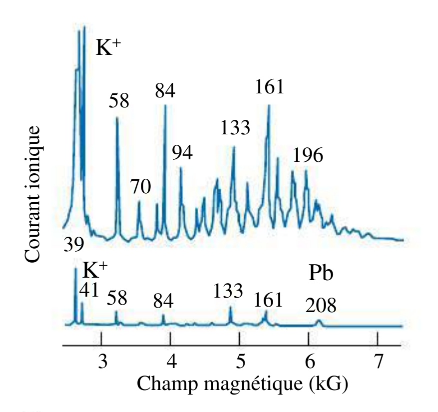
Dans un plus ancien modèle de spectromètre de masse, conçu en 1918 par l'Ontarien Arthur J. Dempster (1886-1950), plus tard découvreur de l'uranium 235, on n'utilise pas de sélecteur de vitesse. Les ions sont accélérés (à partir d'une vitesse négligeable) en traversant une différence de potentiel, un peu comme dans un canon à électrons. Dans un spectromètre de Bainbridge, toutes les particules qui entrent dans l'analyseur ont la *même vitesse*, alors que dans un spectromètre de Dempster, c'est plutôt leur *énergie cinétique* qui est la même (pourvu qu'elles aient la même charge). L'exemple 8.14 illustre le fonctionnement d'un spectromètre de Dempster.

Chaque cellule contenant des milliers de protéines différentes, la spectroscopie de masse moderne, combinée à la technique de l'électrophorèse dont il a été question aux sections 2.5 et 6.1, permet de mieux identifier chacune des protéines et son abondance. Cette technique combinée, où les protéines sont, à la sortie du capillaire d'électrophorèse, ionisées d'une façon qui évite de les fragmenter, est utilisée en recherche, par exemple pour évaluer l'impact d'une maladie ou d'un nouveau médicament sur l'abondance de toutes ces protéines. La technique a aussi son utilité en médecine clinique, où elle sert à analyser des échantillons de fluides corporels. Elle peut aussi servir à caractériser des gènes.



▲ **Figure 8.32**

Le spectromètre de masse de Bainbridge sépare les particules chargées en fonction de leur rapport charge/masse. Elles traversent d'abord un sélecteur de vitesse, puis décrivent une trajectoire demi-circulaire dans le champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}_2$. Un détecteur enregistre les impacts des particules.



▲ **Figure 8.33**

Une spectrographie de masse réalisée sur l'air d'une pièce avant et après qu'on y ait fumé une cigarette. Les pics 84 et 161 sont dus à la nicotine. (W. D. Davis, *Environmental Science Technology*, nº 11, 1977, p. 543.)

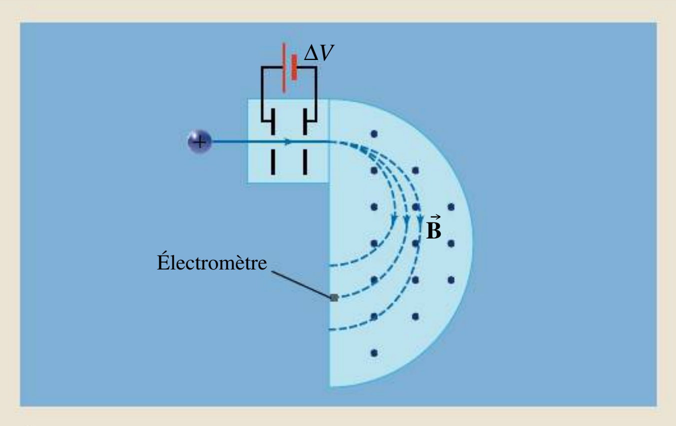
Exemple 8.14

Dans le spectromètre de masse de Dempster (figure 8.34), deux isotopes d'un élément, de masses m_1 et m_2 et de même charge positive q, sont accélérés à partir du repos par une différence de potentiel ΔV. Ils pénètrent ensuite dans un champ uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ perpendiculairement aux lignes du champ magnétique. Quel est le rapport des rayons de leurs trajectoires ?

Solution

L'énergie cinétique d'une particule est donnée par $\frac{1}{2}mv^2 = q\Delta V$, donc

$$v = \sqrt{\frac{2q\Delta V}{m}} \qquad (i)$$



▲ **Figure 8.34**

Le spectromètre de masse de Dempster. L'énergie des particules est déterminée par la différence de potentiel accélératrice dont on ajuste graduellement la valeur. En pratique, seule l'arrivée des particules qui décrivent un demi-cercle de rayon fixe est enregistrée par l'électromètre (en gris). On peut même remplacer la chambre de l'analyseur par un tunnel en forme de demi-cercle.

D'après l'équation 8.10, on sait que dans le champ magnétique, $v = qrB/m$. En égalant ces deux expressions de v, on trouve que le rayon est donné par

$$r = \sqrt{\frac{2m\Delta V}{qB^2}} \qquad \text{(ii)}$$

Donc, si la charge q est la même, le rapport des rayons $r_1/r_2 = \sqrt{m_1/m_2}$.

Dans la pratique, on fixe l'électromètre à un rayon donné. Puis, selon la différence de potentiel appliquée, on recueille les différents isotopes comme le carbone 14, moins abondant que le carbone 12. ■

APERÇU HISTORIQUE

L'évolution de la spectrométrie de masse

Depuis plus d'un siècle, la spectrométrie de masse constitue la technique privilégiée pour la détermination de la masse des différents éléments chimiques et de leurs isotopes. Loin d'être dépassée, elle est encore un passage obligé pour la détermination formelle de la masse moléculaire de tout nouveau composé chimique. Depuis son apparition, elle a évolué en intégrant les progrès technologiques, afin de multiplier ses champs d'application, de sorte qu'on l'utilise autant pour analyser les détails de la structure de macromolécules comme les protéines que pour identifier rapidement les agents toxiques sur les sites de catastrophes environnementales ou d'actes de bioterrorisme.

Tous les instruments associés à la spectrométrie de masse fonctionnent essentiellement de la même manière. Tout d'abord, un *producteur d'ions* amène en phase gazeuse puis ionise l'échantillon à analyser. Ensuite, il accélère les ions et les dirige vers un *analyseur de masse*. Celui-ci utilise généralement une combinaison de champs électrique et magnétique qui influent sur la trajectoire des ions en fonction de leur charge, de leur masse et de leur énergie initiale. Enfin, un *détecteur* recueille les ions à la sortie de l'analyseur. De la sortie du producteur d'ions jusqu'au détecteur, les ions doivent se trouver dans le vide le plus parfait possible. Les appareils modernes fonctionnent à des pressions internes très faibles, représentant quelques milliardièmes seulement de la pression atmosphérique.

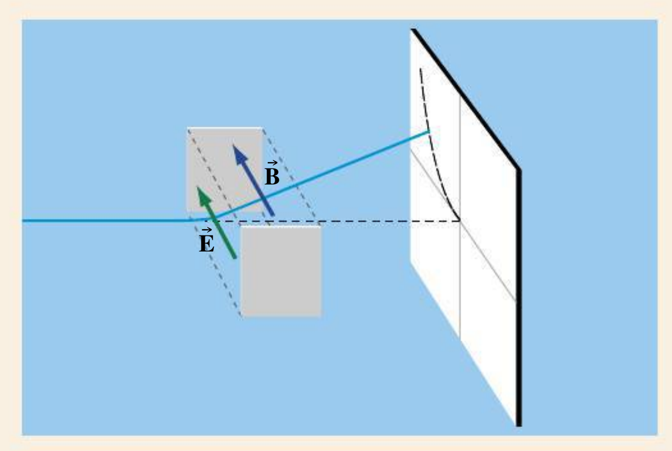
Historiquement, on distingue le *spectromètre* de masse du *spectrographe* de masse selon la nature du détecteur utilisé. Ainsi, l'appareil conçu par Bainbridge en 1933 et présenté à la figure 8.32 est un spectrographe : son détecteur enregistre l'arrivée des différents ions sortant de l'analyseur. Quant à l'appareil de Dempster, conçu en 1919 et présenté à la figure 8.34, c'est un spectromètre : son détecteur est fixe et ne peut capter qu'un faisceau d'ions à la fois.

Le premier spectrographe de masse a été conçu par Joseph J. Thomson (1856-1940) dans la première décennie du XXe siècle. Son producteur d'ions était une variante des premiers tubes à décharge. Thomson introduisait son échantillon sous forme gazeuse dans un tube dans lequel il avait préalablement fait le vide. À chaque extrémité du tube, des électrodes produisaient des décharges électriques qui ionisaient l'échantillon. Comme les ions chargés positivement sont attirés par la cathode, Thomson avait aménagé derrière cette électrode un trou conduisant directement à l'analyseur. Les ions arrivaient là avec des vitesses très variées. L'analyseur utilisait un champ électrique et un champ magnétique parallèles l'un à l'autre et perpendiculaires à la vitesse initiale des

ions arrivant dans l'analyseur (figure 8.35). Un peu plus loin, le long de la trajectoire non déviée des ions, une plaque photographique servait de détecteur.

Dans ce type de dispositif, en l'absence des champs magnétique et électrique, le faisceau d'ions traverse l'analyseur en ligne droite et frappe le milieu de la plaque photographique en y laissant une tache floue. En présence du champ électrique seulement, le faisceau est dévié horizontalement. La tache s'étire alors plus ou moins loin horizontalement selon l'énergie des ions, les ions plus rapides étant moins déviés. En présence du champ magnétique seulement, le faisceau a une portion de trajectoire circulaire qui le fait monter. La tache s'étire alors verticalement. Comme les ions les plus rapides ont les plus grands rayons de courbure, ils sont aussi les moins déviés. Ainsi, en présence du champ magnétique *et* du champ électrique, c'est-à-dire lorsque l'appareil est en mode de fonctionnement normal, les ions sont déviés à la fois vers la gauche et vers le haut de la plaque photographique, par exemple, dans le cas présenté à la figure 8.35. On peut montrer que des ions ayant des vitesses initiales différentes mais un rapport masse/charge (m/q) de même valeur viennent frapper la plaque photographique à différents endroits le long d'une parabole unique.

Grâce à son appareil, Thomson repéra les paraboles caractéristiques de plusieurs éléments chimiques. Ramenés en unités de masse atomique par unité de charge élémentaire, les rapports m/q correspondant aux différentes paraboles lui permettaient de déterminer la masse des ions en partant d'une valeur de charge supposée. Ainsi, dès 1909, Thomson confirma que la masse du néon était de 20 u. Par ailleurs, son étude de cet élément faisait apparaître une deuxième parabole très proche de la première et caractérisée par un rapport m/q de 22 u/e. C'est que la mauvaise qualité du vide obtenu à cette époque de même que les diverses réactions chimiques possibles lors du processus d'ionisation conduisaient toujours à un grand nombre de paraboles, associées à plusieurs contaminants. Thomson crut que la parabole voisine de celle du néon correspondait à l'ion NeH_2^+ ou encore au CO_2 ionisé deux fois, ces derniers ayant tous deux le même rapport $m/q = 22$ u/e. En fait, sans le savoir, il venait de mettre en évidence l'existence de l'isotope du néon contenant 10 protons et 12 neutrons ! Cet isotope est présent dans la nature et représente près de 10 % du néon *normal*. Ce n'est que 10 ans plus tard que Francis William Aston (1877-1945), assistant de Thomson, ayant repris l'expérience à l'aide d'un spectrographe de son cru, annonça qu'il venait de découvrir l'isotope ^{22}Ne. Entre-temps, les pionniers de la physique nucléaire avaient mis en évidence le fait que plusieurs éléments radioactifs possèdent de nombreux isotopes. Thomson n'avait malheureusement pas interprété son observation inédite comme une découverte, car il ne voyait aucune raison pour laquelle un élément stable (non radioactif) comme le néon pourrait avoir plus d'un isotope.



▲ **Figure 8.35**

L'analyseur du spectrographe de masse de Joseph John Thomson. Dans la zone située entre les plaques grises, un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$ parallèles font dévier un ion chargé positivement (trajectoire bleue) qui vient frapper la plaque photographique en un point se trouvant sur une parabole. Pour un rapport masse/charge donné, la position du point dépend de la vitesse de l'ion.

Dans les années qui suivirent, on uniformisa les producteurs d'ions des spectrographes de masse en utilisant un système plus complexe. Dans un milieu sous vide, un filament porté à haute température libère des électrons qui sont ensuite accélérés à l'aide d'un champ électrique. Une fois sortis de ce champ, les électrons se dirigent vers une zone comprenant l'échantillon à l'état gazeux. Là, les collisions entre les électrons énergétiques et le gaz neutre produisent l'ionisation. On peut contrôler l'énergie des électrons en faisant varier le champ électrique qui les accélère.

En 1918, cette nouvelle façon de produire les ions conduisit Dempster à modifier l'analyseur original de Thomson. Pour faire *sortir* les ions du producteur et les diriger vers l'analyseur, il utilisa un autre champ électrique qui accélère les ions nouvellement formés et les oriente vers le champ magnétique. Il a ainsi découplé l'action des champs électrique et magnétique sur les ions. Cela lui permettait de contrôler et de connaître l'énergie des ions avant que ceux-ci ne pénètrent dans le champ magnétique. Celui-ci avait alors pour seul rôle d'imposer aux électrons une trajectoire circulaire dont le rayon de courbure ne dépendait que de m/q et des valeurs connues des champs appliqués. L'analyse en devenait beaucoup plus simple. Dans le même esprit, en 1933, Bainbridge introduisit sur le chemin des ions, juste avant le champ magnétique, un sélecteur de vitesse.



Parallèlement aux travaux portant sur la recherche des isotopes des éléments du tableau périodique, la spectrométrie de masse servait aussi à la détermination de la masse des molécules. Pour étudier une molécule, on utilisait le même dispositif que pour étudier un isotope, à la différence près que les électrons du producteur frappaient un gaz moléculaire. Mais on a vite constaté que la plupart du temps les électrons avaient une fâcheuse tendance à briser les molécules. Comme les fragments de molécules étaient eux aussi ionisés, on se retrouvait avec une incroyable variété d'ions dans l'analyseur. Cependant, ce « problème » a ouvert la voie à une nouvelle application de la spectrométrie de masse : l'analyse de la structure des molécules complexes. En effet, on observe que les fragments n'apparaissent pas au hasard. Ils varient selon l'énergie des électrons qui entrent en collision avec les molécules. Par exemple, à faible énergie, on observe moins de fragments. On interprète donc que le faisceau d'électrons ne brise que les liaisons les moins solides des molécules. La contribution la plus spectaculaire de la spectrométrie de masse à l'analyse des molécules concerne l'étude des *isomères*. Les isomères sont des molécules qui sont composées des mêmes atomes reliés différemment. Pour une énergie donnée du faisceau d'électrons, deux isomères ne produisent pas les mêmes fragments, ce qui a permis de les mettre en évidence.

La Seconde Guerre mondiale a sorti la spectrométrie de masse des laboratoires universitaires et l'a fait pénétrer dans l'industrie chimique et pétrochimique. L'obligation de produire rapidement des carburants et des caoutchoucs de qualité pour soutenir l'effort de guerre américain nécessitait en effet des méthodes efficaces pour le contrôle de la qualité. La spectrométrie de masse a alors déclassé les procédés chimiques habituels d'analyse : elle permettait de reconnaître très rapidement le contenu moléculaire d'un échantillon et notamment de vérifier la présence ou l'absence d'isomères non désirés. Pour améliorer son efficacité dans le cas de mélanges contenant de nombreuses molécules variées, on l'a combinée à la *chromatographie en phase gazeuse*. Ce procédé consiste en l'injection d'un échantillon gazeux au sein d'une colonne remplie d'un solide semi-perméable aux gaz. On force ensuite l'échantillon à traverser la colonne en le *poussant* (généralement avec de l'azote maintenu sous pression constante). Selon leur structure moléculaire, les différents composants de l'échantillon traversent le solide avec plus ou moins de difficulté et mettent plus ou moins longtemps à sortir de la colonne. Un spectromètre de masse permet alors d'identifier ce qui sort. Les spectromètres industriels utilisés par les grandes sociétés pétrolières jusque dans les années 1960 étaient directement inspirés du prototype conçu par Dempster en 1918 !

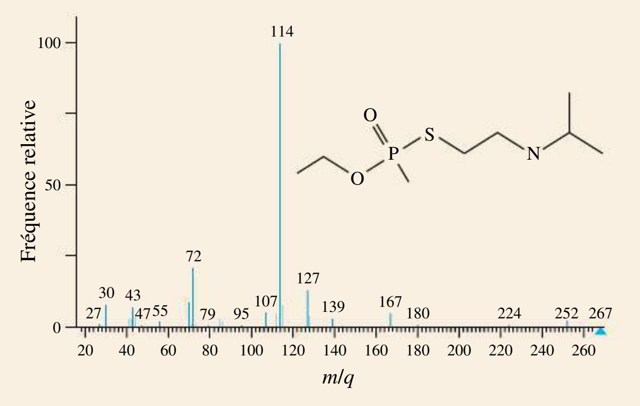
Parallèlement à son utilisation dans le cadre industriel, la spectrométrie de masse a continué à se développer. La recherche fondamentale s'est portée sur l'analyse de molécules organiques de plus en plus grosses et complexes. Deux problèmes majeurs se posaient alors aux chercheurs. D'une part, plusieurs de ces molécules ne se transforment pas facilement en échantillons gazeux. D'autre part, les liaisons que comportent ces molécules sont si fragiles que le producteur d'ions habituel ne produisait que des fragments. Les efforts des années 1980 ont attaqué de front ces deux problèmes. Dans une première approche, on a cherché à dissoudre les molécules à analyser dans des solvants ayant la pression de vapeur la plus faible possible. On pouvait alors introduire la solution obtenue dans une enceinte où régnait un vide relatif. Puis, on procédait au bombardement de l'échantillon et de son solvant à l'aide d'atomes de gaz nobles comme le xénon ou le krypton, qui ont la propriété de ne pas réagir chimiquement. Cette technique permettait de produire plus d'ions et moins de fragments. On l'utilisait principalement pour analyser des protéines qu'on avait dissoutes dans de la glycérine. Dans une deuxième approche, on mélangeait les molécules à analyser à une substance organique connue nommée *matrice* et on dissolvait le tout dans un solvant. On procédait ensuite à l'évaporation du solvant, pour obtenir des cristaux contenant à la fois la matrice et l'échantillon. On bombardait les cristaux avec un faisceau laser dont la matrice pouvait facilement absorber l'énergie, fonction de la longueur d'onde. Cela vaporisait et ionisait la matrice et, par ricochet, l'échantillon. Enfin, on acheminait tous les ions formés vers l'analyseur et le détecteur. Les propriétés de la matrice étant connues, on extrayait facilement les informations se rapportant à l'échantillon. Les deux méthodes utilisées permettent de déterminer la masse de molécules organiques contenant plusieurs centaines d'atomes !

Si tous les spectromètres modernes comportent un producteur d'ions et un détecteur, les modèles les plus récents ont un analyseur tellement évolué qu'il a presque disparu… Ces spectromètres se fondent sur la mesure du temps de vol des ions entre le producteur et le détecteur. Après avoir été produits par l'une ou l'autre des méthodes existantes, les ions sont accélérés par un champ électrique puis acheminés vers une zone de longueur connue qui ne comporte aucun champ ! Quelle que soit leur masse, les ions ayant la même charge arrivent à l'analyseur avec la même énergie cinétique. Mais ils mettent plus ou moins de temps à traverser l'analyseur et à arriver au détecteur : ce temps de traversée ne dépend que de leur vitesse et, l'énergie cinétique étant constante, n'est donc fonction que de leur masse. L'efficacité de ces spectromètres récents est directement liée à des détecteurs électroniques très

sensibles et très rapides qui peuvent enregistrer l'arrivée des différents ions sur des intervalles de temps très courts. Plus un détecteur est rapide, plus il fournit d'informations. En comparant le spectre obtenu pour un échantillon donné aux spectres d'une banque de données informatisée, on peut aisément déduire la composition de l'échantillon.

Ces derniers spectromètres de masse, très performants, sont à la fois peu coûteux et peu encombrants. C'est ainsi qu'ils ont quitté les laboratoires de recherche et servent maintenant à la détermination de la composition chimique d'échantillons extrêmement variés. On les utilise notamment pour déterminer la présence et la concentration d'agents toxiques lors de catastrophes écologiques. Par ailleurs, divers pays ont conçu par le passé des armes chimiques et biologiques. Bien que plusieurs accords internationaux interdisent formellement leur utilisation, on craint les attaques terroristes qui en feraient usage. C'est ainsi qu'on a créé une banque de spectres permettant l'identification rapide de ces produits à l'aide de la spectrométrie de masse.

La spectrométrie de masse ne connaît pas vraiment de frontières. Depuis quelques décennies, en effet, de nombreux spectromètres ont quitté la Terre à bord de sondes spatiales, afin d'analyser la composition chimique des planètes de notre système solaire !



Spectre de masse de la molécule VX dont la formule chimique est CH_3CH_2O-$P(O)(CH_3)$-$SCH_2CH_2N(C_3H_7)_2$ et dont la masse est 267 g/mol. Le fragment le plus abondant dans ce spectre (m/q = 114 u/e) correspond à la combinaison $CH_2N(C_3H_7)_2$. Il s'agit d'un gaz neurotoxique qui constitue l'une des armes chimiques les plus dangereuses. (Source : Librairie publique de spectres, NIST-EPA-NIH.)



Un spectromètre de masse moderne utilisant le temps de vol des ions, exploité dans un laboratoire de Montréal. Cet appareil est à peine plus gros qu'un four à micro-ondes.

8.7 LE CYCLOTRON

Dans plusieurs applications technologiques ou scientifiques, on a besoin de jets de particules excessivement rapides. En recherche fondamentale, on obtient une multitude d'informations concernant les propriétés des noyaux et des particules élémentaires en bombardant des cibles atomiques avec des particules de haute énergie. En sciences appliquées et en médecine, on utilise l'interaction entre des jets de particules et une cible pour produire différents isotopes.

Produire des jets de particules à une vitesse proche de celle de la lumière n'est pas une chose simple. En 1932, les Anglais John Douglas Cockcroft (1897-1967) et Ernest Thomas Walton (1903-1995) réalisèrent le premier « casseur d'atomes » : ils bombardèrent une cible en lithium avec des protons qui avaient été accélérés par une différence de potentiel énorme de 700 000 V. Produire une telle différence de potentiel demande cependant un équipement considérable (voir la figure 5.12*b*, p. 184). En 1929, une autre solution à ce problème a été conçue : le

physicien américain Ernest Orlando Lawrence (1901-1958) a exploité la possibilité d'accélérer des particules *par étapes successives* à l'aide de différences de potentiel relativement faibles, plutôt qu'en une seule fois. Il mit au point un dispositif à cette fin, appelé **cyclotron**, en collaboration avec Milton Stanley Livingston (1905-1986). Le premier cyclotron (construit en 1930) et une version ultérieure (construite en 1934) sont représentés à la figure 8.36.

(*a*)



(*b*)

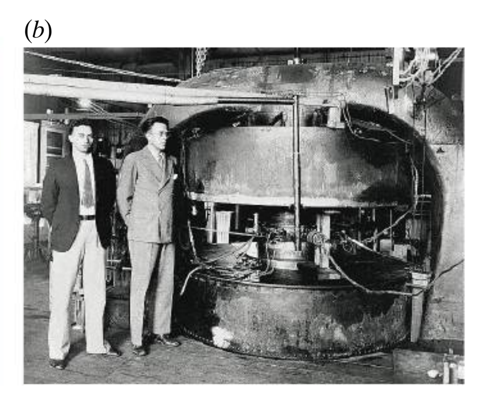


Figure 8.36

(*a*) Le premier prototype de cyclotron tenait dans une main. On remarque notamment deux tuyaux servant à pomper l'air pour faire le vide et deux électrodes reliées aux dés. (*b*) Un cyclotron de 27 po réalisé en 1934. Lawrence se tient à droite et Livingston à gauche. Les deux grands cylindres contiennent les bobines produisant le champ magnétique ; le cyclotron est situé entre les deux, au centre.

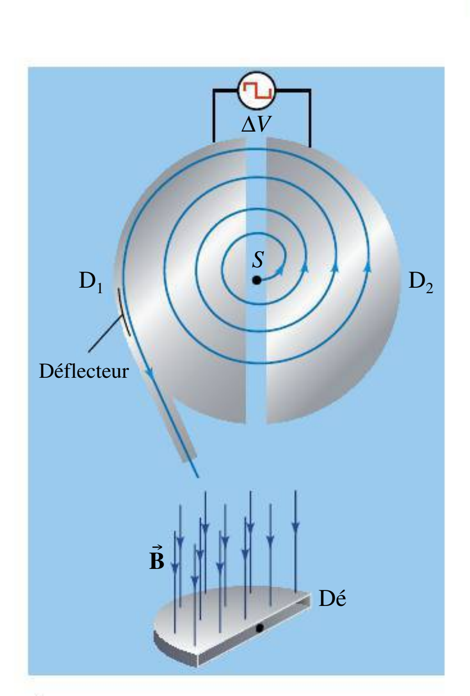


Figure 8.37

Le fonctionnement d'un cyclotron s'appuie sur le fait que la période du mouvement circulaire est indépendante de la vitesse de la particule. Une différence de potentiel alternative appliquée entre deux demi-cylindres sert à accélérer les particules lorsqu'elles traversent l'espace entre les demi-cylindres. Un champ magnétique est appliqué perpendiculairement aux demi-cylindres de sorte que les particules décrivent des trajectoires demi-circulaires à l'intérieur de chaque demi-cylindre.

Le fonctionnement du cyclotron s'appuie sur le fait que la période du mouvement circulaire d'une particule dans un champ magnétique est indépendante de sa vitesse. Le cyclotron est composé de deux *dés*, des demi-cylindres creux ainsi nommés en raison de leur forme en « D », représentés selon deux perspectives à la figure 8.37. Les dés D_1 et D_2 sont séparés par un petit espace et placés dans un champ magnétique uniforme. Contrairement à un champ électrique, qui serait annulé dans la cavité des dés en raison de la séparation des charges à leur surface, un champ magnétique peut très bien être établi dans la cavité.

Au centre de l'espace entre les dés se trouve une source d'ions S qui produit des particules chargées, telles que des protons ou des particules α, dont une proportion pénètre horizontalement dans les dés, où on a fait le vide. En raison du champ magnétique qui règne dans l'appareil, chaque particule entame une trajectoire circulaire *qui la ramène dans l'espace entre les dés*. C'est à cet endroit que les particules subissent leurs accélérations successives.

En effet, on applique entre les dés une tension ΔV élevée dont la polarité s'inverse chaque fois que les particules parcourent une demi-révolution. Le champ électrique associé à cette différence de potentiel est principalement confiné dans l'espace entre les demi-cylindres, de sorte que la vitesse des particules n'augmente que lorsqu'elles traversent cet espace. À leur premier passage, elles acquièrent l'énergie cinétique supplémentaire $\Delta K = |q\Delta V|$. Au bout d'un temps $T/2$, elles arrivent à nouveau dans l'espace situé entre les deux dés, mais la polarité de la différence de potentiel s'est inversée de sorte qu'elles accélèrent *à nouveau* en le traversant. Ce processus se répétant à chaque passage entre les deux dés, les particules vont de plus en plus vite.

La figure 8.37 montre la trajectoire d'une particule donnée. Entre les dés, elle subit à la fois un champ électrique et un champ magnétique, de sorte que sa vitesse augmente en plus de continuer à changer d'orientation. Mais quand elle est dans un des dés, elle ne subit qu'une force magnétique ; le rayon de sa trajectoire, constant, est $r = mv/|q|B$ et sa période, $T = 2\pi m/|q|B$ (voir la section 8.5). Selon ces équations, après chaque passage entre les dés, la particule décrit un cercle de plus en plus grand, *mais toujours avec la même période*. Cette caractéristique simplifie grandement le fonctionnement de l'appareil, car elle permet

d'alterner la polarité de la différence de potentiel entre les dés avec une fréquence qui reste toujours la même. Pour accélérer les particules de manière optimale, la période avec laquelle oscille la différence de potentiel ΔV doit être la même que la période de révolution des particules. En effet, une tension qui oscille avec une période T s'inverse bien à tous les $T/2$, donc à chaque demi-tour des particules. Lorsque les particules atteignent le rayon maximal, un déflecteur les dirige vers la zone expérimentale.

Dans la pratique, des complications se présentent. Lorsque la vitesse des particules commence à représenter une fraction appréciable de la vitesse de la lumière : leur *masse relativiste* est alors considérablement plus importante que la masse mesurée à basse vitesse (voir le chapitre 8 du tome 3), ce qui affecte la période des particules, qui n'est plus synchronisée avec celle de la tension entre les dés. C'est pourquoi on utilise souvent des protons, qui sont des particules plus lourdes que les électrons : pour une énergie donnée, la vitesse d'un proton est bien inférieure à celle d'un électron. Dans un cyclotron, les protons atteignent une énergie maximale voisine de 25 MeV. Dans le *synchrocyclotron*, la fréquence de la tension d'alimentation diminue progressivement pour contrer les effets de la relativité. Cette machine permet d'accélérer des protons jusqu'à des énergies de 200 MeV.

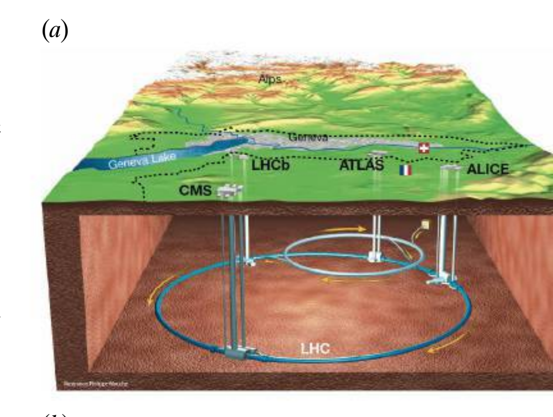
Au-delà du cyclotron

Ces énergies peuvent sembler considérables, mais au XXIe siècle, la recherche fondamentale en physique porte sur des phénomènes qui se produisent dans des collisions entre protons impliquant une énergie de l'ordre de 10^7 MeV. Il serait impossible de produire des particules ayant une telle énergie avec des cyclotrons, car ceux-ci devraient avoir un rayon énorme. Or, les cyclotrons modernes ne dépassent pas 2 m de rayon, car il est difficile de produire un champ magnétique uniforme dans une région étendue.

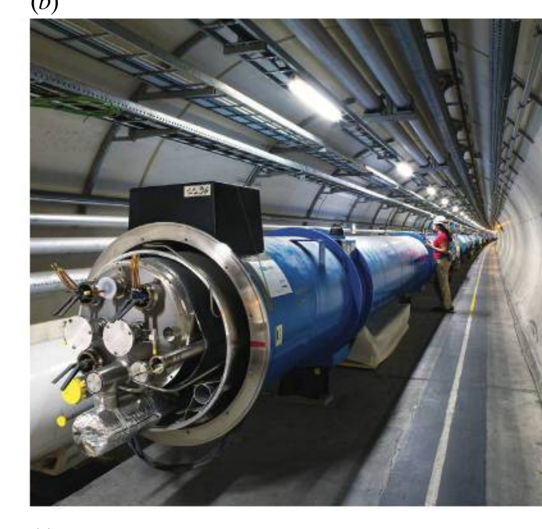
Pour faire mieux, on a recours au *synchrotron*, où le champ magnétique et la fréquence varient tous deux, de sorte que les particules décrivent une trajectoire *de rayon fixe*. Ainsi, seul un tunnel de rayon fixe doit être plongé dans le champ magnétique. Les particules subissent une accélération lorsqu'elles passent entre des tronçons du tunnel dont le potentiel électrique alterne à la fréquence appropriée. À l'heure actuelle, le synchrotron le plus puissant est le LHC (*large hadron collider*), situé au CERN à la frontière franco-suisse (figure 8.38). Il a une circonférence de 27 km et peut accélérer des protons jusqu'à une énergie de 7000 GeV, soit 280 000 fois plus que celle obtenue avec un cyclotron ! Grâce à ce nouvel appareil, on a notamment corroboré en 2012 la théorie du *boson de Higgs*, qui explique pourquoi les particules élémentaires possèdent une masse (voir le chapitre 13 du tome 3).

Même s'ils ont été créés pour la recherche fondamentale en physique, les cyclotrons ont trouvé d'autres utilisations, notamment en milieu hospitalier. Par exemple, ils sont utilisés dans une technique de radiothérapie appelée

(*a*)



(*b*)



(*c*)

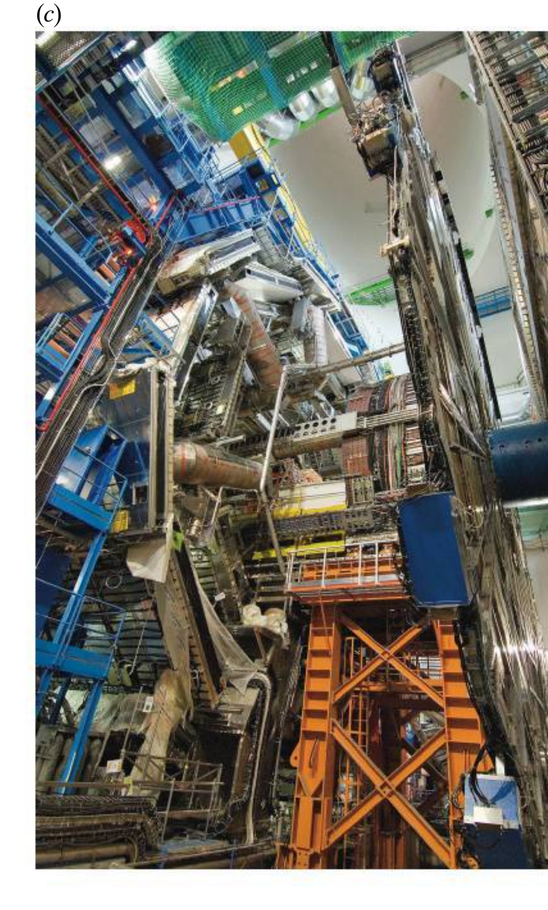


Figure 8.38

(*a*) Le plus puissant synchrotron au monde, installé dans un sous-terrain pour le protéger des interférences à la surface, a une circonférence de 27 km. (*b*) Dans le long du tunnel se trouvent 9593 électroaimants supraconducteurs utilisés pour diriger le faisceau ; le champ qu'ils produisent atteint 8,3 T. (*c*) Le détecteur ATLAS, l'un des quatre situés sur le pourtour du synchrotron, a la même hauteur qu'un édifice de sept étages. On n'en voit ici que l'extrémité, mais à la figure 9.36 (p. 383), prise pendant sa construction, on peut juger de sa profondeur. Notez, à droite sur la photo, le tube bleu qui achemine le jet de particules.

protonthérapie, dans laquelle des tissus cancéreux sont bombardés avec un jet de protons qui endommage l'ADN des cellules. Les cellules cancéreuses sont plus vulnérables que les autres à ce type de dommage et meurent. Comparativement aux rayons X, les jets de protons présentent l'avantage de moins se disperser, ce qui réduit les dommages collatéraux aux tissus sains environnants.

Une autre utilisation médicale des cyclotrons est la production d'isotopes à courte durée de vie utilisés pour l'imagerie médicale (voir le chapitre 12 du tome 3). Un jet de particules bombardant une cible engendre des réactions nucléaires qui produisent de tels isotopes, ce qui évite d'avoir recours à un réacteur nucléaire pour les produire. ●

Exemple 8.15

On utilise un cyclotron pour accélérer des protons à partir du repos. Il a un rayon de 60 cm et il est le siège d'un champ magnétique de module 0,8 T. La tension (différence de potentiel) aux bornes des demi-cylindres est de 75 kV. Déterminer : (a) la fréquence de la tension alternative ; (b) l'énergie cinétique maximale ; (c) le nombre de révolutions effectuées par les protons.

Solution

(a) D'après l'équation 8.12*b*, la fréquence cyclotron s'écrit

$$f_c = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(0{,}8\ \text{T})}{(6{,}28)(1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg})} = 12{,}2\ \text{MHz}$$

Cette fréquence est celle de la révolution des particules, mais la fréquence de la différence de potentiel alternative doit lui être égale pour que l'appareil fonctionne de façon optimale.

(b) De l'équation 8.10, on déduit que le rayon est $r = mv/|q|B = mv/eB$ et qu'il est donc proportionnel à la vitesse. L'énergie cinétique est donc maximale pour un rayon maximal, soit $r = 0{,}6$ m. En isolant la vitesse dans l'expression que nous venons d'obtenir pour le rayon, on trouve

$$v = \frac{erB}{m} = \frac{(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(0{,}6\ \text{m})(0{,}8\ \text{T})}{1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg}} = 4{,}60 \times 10^{7}\ \text{m/s}$$

et

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2 = \tfrac{1}{2}(1{,}67 \times 10^{-27}\ \text{kg}) \times (4{,}60 \times 10^{7}\ \text{m/s})^2 = 1{,}76 \times 10^{-12}\ \text{J} = 11{,}0\ \text{MeV}$$


(c) Durant chaque révolution, le proton est accéléré deux fois. ■

Son gain d'énergie est donc

$$\Delta K = 2|q\Delta V| = 2(1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C})(7{,}5 \times 10^{4}\ \text{V}) = 2{,}40 \times 10^{-14}\ \text{J}$$

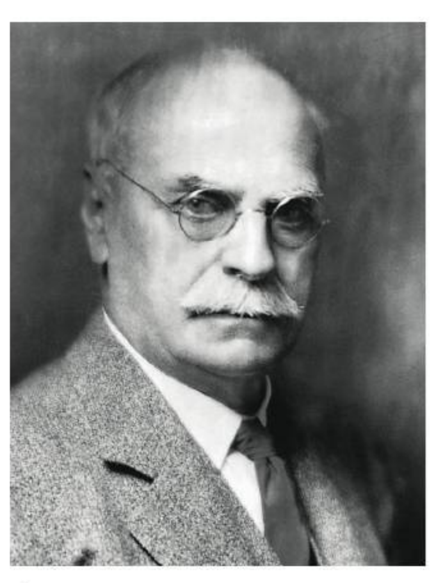
Le nombre total de révolutions est simplement $K_{max}/\Delta K$ = 73,5 révolutions.

8.8 L'EFFET HALL

Quand on plonge dans un champ magnétique uniforme un conducteur parcouru par un courant, on observe une force sur le conducteur (voir la section 8.3), tel que découvert par Œrsted, mais on observe aussi l'apparition d'une différence de potentiel latérale (c'est-à-dire entre les *côtés* du conducteur), phénomène qui porte le nom d'**effet Hall**.

Ce phénomène a été découvert grâce à des expériences visant à résoudre une controverse sur le mécanisme précis par lequel le champ magnétique exerce la

force sur le conducteur. James Clerk Maxwell suggérait que la force magnétique agit non pas sur le courant électrique, mais sur le conducteur dans lequel il circule. Cette position ne convenait pas à Edwin Herbert Hall (figure 8.39), qui, en 1877, venait de commencer son doctorat. On mesurait en effet que la force magnétique est proportionnelle au courant et ne dépend pas des dimensions du fil. En particulier, la force disparaît lorsque le courant est nul. L'hypothèse de Maxwell ne paraissait donc pas valable aux yeux de Hall, car elle n'expliquait pas ces observations pourtant simples.



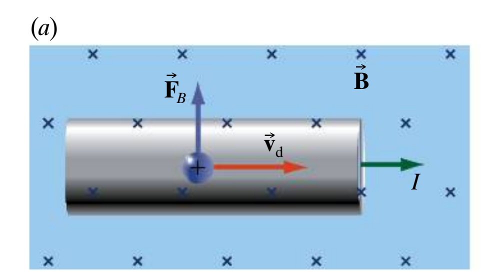
▲ **Figure 8.39**
Edwin H. Hall (1855-1938).

À cette époque, on considérait le courant électrique comme le flux d'un fluide (l'électron devait être découvert vingt ans après). Hall imagina donc que, dans un champ magnétique, le « fluide » serait attiré d'un côté du fil tout en poursuivant son écoulement le long du fil, entraînant une diminution de la section transversale effective du fil et donc une augmentation de sa résistance. Les mesures faites aujourd'hui sont conformes à cette idée, mais Hall ne disposait pas d'instruments assez sensibles pour détecter une variation de résistance. Il essaya donc d'utiliser une autre approche en supposant que, sous l'action du champ magnétique, le fluide accumulé d'un côté du conducteur produirait un « état de contrainte » sur ce conducteur. Quelques années auparavant, Henry A. Rowland (1848-1901), le directeur de thèse de Hall, avait effectivement réussi à déceler une faible différence de potentiel aux bornes latérales d'un conducteur parcouru par un courant dans un champ magnétique. Il proposa à Hall de refaire l'expérience, mais cette fois-ci avec une feuille d'or très fine. C'est ainsi qu'en octobre 1879 Hall découvrit le phénomène qui porte maintenant son nom.

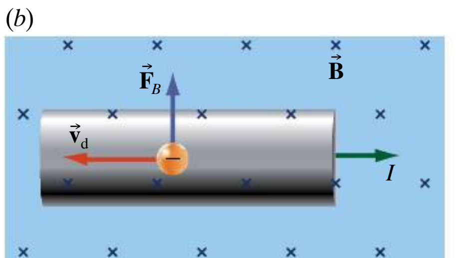
Voyons maintenant comment notre représentation moderne des forces électrique et magnétique permet d'expliquer l'effet Hall. Pour ce faire, considérons un conducteur (pas forcément métallique) dans lequel un courant circule vers la droite et supposons que $\vec{\mathbf{B}}$ entre perpendiculairement dans la page (figure 8.40). On considère d'abord la possibilité où, dans ce matériau, le courant est causé par des particules positives qui dérivent dans le sens conventionnel du courant (figure 8.40*a*). La force magnétique sur ces charges est donc orientée vers le haut (voir l'équation 8.2), ce qui les oblige à poursuivre leur dérive vers la droite en longeant le haut du fil. Il y a donc excès de charge positive en haut du fil et manque de charge positive en bas du fil, ce qui produit un champ électrique *latéral* vers le bas. À ce champ correspond une différence de potentiel positive entre le haut et le bas du fil : $V_{\text{haut}} - V_{\text{bas}} > 0$. C'est la **tension de Hall**.

L'effet Hall permet de déterminer le signe des charges mobiles qui sont à l'origine du courant. Pour le comprendre, voyons ce qui se produit si le même courant est causé par des charges négatives (figure 8.40*b*). Leur vitesse de dérive est opposée au sens conventionnel du courant. La force magnétique sur les particules chargées sera *encore* vers le haut (vérifiez-le), et cette fois, il y a excès de charge *négative* au haut du fil. On a donc une tension de Hall de polarité inverse, $V_{\text{haut}} - V_{\text{bas}} < 0$.

(*a*)



(*b*)

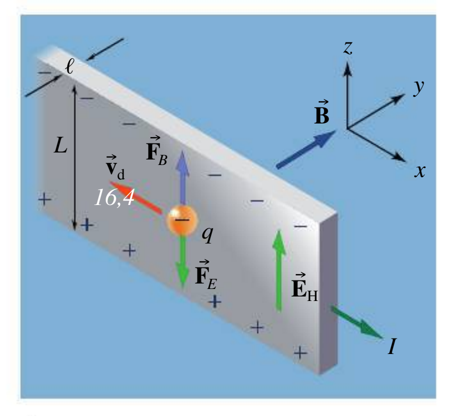


◀ **Figure 8.40**
Sous l'effet d'un champ magnétique perpendiculaire au fil, les charges en mouvement sont affectées. (*a*) Si le courant est dû à des particules chargées positives, un excès de charge positive se forme en haut du fil. (*b*) Si le courant est dû à des particules chargées négatives, un excès de charge négative se forme en haut du fil.

Enfin, dans l'éventualité où le courant serait causé à la fois par une dérive de particules positives vers la droite et une dérive de particules négatives vers la gauche, la tension de Hall qu'on mesurerait serait nulle.

Or, dans des métaux comme l'or, le cuivre, l'argent, le platine et l'aluminium, on mesure une tension de Hall négative. Cela indique que les particules mobiles sont négatives. Jusqu'à présent, nous nous étions basés sur la représentation atomique de la matière pour affirmer que seuls les électrons étaient mobiles dans un métal; l'effet Hall corrobore la même idée de façon indépendante.

Soulignons que la tension de Hall mesurée avec le cobalt, le zinc, le plomb et le fer a pendant longtemps dérouté les scientifiques: ces matériaux semblent avoir des porteurs de charge positifs bien qu'ils soient métalliques. L'explication de cette anomalie fait appel à la mécanique quantique. Dans d'autres matériaux, particulièrement certains semi-conducteurs, les particules chargées mobiles ne sont *pas* des charges négatives. Dans l'industrie de l'électronique, le test de l'effet Hall est extrêmement important, car il permet de caractériser les semi-conducteurs.



▲ **Figure 8.41**

L'effet Hall. Lorsqu'un champ magnétique est appliqué perpendiculairement à une plaquette parcourue par un courant, une différence de potentiel apparaît entre les côtés supérieur et inférieur de la plaquette.

Pour décrire l'effet Hall de façon quantitative, considérons maintenant une géométrie plus simple. La figure 8.41 représente une plaquette métallique de largeur L et d'épaisseur ℓ dans laquelle circule un courant I. Un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ est orienté comme l'indique la figure. Un électron, de charge négative q se déplaçant dans le sens de la longueur à la vitesse de dérive $\vec{\mathbf{v}}_d$ est soumis à une force magnétique vers le haut $\vec{\mathbf{F}}_B = |q|v_d B\vec{\mathbf{k}}$. La face supérieure se charge négativement, tandis que la face inférieure se charge positivement. Ces charges accumulées produisent alors un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}_H$ dirigé vers le haut qui crée une force électrique vers le bas sur les électrons, $\vec{\mathbf{F}}_E = -|q|E_H\vec{\mathbf{k}}$. Au fur et à mesure que les charges s'accumulent sur les faces supérieure et inférieure, la force électrique sur un électron devient assez intense pour compenser la force magnétique. Notez que le champ $\vec{\mathbf{E}}_H$ est latéral, de même que la force qu'il cause; ils ne doivent pas être confondus avec le champ électrique et la force électrique qui sont à l'origine du courant: ces derniers sont orientés parallèlement au sens du courant (voir la figure 6.6, p. 215).

La force résultante *latérale* sur les particules chargées devient nulle lorsque



$$|q|E_H = |q|v_d B \sin 90°$$

c'est-à-dire lorsque $E_H = v_d B$. Lorsque cet équilibre survient, ce qui est presque instantané, la distribution latérale des électrons devient constante dans le temps (bien que l'écoulement du courant se poursuive dans le sens de la longueur du fil) et E_H cesse de croître.

La tension de Hall qui correspond à la présence d'un champ électrique latéral est donnée par

$$\Delta V_H = E_H L = v_d BL \qquad (8.17)$$

Cette tension se mesure entre les côtés de la plaquette métallique. Répéter le raisonnement dans le cas d'un matériau où les charges mobiles sont positives aboutit quand même à l'équation 8.17. Pour les métaux, ΔV_H est de l'ordre du microvolt, alors que pour les semi-conducteurs, elle peut être de l'ordre du millivolt.

Voyons maintenant trois résultats quantitatifs qu'on peut obtenir à partir d'une mesure de la tension de Hall. D'abord, l'équation 8.17 peut servir soit à

déterminer v_d si l'on connaît B, soit à mesurer B si l'on connaît v_d. Une *sonde de Hall* est un instrument servant à mesurer les champs magnétiques à partir de la tension de Hall. Ensuite, d'après l'équation 6.2, le courant est $I = n|q|v_d A$, n étant le nombre de porteurs de charge par unité de volume et $A = L\ell$ étant l'aire de la section de la plaquette. Si l'on remplace $v_d = I/(n|q|L\ell)$ dans l'équation 8.17, on obtient

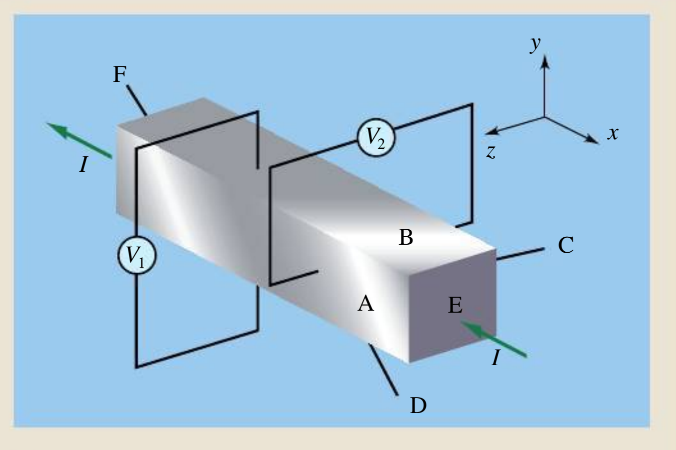
$$\Delta V_H = \frac{IB}{n|q|\ell} \quad (8.18)$$

Si les autres variables sont connues, on peut donc utiliser la tension de Hall pour déterminer n.

Soulignons que, dans l'effet Hall, les porteurs de charge sont soumis à plusieurs forces et plongés dans plusieurs champs. Quand on décrit une telle situation, il est crucial de bien préciser de quelle force ou de quel champ on parle.

Exemple 8.16

La figure 8.42 représente un barreau d'un matériau conducteur ayant une section carrée de côté 5 mm et une longueur de 3 cm. Un courant de 10 A circule dans le sens indiqué. Le voltmètre 1 mesure la tension entre les côtés B et D, et le voltmètre 2, entre les côtés A et C. Le champ magnétique a un module de 1 T et est perpendiculaire à l'une des faces. Trouver l'orientation du champ magnétique si : (a) le voltmère 1 indique $V_B - V_D > 0$, le voltmètre 2 indique zéro et que le conducteur est métallique ; (b) le voltmètre 1 indique zéro, le voltmètre 2 indique $V_A - V_C < 0$ et que le conducteur est un semi-conducteur où les charges mobiles sont positives. (c) Si le barreau est en cuivre, que vaut $V_E - V_F$?



▲ **Figure 8.42**
Deux voltmètres mesurent la tension entre des côtés opposés du barreau conducteur.

Solution

(a) Le fil étant métallique, les porteurs sont de charge négative (électrons) et leur vitesse de dérive est vers $\vec{\mathbf{i}}$. Puisque $V_B > V_D$, le côté B est chargé positivement et le côté D, négativement.

C'est la force *magnétique* sur les électrons qui initie la séparation de charge latérale ; elle doit donc être dirigée vers le côté ayant la même charge que les électrons (D), c'est-à-dire vers $-\vec{\mathbf{j}}$. ■

La force magnétique étant perpendiculaire à un plan qui contient $\vec{\mathbf{v}}_d$ et $\vec{\mathbf{B}}$, ce plan est donc le plan xz. Puisque le champ magnétique est perpendiculaire à une face, il doit être parallèle à l'axe des z. La règle de la main droite indique qu'il est orienté vers $+\vec{\mathbf{k}}$.

(b) Les porteurs étant positifs, leur vitesse de dérive est orientée vers $-\vec{\mathbf{i}}$. Puisque $V_A > V_C$, le côté A se charge positivement et le côté C, négativement.

Cette fois, la force *magnétique* agit sur des charges positives ; elle est donc dirigée vers le côté positif (A), c'est-à-dire vers $\vec{\mathbf{k}}$. ■

La force magnétique étant perpendiculaire au plan xy, le champ magnétique est parallèle à l'axe des y. Selon la règle de la main droite, il est orienté vers $-\vec{\mathbf{j}}$.

(c) $V_E - V_F$ est une différence de potentiel mesurée dans le sens du courant. Ce n'est pas une tension de Hall, mais plutôt la tension qui cause le courant, donnée par la loi d'Ohm. ■

Le fil étant en cuivre, on trouve sa résistivité au tableau 6.1 et sa résistance est

$$R = \rho L/A = (1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega\cdot\text{m})(0{,}03\ \text{m})/(0{,}005\ \text{m})^2$$
$$= 2{,}04 \times 10^{-5}\ \Omega$$

Il suffit donc d'une tension $\Delta V = RI = 0{,}204$ mV pour faire circuler le courant.

Exemple 8.17

Une plaquette de métal de largeur 1 cm et d'épaisseur 2 mm est orientée perpendiculairement à un champ magnétique. Lorsqu'elle est parcourue par un courant de 10 A, la tension de Hall vaut 0,4 μV. Quel est le module de $\vec{\mathbf{B}}$? On donne $n = 5 \times 10^{28}$ m^{-3}.

Solution

D'après l'équation 8.18,

$$\begin{aligned} B &= \frac{n|q|\ell\Delta V_{\text{H}}}{I} \\ &= \frac{(5 \times 10^{28})(1{,}6 \times 10^{-19})(2 \times 10^{-3})(4 \times 10^{-7})}{10} \\ &= 0{,}641 \text{ T} \end{aligned}$$

La nature de la force magnétique agissant sur un conducteur parcouru par un courant

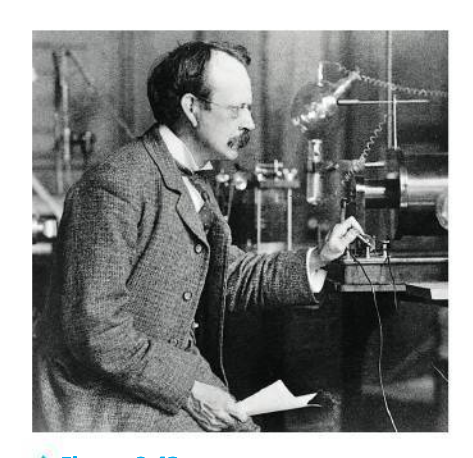
L'effet Hall montre que Maxwell avait tort au sujet de la force exercée sur le fil, car cet effet ne peut s'expliquer que si le champ magnétique agit directement sur les charges en mouvement qui constituent le courant électrique. Puisque les ions positifs qui forment le réseau d'un conducteur sont immobiles (si l'on ne tient pas compte du mouvement thermique aléatoire), ils ne peuvent *pas* être soumis à une force magnétique. Mais alors: comment la force est-elle transmise au fil ? Nous avons vu qu'il se produit une séparation des charges et un champ électrique correspondant dans le fil. Les ions positifs du conducteur sont soumis à la force électrique attribuable à ce champ. Par conséquent, la « force magnétique sur le fil » doit plutôt être conçue comme une force magnétique agissant sur les électrons de conduction, laquelle cause ensuite une force électrique agissant sur le réseau d'ions positifs dans le conducteur. Ainsi, même si le conducteur subit un travail, celui-ci n'a *pas* été effectué par la force magnétique. Mais puisqu'il a été effectué par une force électrique de même module, on peut en faire le calcul en utilisant F_B.

8.9 LA DÉCOUVERTE DE L'ÉLECTRON

La découverte de l'électron, la première particule subatomique connue, survint pendant l'étude des décharges électriques dans les gaz raréfiés, au cours de travaux qui débutèrent en 1860. Lorsqu'on applique une différence de potentiel élevée aux bornes d'une enceinte en verre contenant un gaz à basse pression (0,01 atm), le gaz commence à émettre une lueur, un peu à la manière d'un tube fluorescent. Si la pression est très faible (10^{-3} mm Hg), le tube devient complètement sombre et l'électrode négative (cathode) émet de faibles lueurs bleutées. Lorsqu'ils atteignent l'enceinte, les « rayons cathodiques » invisibles, qui causent l'émission lumineuse, rendent également le verre fluorescent; il diffuse alors une lueur verdâtre ou bleuâtre. Un obstacle intercalé entre la cathode et le verre projette une ombre nette sur le verre, ce qui montre que les « rayons cathodiques » se propagent en ligne droite. Plusieurs propriétés de ces rayons furent découvertes après 1880: 1) Ils sont déviés par un champ magnétique comme s'ils étaient chargés négativement. 2) Ils sont émis perpendiculairement à la surface de la cathode, contrairement à la lumière qui est émise dans toutes les directions. 3) Ils possèdent une quantité de mouvement (ils peuvent faire tourner une petite roue à aubes) et une énergie (ils peuvent élever la température d'un corps).

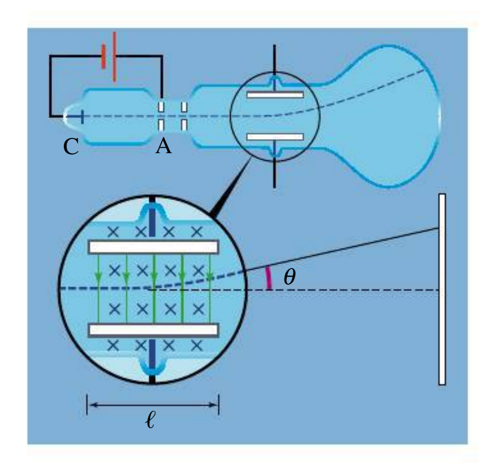
Les avis étaient partagés quant à la nature de ces rayons, certains scientifiques pensant qu'il s'agissait d'ondes électromagnétiques, comme les ondes lumineuses ou les ondes radio, d'autres croyant qu'il s'agissait de particules chargées. Aujourd'hui, on considère que leur déviation dans un champ magnétique est une preuve concluante qu'il s'agit en fait de particules chargées. Mais à cette époque, on n'avait pas encore réellement démontré qu'une onde électromagnétique ne pouvait être déviée par un champ magnétique. Heinrich Hertz (1857-1894) avait bien essayé de dévier les rayons cathodiques au moyen d'un champ électrique en appliquant une différence de potentiel de 22 V entre deux armatures, mais il n'avait observé aucun effet. En élevant la différence de potentiel (à 500 V environ), il avait causé une décharge en arc entre les armatures et il avait renoncé à poursuivre dans cette direction. Son assistant, Philipp von Lenard (1862-1947), découvrit que les rayons cathodiques pouvaient traverser de minces feuilles de métal (2 μm) et une couche d'air de 1 cm. Il démontra que ces rayons ne pouvaient être formés d'atomes parce que les mêmes feuilles ne laissaient pas passer le gaz hydrogène (on supposait à juste titre que l'hydrogène, étant l'élément le plus léger, avait les atomes les plus petits). En admettant que les rayons soient des particules chargées en mouvement, ils devraient alors *produire* un champ magnétique. Hertz fut incapable de détecter ce champ et la plupart des physiciens allemands continuèrent donc à penser qu'ils étaient de nature ondulatoire.

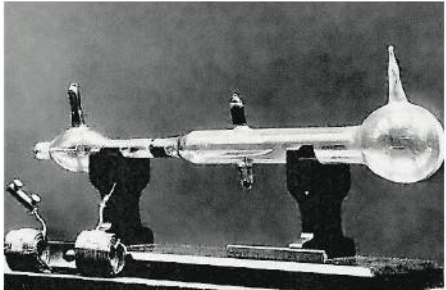
En 1895, le Français Jean Perrin (1870-1942) démontra, en recueillant les rayons cathodiques dans un cylindre, qu'ils portaient une charge négative. Lorsqu'ils étaient déviés du collecteur par un champ magnétique, aucune charge n'y était recueillie, ce qui prouvait que les rayons cathodiques étaient en fait des particules. En 1897, Joseph John Thomson (figure 8.43), de Cambridge, élucida l'énigme que posait la nature de ces «corpuscules», comme il les appelait. Sa première découverte importante fut de montrer que les particules pouvaient être déviées par un champ électrique, ce qu'il réussit à faire parce qu'il fut capable de produire un vide plus complet que celui obtenu par Hertz.



▲ **Figure 8.43**
Joseph John Thomson (1856-1940).

Il utilisa ensuite une combinaison de champs $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$. Le montage utilisé par Thomson est représenté à la figure 8.44. Les rayons cathodiques étaient émis à la cathode C et accélérés jusqu'à l'anode A dans laquelle on avait pratiqué une petite ouverture. Ils traversaient ensuite une région de champs $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ perpendiculaires dont les valeurs étaient choisies de manière à ne pas dévier le faisceau. La position du faisceau apparaissait comme une tache sur un écran enduit d'un matériau phosphorescent tel du ZnS. D'après notre étude du sélecteur de vitesse, nous savons que la vitesse des particules est $v = E/B$. Thomson détermina que leur vitesse était environ de 3×10^7 m/s. Ensuite, les particules étaient déviées *soit* par le champ électrique *ou* par le champ magnétique. Nous nous





◀ **Figure 8.44**
L'appareillage de Thomson. Les électrons émis par la cathode C étaient accélérés vers l'anode A. Ils traversaient ensuite une région de champs électrique et magnétique perpendiculaires et allaient frapper un écran revêtu d'une substance phosphorescente.

intéressons uniquement pour l'instant à la déviation électrique : la trajectoire des particules dans un champ électrique uniforme est une parabole. Nous avons montré à l'exemple 2.7 que l'angle selon lequel elles sortent des armatures est donné par

$$\tan\theta = \frac{|q|E\ell}{mv^2}$$

Comme $v = E/B$, on obtient

$$\frac{|q|}{m} = \frac{E\tan\theta}{B^2\ell} \qquad (8.19)$$

Toutes les variables figurant au deuxième membre sont faciles à mesurer.

Thomson utilisa plusieurs gaz différents dans le tube pour montrer que le rapport charge/masse des « corpuscules » gardait toujours la même valeur, $|q|/m \approx 1{,}7 \times 10^{11}$ C/kg. Il était donc clair qu'il s'agissait du même type de particules. Ce rapport charge/masse était près de deux mille fois supérieur à celui de l'ion hydrogène, le plus léger connu. Si le « corpuscule » avait la même charge que l'ion H^+, sa masse devait donc être près de deux mille fois plus petite. Le fait que les « corpuscules » pouvaient traverser des feuilles métalliques et parcourir des distances relativement importantes dans l'air indiquait qu'il s'agissait de particules très petites. À une époque où certains scientifiques n'étaient pas encore convaincus par la représentation atomique de la matière, Thomson se rendit compte qu'il avait affaire à une nouvelle forme de matière, de taille encore plus petite qu'un atome. Le corpuscule fut bientôt identifié comme *électron*, dont l'existence avait été postulée en vertu d'observations chimiques. La valeur définitive de la charge de l'électron ne fut mesurée qu'en 1909 par R. A. Millikan (voir la section 2.8). Ce n'est que quelques années plus tard que des modèles atomiques cohérents permirent d'expliquer le rôle de l'électron dans l'atome.

RÉSUMÉ

La force magnétique sur une charge q de vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ est

$$\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (8.2)$$

La force a pour module $F_B = qvB\sin\theta$ et son orientation est toujours perpendiculaire à la fois à $\vec{\mathbf{v}}$ et à $\vec{\mathbf{B}}$. Une force magnétique peut faire tourner une particule *libre* (accélération centripète), mais ne peut effectuer de travail sur cette particule et ne peut donc modifier son énergie cinétique.

La force magnétique sur un fil rectiligne de longueur ℓ parcouru par un courant I dans un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ est

$$\vec{\mathbf{F}}_B = I\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (8.4a)$$

$\vec{\boldsymbol{\ell}}$ étant orienté dans le sens du courant. Si le fil n'est pas rectiligne ou si le champ n'est pas uniforme, la force agissant sur une longueur infinitésimale $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}$ est

$$\mathrm{d}\vec{\mathbf{F}}_B = I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (8.5)$$

Une boucle de N spires de section A parcourue par un courant I et plongée dans un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}}$ est soumise à un moment de force dont le module est donné par

$$\tau = NIAB\sin\theta \qquad (8.6)$$

où θ est l'angle entre la perpendiculaire à la boucle et le champ magnétique. Ce moment de force tend à faire tourner la boucle pour que son plan soit perpendiculaire au champ magnétique. Par contre, la force résultante subie par la boucle est nulle si le champ magnétique est uniforme.

Si on définit le moment dipolaire magnétique

$$\vec{\boldsymbol{\mu}} = NIA\vec{\mathbf{u}}_n \qquad (8.8)$$

alors l'équation 8.6 devient

$$\vec{\boldsymbol{\tau}} = \vec{\boldsymbol{\mu}} \times \vec{\mathbf{B}} \qquad (8.7)$$

Le moment de force a donc tendance à faire tourner la boucle pour que $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ soit aligné sur le champ magnétique.

Une particule de charge q et de masse m ayant une vitesse de module v dans un plan perpendiculaire à un champ uniforme est animée d'un mouvement circulaire uniforme. D'après la deuxième loi de Newton,

$$|q|vB = \frac{mv^2}{r} \qquad (8.10)$$

La période $T = 2\pi r/v$ et la fréquence cyclotron f_c sont données par

$$f_c = \frac{1}{T} = \frac{|q|B}{2\pi m} \qquad (8.12b)$$

On remarque que ces grandeurs ne dépendent ni de v ni de r, caractéristique essentielle au fonctionnement du cyclotron.

Une particule soumise à la fois à un champ électrique et à un champ magnétique est soumise à la force de Lorentz:

$$\vec{\mathbf{F}} = q(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) \qquad (8.14)$$

TERMES IMPORTANTS

champ magnétique (p. 309)
cyclotron (p. 336)
effet Hall (p. 338)
force de Lorentz (p. 330)
force magnétique (p. 309)
fréquence cyclotron (p. 327)
gauss (p. 311)
moment dipolaire magnétique (p. 321)
pas de l'hélice (p. 328)
règle de la main droite (p. 313)
sélecteur de vitesse (p. 330)
spectromètre de masse (p. 330)
spire (p. 320)
tension de Hall (p. 339)
tesla (p. 311)

RÉVISION

R1. Représentez à l'aide d'un dessin les lignes du champ magnétique d'un barreau aimanté.

R2. Vrai ou faux ? Le pôle nord d'un aimant est attiré par le pôle nord d'un autre aimant.

R3. Vrai ou faux ? Pour qu'une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique subisse une force, il faut absolument que sa vitesse soit perpendiculaire au champ.

R4. Dans un fil de longueur ℓ parcouru par un courant I et plongé dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$, ce sont les électrons de conduction qui subissent une force magnétique donnée par $\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$. Montrez, à l'aide d'un dessin et en appliquant la règle de la main droite, que cette force est dans le même sens que celle obtenue par l'expression $\vec{\mathbf{F}}_B = I\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\mathbf{B}}$.

R5. Vrai ou faux ? Une boucle de courant placée dans un champ magnétique a tendance à s'orienter de manière à ce que le plan de la boucle soit perpendiculaire aux lignes de champ magnétique.

R6. On lance une particule chargée à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ dans un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}}$. Quelle est la forme de la trajectoire de la particule si (a) $\vec{\mathbf{v}}$ est parallèle à $\vec{\mathbf{B}}$; (b) $\vec{\mathbf{v}}$ est perpendiculaire à $\vec{\mathbf{B}}$?

R7. Une particule chargée de masse m et de charge q se déplace selon un module de vitesse v et une période T sur une trajectoire circulaire dans un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}}$. Qu'arrive-t-il à T (a) si on double m ; (b) si on double q ; (c) si on double v ; (d) si on double B ?

R8. On lance une particule chargée positivement à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ perpendiculaire à un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}}$. Comment doit-on disposer un champ électrique $\vec{\mathbf{E}}$ si on désire, à l'aide de celui-ci, annuler la force magnétique subie par la particule ? Votre réponse dépend-elle du signe de la charge de la particule ?

R9. Décrivez en mots et en images ce qu'est (a) un sélecteur de vitesse ; (b) un spectrographe de masse ; (c) un cyclotron.

R10. Vrai ou faux ? Une particule qui fait N tours dans un cyclotron a subi N fois l'effet accélérateur de la différence de potentiel maintenue entre les deux demi-cylindres.

R11. Expliquez dans vos termes et à l'aide de dessins comment on peut déterminer, à l'aide de l'effet Hall, le signe des charges en mouvement dans un fil parcouru par un courant.

R12. Vrai ou faux ? (a) Quand on mesure une tension de Hall, cela signifie qu'il y a un courant latéral dans le fil. (b) Quand on mesure une tension de Hall, le seul champ électrique que subissent les particules chargées mobiles est le champ latéral $\vec{\mathbf{E}}_{\mathrm{H}}$.

QUESTIONS

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

Q1. Montrez que 1 T = 1 $\mathrm{N{\cdot}A^{-1}{\cdot}m^{-1}}$.

Q2. Un champ magnétique peut-il servir à accélérer une particule chargée ? Expliquez pourquoi.

Q3. Dans l'équation $\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$, quels couples de vecteurs sont toujours perpendiculaires ? Quels couples de vecteurs peuvent avoir entre eux un angle quelconque ?

Q4. Comment varie le rayon de la trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique en fonction de son énergie cinétique ?

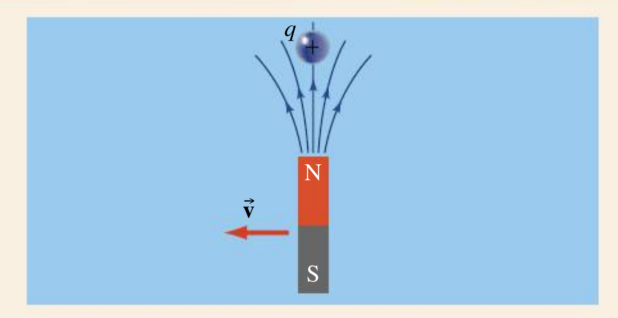
Q5. Un faisceau d'électrons traverse une région sans être dévié. Quelle conclusion peut-on en déduire quant à l'existence de champs électrique et magnétique ?

Q6. Le flux de rayons cosmiques constitués de particules chargées arrivant sur la Terre à l'équateur provient plutôt de l'ouest. Que peut-on en déduire ?

Q7. Une charge immobile n'est soumise qu'à l'action d'un champ électrique, alors qu'une charge en mouvement peut également être soumise à un champ magnétique. Si un barreau aimanté se déplace rapidement près d'une charge immobile (figure 8.45), la charge est-elle soumise à une force ? Si oui, de quelle nature est cette force ?

Q8. Soit une charge dans un champ magnétique. Étant donné q, $\vec{\mathbf{v}}$ et $\vec{\mathbf{F}}_B$, que peut-on dire de $\vec{\mathbf{B}}$?

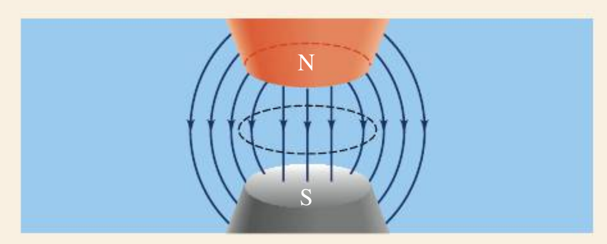
Q9. Soit une région où le champ magnétique terrestre est horizontal et orienté plein nord. Quelle est l'orientation de la force magnétique agissant sur un électron qui se déplace : (a) vers le nord ; (b) vers l'est ; (c) verticalement vers le haut ?



▲ **Figure 8.45**

Question 7.

Q10. La figure 8.46 représente les lignes de champ magnétique aux extrémités d'un aimant. On considère un électron en orbite dans un plan perpendiculaire aux lignes. Montrez que l'orbite est stable par rapport à de petits déplacements perpendiculaires au plan de l'orbite.



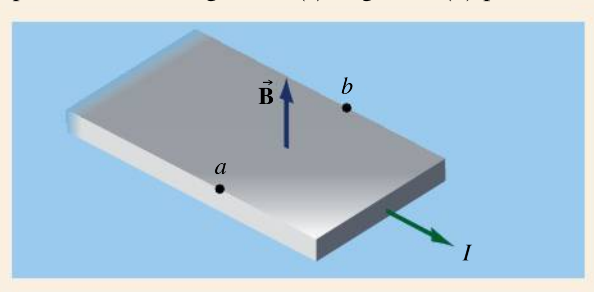
▲ **Figure 8.46**

Question 10.

Q11. Serait-il acceptable de définir l'orientation de $\vec{\mathbf{B}}$ comme étant celle de la force agissant sur une charge positive en mouvement ? Justifiez votre réponse.

Q12. Une particule chargée provenant d'une région qui n'est soumise à aucun champ pénètre dans un champ magnétique uniforme. Peut-elle décrire une trajectoire fermée dans le champ ?

Q13. On utilise une plaquette de semi-conducteur comme sonde de Hall pour mesurer le module du champ magnétique (figure 8.47). Quel est le signe de la différence de potentiel $V_a - V_b$ si les porteurs de charge sont (a) négatifs ; (b) positifs ?



▲ **Figure 8.47**

Question 13.

Q14. Les rayons cosmiques sont des particules chargées de haute énergie qui proviennent de l'espace et bombardent la Terre. Le flux de particules des rayons cosmiques qui atteignent la Terre est plus intense aux pôles qu'à l'équateur. Pourquoi ? (Pensez au champ magnétique terrestre.)

Q15. Si, dans un champ magnétique donné, deux particules sont animées d'un mouvement circulaire uniforme de même fréquence, que peut-on en conclure ?

Q16. Dans un vieux téléviseur à écran cathodique, pourquoi un barreau aimanté placé à proximité de l'écran provoque-t-il une distorsion de l'image sur l'écran ?

Q17. L'énergie cinétique maximale atteinte par les particules dans un cyclotron est-elle influencée par la valeur de la différence de potentiel entre les demi-cylindres du cyclotron ? Si oui, comment ?

Q18. Une petite bille aimantée a une surface sur laquelle adhèrent certaines protéines spécifiques. Comment utiliseriez-vous cette bille pour extraire les protéines en question d'une solution où elles se trouvent mélangées à d'autres molécules ?

EXERCICES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

Dans les exercices suivants, on suppose que l'axe des x positifs est orienté vers l'est, que l'axe des y positifs est orienté vers le nord et que l'axe des z positifs est orienté vers le haut.

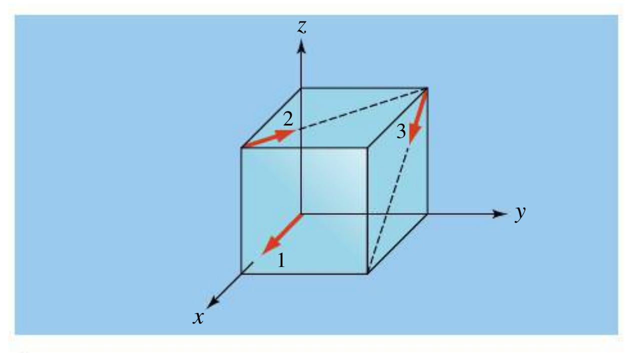
8.1 et 8.2 Champ et force magnétiques

E1. (I) En un point donné de l'équateur, le champ magnétique terrestre est horizontal, orienté vers le nord et possède un module de 0,6 G. Quelle force magnétique engendre-t-il sur (a) un proton se déplaçant vers le bas à 10^6 m/s ; (b) un électron se déplaçant vers l'ouest à 10^6 m/s ?

E2. (I) Un électron se déplace dans le sens négatif de l'axe des y à 10^6 m/s perpendiculairement à un champ magnétique uniforme. La force magnétique agissant sur l'électron est $3{,}2 \times 10^{-15}\vec{\mathbf{i}}$ N. Quels sont le module et le sens du champ magnétique ?

E3. (I) En un point donné de sa surface, le champ magnétique de la Terre a un module de 0,12 G et est orienté directement vers le bas. Décrivez la force magnétique agissant sur un proton se déplaçant à l'horizontale à $2{,}7 \times 10^6$ m/s, selon une orientation qui pointe à 45° au sud de l'est.

E4. MonLab (I) Une particule de charge $q = 1$ μC se déplace à la vitesse de module 10^6 m/s dans un champ uniforme $\vec{\mathbf{B}} = 500\vec{\mathbf{j}}$ G. Trouvez la force magnétique agissant sur la charge pour chacune des trois orientations de la vitesse précisées par une arête et deux des diagonales du cube de la figure 8.48 (utilisez la notation $\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{k}}$).



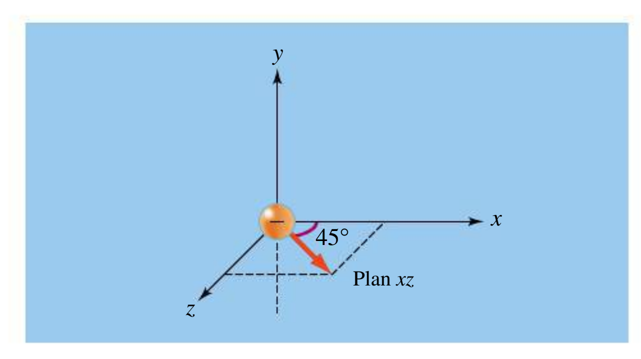
▲ **Figure 8.48**

Exercice 4.

E5. (I) Lorsqu'une particule chargée positivement se déplace dans le plan xy selon un angle de 30° par rapport à l'axe des x positifs, elle est soumise à une force magnétique orientée suivant l'axe des z positifs. Lorsqu'elle se déplace avec une vitesse de même

module le long de l'axe des y positifs, la force est orientée dans le sens des z négatifs et a le même module qu'auparavant. Quelle est l'orientation du champ magnétique ?

E6. MonLab (II) Une particule de charge $q = -0{,}25\ \mu\text{C}$ a une vitesse de module 2×10^6 m/s faisant un angle de 45° avec l'axe des x dans le plan xz (figure 8.49). Il règne un champ magnétique uniforme de module 0,03 T. (a) Si $\vec{\mathbf{B}}$ est orienté selon l'axe des z positifs, quelle est la force magnétique agissant sur la charge ? (b) Si la force agissant sur la particule chargée est égale à 4×10^{-3} N selon l'axe des y positifs, donnez l'une des orientations possibles de $\vec{\mathbf{B}}$.



▲ **Figure 8.49**

Exercice 6.

E7. MonLab (I) Une particule de charge $q = -4\ \mu\text{C}$ a une vitesse instantanée $\vec{\mathbf{v}} = (2{,}0\vec{\mathbf{i}} - 3{,}0\vec{\mathbf{j}} + 1{,}0\vec{\mathbf{k}}) \times 10^6$ m/s dans un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}} = (2{,}0\vec{\mathbf{i}} + 5{,}0\vec{\mathbf{j}} - 3{,}0\vec{\mathbf{k}}) \times 10^{-2}$ T. Quelle est la force magnétique agissant sur la charge ?

E8. (I) Lorsqu'une particule de charge $q = -2\ \mu\text{C}$ a une vitesse instantanée $\vec{\mathbf{v}} = (-\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}}) \times 10^6$ m/s, elle est soumise à une force $\vec{\mathbf{F}}_B = (3{,}0\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + 2{,}0\vec{\mathbf{k}})$ N. Déterminez le champ magnétique sachant que $B_x = 0$.

E9. (I) Un électron est soumis à une force magnétique $\vec{\mathbf{F}}_B = (-2\vec{\mathbf{i}} + 6\vec{\mathbf{j}}) \times 10^{-13}$ N dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}} = -1{,}2\vec{\mathbf{k}}$ T. Quelle est la vitesse de l'électron, sachant que $v_z = 0$?

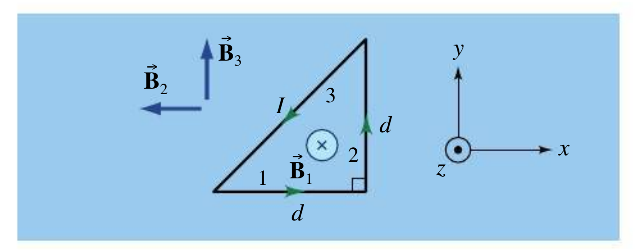
E10. (I) Un électron se déplaçant à la vitesse de $10^6\vec{\mathbf{i}}$ m/s dans un champ magnétique est soumis à une force magnétique de $4 \times 10^{-14}\vec{\mathbf{j}}$ N. (a) Quels renseignements ces données vous permettent-elles de déduire concernant $\vec{\mathbf{B}}$? (b) Supposez que la force donnée ait la plus grande valeur possible de module dans le champ. Que pouvez-vous en déduire dans ce cas ?

E11. MonLab (II) Lorsqu'un proton a une vitesse $\vec{\mathbf{v}} = (2\vec{\mathbf{i}} + 3\vec{\mathbf{j}}) \times 10^6$ m/s, il est soumis à une force $\vec{\mathbf{F}}_B = -1{,}28 \times 10^{-13}\vec{\mathbf{k}}$ N. Lorsque sa vitesse est orientée selon l'axe des z positifs, la force magnétique agissant sur lui change de module et est orientée selon l'axe des x positifs. Quel est le champ magnétique ?

8.3 Force magnétique sur un conducteur parcouru par un courant

E12. (I) Une ligne de transmission transporte un courant de 10^3 A d'ouest en est. Le champ magnétique terrestre est horizontal, orienté vers le nord et a un module de 0,5 G. Quelle est la force exercée sur 1 m de la ligne ?

E13. (I) La boucle triangulaire de la figure 8.50 est située dans le plan xy et parcourue par le courant indiqué. Si cette boucle est soumise à un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}}_1 = -B_1\vec{\mathbf{k}}$, quelle est la force magnétique agissant sur chacun des côtés de la boucle ?



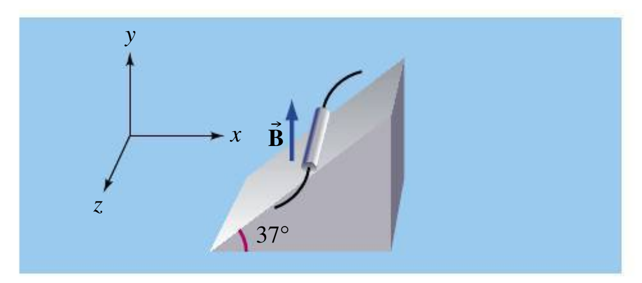
▲ **Figure 8.50**

Exercices 13, 14, 15 et 24.

E14. (I) La boucle triangulaire de la figure 8.50 est soumise à un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}}_2 = -B_2\vec{\mathbf{i}}$. Quelle est la force magnétique agissant sur chacun des côtés de la boucle ?

E15. (I) La boucle triangulaire de la figure 8.50 est soumise à un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}}_3 = +B_3\vec{\mathbf{j}}$. Quelle est la force magnétique agissant sur chacun des côtés de la boucle ?

E16. MonLab (II) Une tige de longueur $\ell = 15$ cm et de masse $m = 30$ g est située sur un plan incliné faisant un angle de 37° par rapport à l'horizontale (figure 8.51). Le courant entre et sort de la tige par des fils souples et légers dont on ne tient pas compte. Donnez le sens et l'intensité du courant pour lequel la tige est en équilibre dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}} = 0{,}25\vec{\mathbf{j}}$ T. On néglige la friction sur la surface du plan incliné.



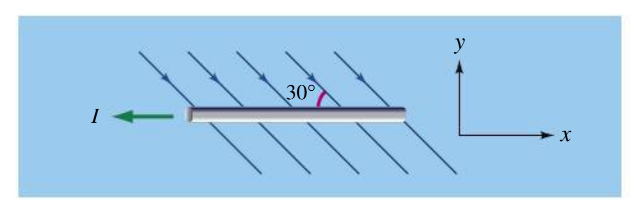
▲ **Figure 8.51**

Exercice 16.

E17. (I) Une ligne de transmission transporte un courant de 800 A d'est en ouest. Le champ magnétique terrestre est de 0,8 G, orienté vers le nord mais selon un

angle de 60° sous l'horizontale. Quelle est la force magnétique par unité de longueur agissant sur la ligne ?

E18. (I) Soit un fil rectiligne de longueur 80 cm parcouru par un courant de 3 A dans un champ magnétique uniforme de module 0,6 T. Trouvez la force magnétique agissant sur le fil lorsque le champ est orienté dans le plan xy comme à la figure 8.52.



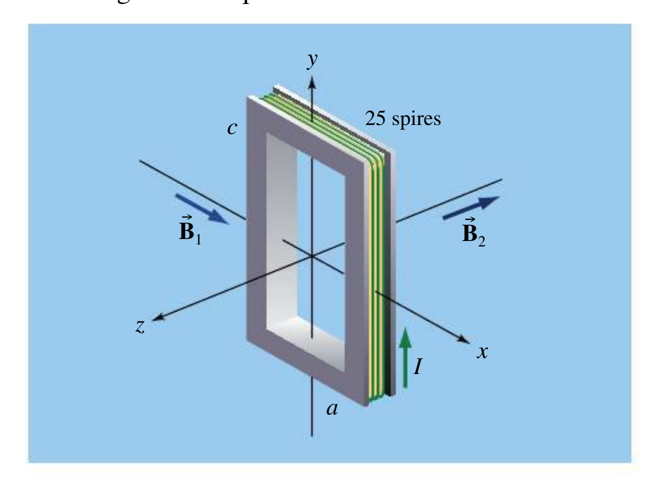
▲ **Figure 8.52**

Exercice 18.

E19. (I) Un fil rectiligne de longueur 45 cm transporte un courant de 6 A selon l'axe des z positifs. Il est soumis à une force magnétique de 0,05 N orientée dans le sens des x négatifs. Trouvez le champ magnétique, sachant qu'il est orienté : (a) perpendiculairement au fil ; (b) selon un angle de 30° par rapport à l'axe des z positifs.

8.4 Moment de force sur une boucle de courant

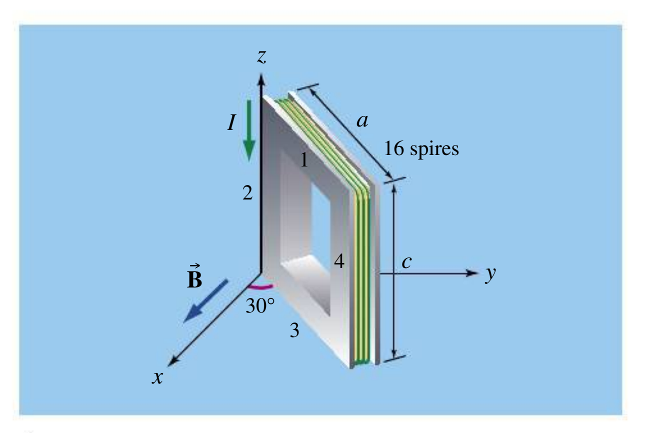
E20. (I) Un cadre rectangulaire comportant 25 spires a pour côtés $a = 2$ cm et $c = 5$ cm ; un courant de 8 A le parcourt dans le sens indiqué dans la figure 8.53. Quels sont la force agissant sur chacun des côtés et le moment de force sur le cadre si le champ magnétique extérieur est égal à 0,3 T et est orienté : (a) parallèlement au plan du cadre ($\vec{\mathbf{B}}_1$) ; (b) normalement au plan du cadre ($\vec{\mathbf{B}}_2$) ? Vérifiez que vous obtenez le même moment de force en le calculant à l'aide des forces sur les côtés ou en le calculant directement grâce à l'équation 8.6.



▲ **Figure 8.53**

Exercice 20.

E21. MonLab (II) Une bobine rectangulaire comportant 16 spires a pour côtés $a = 20$ cm et $c = 50$ cm ; un courant de 10 A la parcourt. Le côté c est parallèle à l'axe des z. On fait pivoter la bobine autour de l'axe des z de sorte que son plan fasse un angle de 30° par rapport à un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}} = 0{,}5\vec{\mathbf{i}}$ T (figure 8.54). (a) Trouvez la force agissant sur chacun des côtés. (b) Quel est le moment dipolaire magnétique de la bobine ? (c) Quel est le moment de force sur la bobine ?



▲ **Figure 8.54**

Exercice 21.

E22. (II) L'armature d'un moteur comporte huit spires carrées de 10 cm de côté. Comme à la figure 8.25*a* (p. 326), le plan de chacune de ces spires est tangent à un champ magnétique radial de module 0,2 T. Si le courant est de 10 A, trouvez : (a) le module du moment de force total ; (b) la puissance mécanique produite à 1200 tr/min.

E23. (I) Un courant de 5 A circule dans un cadre circulaire de rayon 2 cm. L'axe du cadre fait un angle de 30° avec un champ magnétique uniforme de module 0,06 T. Quel est le module du moment de force sur le cadre ?

E24. (I) Soit la boucle de courant triangulaire de la figure 8.50. Trouvez : (a) le moment dipolaire magnétique ; (b) le moment de force dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}} = -B\vec{\mathbf{i}}$.

E25. (I) Un cadre circulaire de rayon 4 cm est parcouru par un courant de 2,8 A. Le moment dipolaire magnétique du cadre est dirigé selon $\vec{\mathbf{u}}_n = 0{,}6\vec{\mathbf{i}} - 0{,}8\vec{\mathbf{j}}$. Le champ magnétique est $\vec{\mathbf{B}} = (0{,}2\vec{\mathbf{i}} - 0{,}4\vec{\mathbf{k}})$ T. Trouvez : (a) le moment de force sur le cadre ; (b) l'énergie potentielle du cadre.

E26. (I) Un galvanomètre a un cadre carré comportant 20 spires de 2 cm de côté. Lorsqu'il est suspendu dans un champ magnétique radial ($B = 400$ G), il enregistre une déviation de 30° pour un courant de 2 mA. Quelle est la constante de torsion κ de la suspension ?

E27. (I) Un galvanomètre a un cadre carré de 200 spires de 2,5 cm de côté. Le champ magnétique est radial, de module 500 G, et normal aux côtés verticaux du cadre. Si la constante de torsion de la suspension est égale à 2×10^{-8} N·m/degré, quelle est la déviation angulaire produite par un courant de 10 μA ?

8.5 à 8.7 Mouvement d'une particule chargée ; cyclotron

E28. (I) Un proton se déplace à la vitesse de module 3×10^7 m/s perpendiculairement à un champ magnétique uniforme de module 0,05 T. Trouvez : (a) le rayon de la trajectoire ; (b) la période de son mouvement.

E29. (I) Un électron d'énergie cinétique égale à 1 keV est projeté perpendiculairement aux lignes d'un champ magnétique uniforme de module 50 G. Trouvez : (a) le rayon de sa trajectoire ; (b) le module de son accélération ; (c) la période de son mouvement.

E30. (I) Un proton décrit un cercle de rayon 10 cm, normal aux lignes d'un champ magnétique de module 1,0 T. Trouvez : (a) le module de sa quantité de mouvement ; (b) son énergie cinétique en électronvolts.

E31. (I) Un proton décrit une orbite circulaire de rayon 20 cm perpendiculaire à un champ magnétique de module 0,8 T. Trouvez : (a) le module de sa vitesse ; (b) la période de son mouvement ; (c) son énergie cinétique.

E32. (I) Quel est le moment dipolaire magnétique du mouvement orbital d'un électron dans l'atome d'hydrogène si le module de son moment cinétique orbital est égal à $2{,}11 \times 10^{-34}$ kg·m²/s ?

E33. (I) La masse d'un deutéron est le double de celle du proton, $m_d = 2m_p$, mais ils ont la même charge. Un proton et un deutéron se déplacent tous deux dans une direction normale à un champ magnétique uniforme. Quel est le rapport des rayons de leurs trajectoires s'ils ont les mêmes : (a) modules de quantité de mouvement ; (b) modules de vitesse ; (c) énergies cinétiques ?

E34. (I) On suppose qu'un électron et un proton se déplacent tous deux perpendiculairement au même champ magnétique uniforme. Trouvez le rapport des rayons de leurs orbites sachant qu'ils ont les mêmes : (a) modules de la vitesse ; (b) énergies cinétiques.

E35. (I) Dans une expérience, des protons (m_p, q_p) et des particules α ($m_\alpha = 4m_p$; $q_\alpha = 2q_p$) doivent décrire des trajectoires circulaires de même rayon, normales à un champ magnétique dont on peut faire varier le module. Trouvez le rapport des modules de champ nécessaire pour que les deux types de particules aient les mêmes : (a) modules de vitesse ; (b) modules de quantité de mouvement ; (c) énergies cinétiques.

E36. (I) Un électron se déplaçant à 4×10^6 m/s pénètre dans un champ magnétique uniforme de module $B = 0{,}04$ T selon un angle de 30° par rapport aux lignes du champ. Quel est le pas de la trajectoire hélicoïdale ?

E37. (I) Un proton issu du vent solaire s'approche de la Terre à 500 km/s le long d'une ligne radiale dans le plan équatorial, c'est-à-dire normalement aux lignes du champ magnétique. On suppose que le champ terrestre a un module de 0,2 G dans la région. (a) Quel est le rayon de la trajectoire du proton ? (b) Du point de vue d'un observateur situé sur Terre, le proton dévie-t-il initialement vers l'est ou vers l'ouest ?

E38. (I) Un proton décrit un cercle de rayon 3,2 cm perpendiculaire à un champ magnétique de module 0,75 T. Trouvez : (a) la fréquence du cyclotron ; (b) l'énergie cinétique du proton ; (c) le module de la quantité de mouvement du proton.

E39. (I) Une particule α de masse $6{,}7 \times 10^{-27}$ kg et de charge $2e$ est accélérée à partir du repos par une différence de potentiel de 14 kV et pénètre dans un champ magnétique uniforme de module 0,6 T, normalement aux lignes de champ. Trouvez le rayon de sa trajectoire.

E40. MonLab (II) Les deux isotopes du néon ont des masses de 20 u et de 22 u. Des ions de ces deux isotopes, portant une charge e, sont accélérés à partir du repos par une différence de potentiel de 1 kV, puis pénètrent dans un champ magnétique uniforme de module 0,4 T, normalement aux lignes du champ. Quelle distance les sépare après une demi-révolution dans un spectromètre ?

E41. (II) Dans un spectromètre de masse de Bainbridge (voir la figure 8.32, p. 331), les ions traversent le champ électromagnétique ($\vec{\mathbf{B}}_1$, $\vec{\mathbf{E}}$) d'un sélecteur de vitesse et sont ensuite déviés par un champ purement magnétique ($\vec{\mathbf{B}}_2$). Sachant que $E = 3 \times 10^5$ V/m et que $B_1 = B_2 = 0{,}4$ T, calculez la différence des positions sur la plaque photographique pour les ions de charge $q = e$ des isotopes de carbone de masses 12 u et 14 u.

E42. MonLab (I) Un électron de vitesse $\vec{\mathbf{v}} = 2 \times 10^6 \vec{\mathbf{i}}$ m/s pénètre dans une région où le champ électrique est $\vec{\mathbf{E}} = -200\vec{\mathbf{j}}$ V/m. (a) Quel champ magnétique, perpendiculaire à $\vec{\mathbf{v}}$, est nécessaire pour que l'électron ne soit pas dévié ? (b) Si l'on supprime le champ électrique, quel est le rayon de la trajectoire de l'électron dans le champ magnétique ?

E43. (I) Un proton est accéléré à partir du repos selon l'axe des x négatifs par une différence de potentiel de 10 kV. Il traverse une région où le champ électrique est égal à $-10^3\vec{\mathbf{j}}$ V/m. Quel est le champ magnétique nécessaire pour qu'il ne soit pas dévié ?

(On suppose que le champ magnétique est perpendiculaire à la vitesse du proton.)

E44. (I) Un proton effectue 100 révolutions dans un cyclotron et sort à partir d'une trajectoire circulaire ayant un rayon de 50 cm et une énergie de 10 MeV. Trouvez: (a) le module du champ magnétique dans le cyclotron; (b) la différence de potentiel entre les demi-cylindres; (c) la fréquence de la source de tension.

E45. MonLab (I) Un cyclotron servant à accélérer des protons a un rayon de 75 cm et un champ magnétique de module 0,9 T. Trouvez: (a) la fréquence angulaire du cyclotron; (b) l'énergie cinétique maximale des protons à la sortie.

E46. (I) Des protons sortent d'un cyclotron avec une énergie cinétique de 12 MeV. La différence de potentiel alternative a une amplitude de 6×10^4 V et le champ magnétique a un module de 1,6 T. (a) Quel est le rayon du cyclotron ? (b) Combien de temps les protons mettent-ils pour sortir du cyclotron, à partir du moment où ils sont émis par la source ?

E47. (I) Une particule chargée est accélérée à partir du repos selon l'axe des x par une différence de potentiel de 225 V, puis elle pénètre dans un champ uniforme $\vec{\mathbf{B}} = 10\vec{\mathbf{k}}$ G. Le rayon de sa trajectoire est égal à 5 cm. Quel est le rapport charge/masse de la particule ?

E48. (I) Un ion ($m = 1{,}2 \times 10^{-25}$ kg, $q = 2e$) est accéléré à partir du repos par une tension de 200 V, puis pénètre dans un champ uniforme de module $B = 0{,}2$ T, dans une direction normale aux lignes de champ. Trouvez le rayon de sa trajectoire.

8.8 Effet Hall

E49. (II) Une plaquette métallique d'épaisseur 0,1 cm et de largeur 1,6 cm est parcourue par un courant de 15 A dans un champ magnétique de 0,2 T normal à la largeur de la plaquette. La tension de Hall est égale à 6 μV. Trouvez: (a) le module de la vitesse de dérive des porteurs de charge; (b) le nombre d'électrons par unité de volume.

E50. (II) Une plaquette de cuivre d'épaisseur 0,25 cm, parcourue par un courant de 10 A, est disposée perpendiculairement à un champ magnétique. La tension de Hall est égale à 1,2 μV. Quel est le module du champ magnétique si les porteurs de charges sont des électrons ? On donne $n = 8{,}5 \times 10^{28}$ m^{-3}.

E51. (II) Un courant de 2 A circule dans une plaquette métallique d'épaisseur 0,1 mm et de largeur 0,8 cm. Dans un champ magnétique normal à la largeur de la plaquette et ayant un module de 0,8 T, la tension de Hall est égale à 1,4 μV. Quel est le nombre d'électrons par unité de volume ?

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

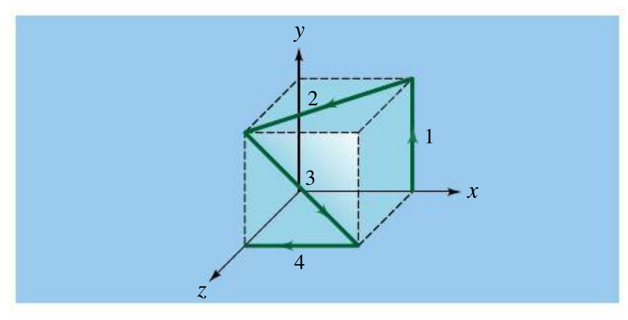
8.1 et 8.2 Champ et force magnétiques

E52. (II) Lorsque la vitesse d'un proton est selon $+x$, la force magnétique qu'il subit est selon $-y$. Si la vitesse d'un autre proton est de 2×10^6 m/s et que son orientation est à 30° par rapport à celle du même champ magnétique, ce proton subit une force de $-4{,}8 \times 10^{-14}\vec{\mathbf{i}}$ N. Décrivez le champ magnétique.

E53. (II) Un proton ayant une vitesse $1{,}8 \times 10^6\vec{\mathbf{i}}$ m/s se déplace dans un champ magnétique uniforme de module 0,65 T. La force magnétique qu'il subit a un module de $7{,}91 \times 10^{-14}$ N. (a) Quel est l'angle entre la vitesse et le champ magnétique ? (b) Si le proton se déplace maintenant selon $+y$, en conservant le même module de vitesse qu'en (a), la force est alors selon $+z$, de même module, elle aussi. Exprimez les deux valeurs possibles du vecteur $\vec{\mathbf{B}}$ en notation vectorielle.

8.3 Force magnétique sur un conducteur parcouru par un courant

E54. (I) Un fil conducteur traversé d'un courant de 12 A prend la forme décrite à la figure 8.55, où le cube a une arête de 20 cm. Avec un champ $\vec{\mathbf{B}} = 0{,}5\vec{\mathbf{i}}$ T, quelle force magnétique subit chaque portion rectiligne du fil ?



▲ **Figure 8.55**
Exercices 54 et 55.

E55. (I) Répétez l'exercice précédent avec $\vec{\mathbf{B}} = 0{,}5\vec{\mathbf{k}}$ T.

E56. (I) Un fil rectiligne de 2 m est traversé d'un courant de 25 A dans le sens négatif des z et est perpendiculaire à un champ magnétique uniforme. Si la force magnétique est donnée par $(4{,}01\vec{\mathbf{i}} - 6{,}0\vec{\mathbf{j}}) \times 10^{-5}$ N, déterminez $\vec{\mathbf{B}}$.

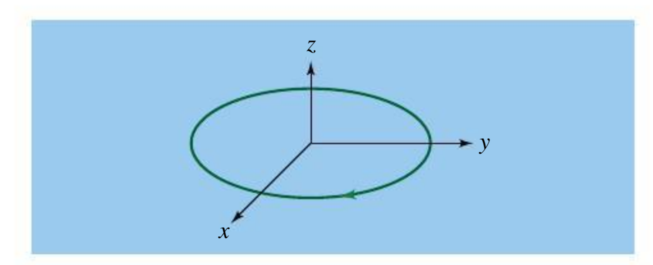
E57. (I) En un point donné de la surface de la Terre, le champ magnétique a un module de 0,8 G. Il pointe vers le nord à 70° sous l'horizontale. Un fil rectiligne

de 1,8 m, parallèle à la surface de la Terre, est parcouru d'un courant de 20 A. Décrivez la force magnétique sur le fil dans le cas où le courant circule (a) directement vers le nord ; (b) directement vers l'est.

E58. (I) Une ligne de transmission électrique horizontale est parcourue par un courant de 2000 A qui est orienté vers le sud. À cet endroit, le champ magnétique terrestre possède un module de 0,62 G et pointe vers le nord à 60° sous l'horizontale. Quelle force magnétique subit 10 m de la ligne de transmission ?

8.4 Moment de force sur une boucle de courant

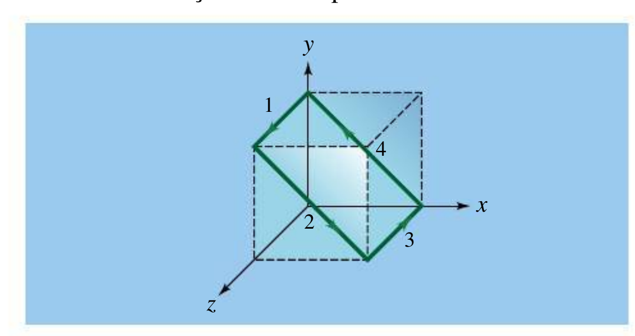
E59. (I) Une bobine circulaire comporte 15 tours de fils, elle est parcourue d'un courant de 2 A et son rayon est de 25 cm. La bobine est parallèle au plan xy, comme dans la figure 8.56. Si $\vec{\mathbf{B}} = 0{,}2\vec{\mathbf{i}}$ T, quel moment de force subit la bobine ?



▲ **Figure 8.56**

Exercice 59.

E60. (II) Une spire rectangulaire, comme celle décrite à la figure 8.57, où le cube a une arête de 20 cm, est parcourue d'un courant de 8,0 A. Si $\vec{\mathbf{B}} = 0{,}4\vec{\mathbf{i}}$ T, trouvez (a) la force magnétique agissant sur chacun des segments de la spire rectangulaire ; (b) le moment de force s'exerçant sur la spire.



▲ **Figure 8.57**

Exercice 60.

E61. (I) Le moment dipolaire magnétique de la Terre a une valeur approximative de 8×10^{22} A·m^2. Supposons, même si cela est irréaliste, que ce moment magnétique est produit par un courant circulant dans un anneau de 5000 km de rayon. Quelle intensité aurait ce courant ?

E62. (I) Un galvanomètre rectangulaire comporte 120 tours de fil et possède une aire de section de 5,0 cm^2. Un champ magnétique de module 0,06 T traverse le galvanomètre, comme dans la figure 8.23 (p. 324), et la constante de torsion du ressort est de $2{,}2 \times 10^{-7}$ N·m/rad. Quel courant produit une déflection de 45° de l'aiguille ?

8.5 à 8.7 Mouvement d'une particule chargée ; cyclotron

E63. (I) Un électron accéléré du repos par une différence de potentiel de 260 V pénètre dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme. Sa trajectoire prend la forme d'un cercle de 6,0 cm de rayon. Quel est le module du champ magnétique ?

E64. (II) Des particules de masse m accélérées par une différence de potentiel ΔV pénètrent dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme. (a) Si les particules se déplacent perpendiculairement au champ magnétique, exprimez le rayon de la trajectoire en fonction de ΔV. (b) Si la différence de potentiel augmente de 21 %, de quel facteur le rayon de la trajectoire augmente-t-il ?

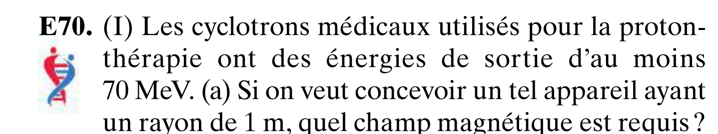
E65. (I) Quel rayon doit posséder un cyclotron pour être en mesure d'accélérer des particules α ($m = 4$ u, $q = 2e$) et leur procurer une énergie cinétique de 10 MeV dans un champ magnétique de module 1,2 T ?

E66. (I) Un électron possède une énergie cinétique de 2,0 keV et se déplace perpendiculairement à un champ magnétique uniforme de module 0,40 G. Quel est le rayon de sa trajectoire circulaire ?

E67. (I) Un proton, dont la vitesse est $2{,}4 \times 10^6$ m/s, se déplace à 80° des lignes d'un champ magnétique uniforme de module 0,2 T. (a) Quel est le rayon de la composante circulaire de son mouvement ? (b) Quel est le pas de sa trajectoire hélicoïdale ?

E68. (I) Un proton et un deutéron ($m_d = 2\,m_p$, $q_d = q_p = e$) ont une trajectoire circulaire de même rayon dans un champ magnétique donné. Quel est le rapport (a) du module de leur quantité de mouvement ; (b) de leur énergie cinétique ?

E69. (II) Un électron accéléré à partir du repos par une différence de potentiel de 400 V pénètre dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme. Sa trajectoire prend initialement la forme d'un cercle de 5,0 cm de rayon. Si, après 10 tours complets, le rayon n'est plus que de 3,0 cm, estimez la valeur moyenne de la force de friction qu'engendrent les molécules du gaz que frappe l'électron tout au long de sa trajectoire.



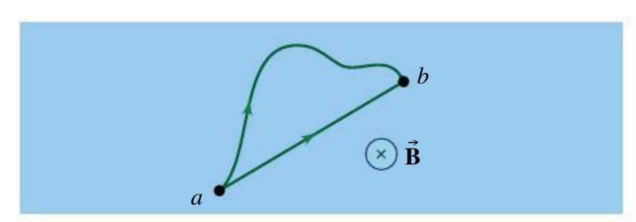
E70. (I) Les cyclotrons médicaux utilisés pour la protonthérapie ont des énergies de sortie d'au moins 70 MeV. (a) Si on veut concevoir un tel appareil ayant un rayon de 1 m, quel champ magnétique est requis ? Négligez les effets relativistes. (b) Quel est le nombre minimal de révolutions nécessaires si la tension d'alimentation est de 100 kV ? (c) Combien de temps les protons séjournent-ils dans l'appareil ?

PROBLÈMES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

P1. (II) Un dipôle de moment dipolaire magnétique $\vec{\boldsymbol{\mu}}$ pivote librement autour de son centre et a un moment d'inertie I par rapport à son axe. (a) Montrez que, pour de petits déplacements angulaires, le dipôle décrit un mouvement harmonique simple dans un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}}$. (b) Quelle est la période des oscillations ?

P2. (I) La figure 8.58 représente un fil incurvé parcouru par un courant I entre a et b dans un champ magnétique uniforme $\vec{\mathbf{B}}$. Montrez que la force magnétique résultante sur le fil incurvé est la même que celle qui agit sur un fil rectiligne parcouru par le même courant entre a et b.



▲ **Figure 8.58**

Problème 2.

P3. (I) Pour une longueur donnée de fil parcouru par un courant I, combien de spires circulaires produiraient le moment dipolaire magnétique maximal ?

P4. (I) Un disque de rayon R a une densité surfacique de charge uniforme σ positive. Il tourne autour de son axe central à la vitesse angulaire $\vec{\boldsymbol{\omega}}$, exprimée en radians par seconde, son axe étant normal à un champ uniforme $\vec{\mathbf{B}}$. (a) Trouvez son moment dipolaire magnétique. (b) Montrez que le module du moment de force sur le disque est

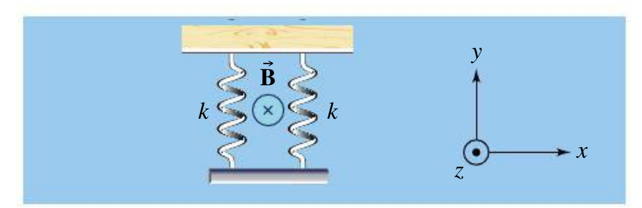
$$\tau = \frac{1}{4}\sigma\omega\pi BR^4$$

(*Indice* : Divisez le disque en anneaux de rayon r et de largeur dr.)

P5. (II) Un électron est en orbite autour d'un proton dans un atome d'hydrogène. On applique un champ magnétique faible, normal au plan de l'orbite. Montrez que si le rayon de l'orbite ne varie pas, la vitesse angulaire de l'électron animé d'un mouvement circulaire varie de

$$\Delta\omega = \pm\frac{eB}{2m}$$

P6. MonLab (I) Une tige métallique de masse 10 g et de longueur 8 cm est suspendue par deux ressorts (figure 8.59) dont l'allongement est de 4 cm. Lorsqu'un courant de 20 A circule dans la tige, celle-ci s'élève de 1 cm. Déterminez le module du champ magnétique.



▲ **Figure 8.59**

Problème 6.

P7. (II) Un électron a une vitesse initiale de $3 \times 10^7 \vec{\mathbf{i}}$ m/s à l'origine d'un système d'axes. Un champ magnétique uniforme est orienté selon l'axes des z positifs. (a) Quel est le module de ce champ magnétique si le rayon du mouvement circulaire est de 2 cm ? (b) Quel temps faut-il pour que la vitesse de l'électron soit déviée de 30° ? (c) Quelles sont les coordonnées x et y de l'électron à l'instant trouvé à la question (b) ?

CHAPITRE 9

LES SOURCES DE CHAMP MAGNÉTIQUE



SOMMAIRE



L’imagerie médicale par résonance magnétique nécessite de placer le patient dans un champ magnétique intense et uniforme. Pour produire un tel champ, l’appareil utilise une grande bobine de fil (souvent fait d’un matériau supraconducteur) enroulé autour du tunnel qu’on voit sur la photo. Dans ce chapitre, nous étudierons ces bobines ainsi que d’autres moyens de produire un champ magnétique.

Au chapitre précédent, nous avons vu que la force magnétique pouvait être comprise grâce à un modèle « en deux étapes », dans lequel des sources produisent un champ et des cibles subissent la force exercée par ce champ. Le chapitre précédent a porté sur les *cibles* : nous y avons étudié les forces exercées par un champ magnétique sur des courants et des charges en mouvement. Ce chapitre portera sur les *sources* : nous allons étudier les champs magnétiques produits par des courants et des charges en mouvement, de même qu’un modèle simple expliquant l’interaction entre deux dipôles magnétiques comme des aiguilles aimantées.

En septembre 1820, les travaux d’Œrsted montrant qu’on pouvait produire un champ magnétique à partir d’un courant électrique furent présentés aux membres de l’Académie des sciences de Paris. Quelques semaines plus tard, Jean-Baptiste Biot (1774-1862) et Félix Savart (1791-1841) réussirent à obtenir une expression du champ magnétique produit par un élément de courant infinitésimal, aujourd’hui appelée la loi de Biot-Savart. De son côté, André Marie Ampère (1775-1836) put établir une relation entre l’intégrale du champ magnétique sur

un parcours fermé et le courant total traversant la surface délimitée par le parcours, aujourd'hui appelée le théorème d'Ampère. On s'en sert pour déterminer le champ magnétique produit par une distribution de courant symétrique.

Nous verrons qu'il y a une ressemblance frappante entre les deux équations que nous venons de nommer et deux équations analogues décrivant le champ électrique. En effet, la loi de Biot-Savart est analogue à l'équation $E = k|q|/r^2$ (voir la section 2.1) et le théorème d'Ampère est analogue au théorème de Gauss (voir le chapitre 3). Les techniques présentées dans ce chapitre seront donc très similaires à celles étudiées aux chapitres 2 et 3.

9.1 LE CHAMP MAGNÉTIQUE PRODUIT PAR LE COURANT D'UN LONG FIL CONDUCTEUR RECTILIGNE

Au voisinage d'un long fil conducteur où circule un courant, la limaille de fer saupoudrée sur une planchette dont le plan est perpendiculaire au fil forme des cercles concentriques (figure 9.1*a*). Des aiguilles de boussoles ont le même comportement (figure 9.1*b*). Selon la façon dont nous avons défini l'orientation du vecteur champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ (voir la section 8.1), on en déduit que les lignes de champ ont ici la forme de *cercles* concentriques, situés dans des plans perpendiculaires au fil.

Pour déterminer la façon dont le module du champ magnétique B dépend de la distance R au fil, Biot et Savart utilisèrent une méthode consistant à mesurer la période des oscillations d'une aiguille aimantée*. En octobre 1820, ils

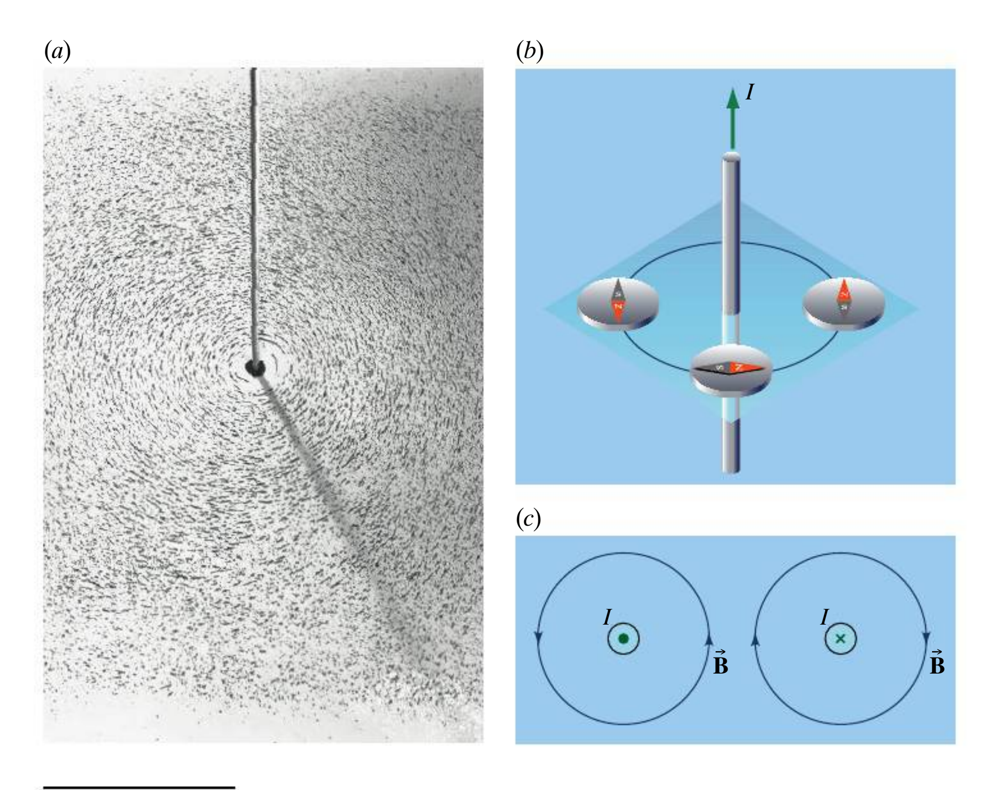


Figure 9.1
(*a*) La configuration de la limaille de fer autour d'un long conducteur rectiligne parcouru par un courant. Par définition, les lignes de champ suivent l'orientation de la limaille et ont donc la forme de cercles. (*b*) La forme circulaire des lignes de champ magnétique peut également être mise en évidence à l'aide d'une boussole. (*c*) Une des lignes de champ magnétique associé à un courant sortant de la page (point) et entrant dans la page (croix).

* Le moment de force, donné par l'équation $\tau = \mu B \sin\theta$ (voir la section 8.4), tend à faire diminuer θ, comme un ressort de torsion, ce qui explique que l'aiguille oscille. Pour de petits angles, ce moment devient $\tau \approx \mu B\theta$, une équation analogue à la loi de Hooke, donc on peut montrer que la fréquence d'oscillation est proportionnelle à $B^{1/2}$ (voir la description des oscillations d'un pendule de torsion, à la section 1.4 du tome 3), ce qui permet de mesurer B.

annoncèrent que le module du champ magnétique est inversement proportionnel à R, c'est-à-dire $B \propto 1/R$. Il leur était possible de maintenir le courant constant, mais ils ne disposaient toutefois d'aucun moyen de le *mesurer* avec précision. Par la suite, on put déterminer que le champ est directement proportionnel au courant I, donc que $B \propto I/R$. Pour transformer ce résultat en équation, il ne manque qu'une constante de proportionnalité. Dans le système d'unités SI, on écrit

Module du champ magnétique produit par un courant circulant dans un fil rectiligne infini

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \qquad (9.1)$$

où μ_0, appelée **constante de perméabilité du vide**, a par définition la valeur

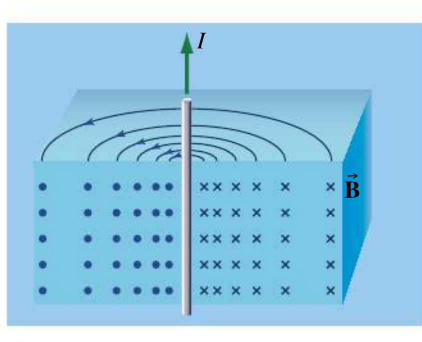
$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\ \text{T·m/A}$$

La figure 9.1*c* illustre la convention utilisée pour dessiner les courants sortant de la page ou entrant dans la page. On remarque que l'orientation du champ magnétique est donnée par une variante de la règle de la main droite :

Règle de la main droite donnant le sens de $\vec{\mathbf{B}}$

Si l'on saisit le fil avec la main droite, le pouce étant orienté dans le sens du courant, les autres doigts s'enroulent dans le sens du champ.

En un point donné, le vecteur champ $\vec{\mathbf{B}}$ est toujours tangent aux lignes de champ. Lorsque les lignes sont des cercles, on peut aussi dire que le champ $\vec{\mathbf{B}}$ est toujours perpendiculaire au segment de droite qui va du fil (transportant le courant source) au point considéré. La figure 9.2 montre comment la densité des lignes de champ dépend de la distance au fil selon l'équation 9.1.



▲ **Figure 9.2**
La densité des lignes de champ magnétique diminue avec la distance à partir du conducteur.

Exemple 9.1

Soit deux longs fils rectilignes parallèles distants de 3 cm. Ils sont traversés par les courants $I_1 = 3$ A et $I_2 = 5$ A, de sens opposés (figure 9.3*a*). (a) Déterminer le champ magnétique résultant au point P. (b) En quel point, autre qu'à l'infini, le champ magnétique est-il nul ?

Solution

Ce problème est semblable à celui qui consiste à déterminer le champ *électrique* créé par deux charges ponctuelles, avec toutefois une différence importante : l'orientation du champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ est toujours *perpendiculaire* à la ligne radiale issue du courant source qui le produit. En effet, il est dirigé selon la tangente à un cercle centré sur le fil (son sens est donné par la règle de la main droite). ■

(a) Pour déterminer le champ magnétique résultant,

$$\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_1 + \vec{\mathbf{B}}_2$$

on détermine d'abord les modules B_1 et B_2 à partir de l'équation 9.1. Après simplification des facteurs 2π, on obtient

$$B_1 = \frac{(2 \times 10^{-7}\ \text{T·m/A})(3\ \text{A})}{4 \times 10^{-2}\ \text{m}} = 1{,}50 \times 10^{-5}\ \text{T}$$

De même, $B_2 = 2 \times 10^{-5}$ T. Nous choisissons ensuite un système de coordonnées, comme celui montré sur la figure 9.3*a*, et nous déterminons les composantes. Comme $\tan\theta = 4$ cm/3 cm, l'angle $\theta = 53°$:

$$B_x = B_2 \cos\theta = 1{,}20 \times 10^{-5} \text{ T}$$
$$B_y = B_1 - B_2 \sin\theta = -0{,}973 \times 10^{-6} \text{ T}$$

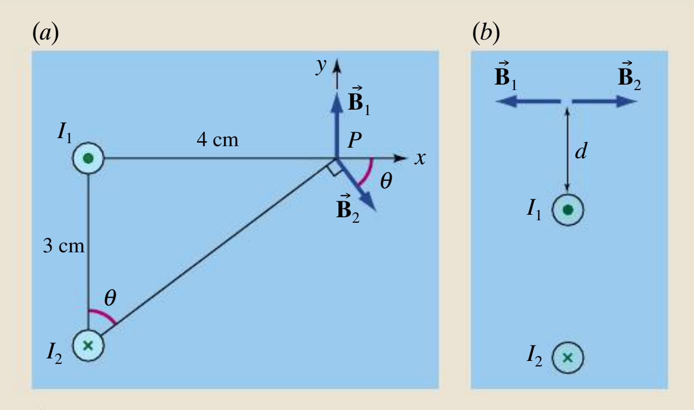
Enfin,

$$\vec{\mathbf{B}} = (12{,}0\vec{\mathbf{i}} - 0{,}973\vec{\mathbf{j}}) \times 10^{-6} \text{ T}$$

(b) Le point de champ nul, où $\vec{\mathbf{B}}_1 + \vec{\mathbf{B}}_2 = 0$, est forcément situé sur la droite joignant les fils. (Pourquoi ?) Dans la région entre les deux fils, les champs sont de même sens, de sorte que l'on peut éliminer cette zone. Dans la région située sous I_2, les champs sont de sens opposés, mais le courant le plus intense est le plus proche. Dans la région située au-dessus de I_1, les champs peuvent s'annuler à une certaine distance d (figure 9.3*b*). La condition

$$B_x = -B_1 + B_2 = 0$$

donne $I_1/d = I_2/(3 \text{ cm} + d)$, dont nous tirons $d = 4{,}50$ cm.

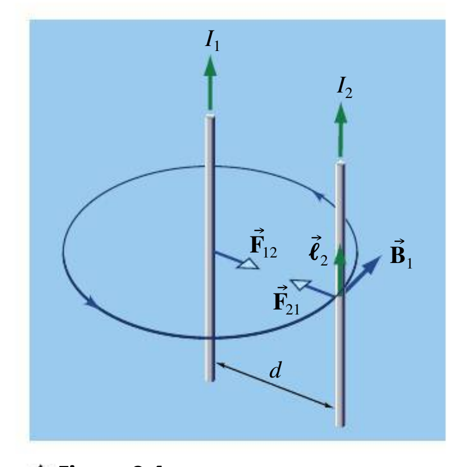


▲ **Figure 9.3**

(*a*) Les vecteurs champ magnétique associés aux courants I_1 et I_2 sont tangents aux arcs circulaires centrés sur chaque conducteur. (*b*) Les champs s'annulent en un point situé sur la droite joignant les deux conducteurs. Ce point est plus proche du courant le plus faible.

9.2 LA FORCE MAGNÉTIQUE ENTRE DES FILS CONDUCTEURS PARALLÈLES

La démonstration expérimentale, effectuée par Œrsted, de la force exercée par un courant électrique sur une aiguille aimantée n'impliquait pas nécessairement qu'on observerait une interaction entre deux courants (par exemple, un aimant attire deux tiges de fer, mais les tiges elles-mêmes ne s'attirent pas mutuellement). Par contre, en octobre 1820, Ampère réalisa une expérience montrant que deux fils parcourus par des courants exercent bien une force magnétique l'un sur l'autre.



▲ **Figure 9.4**

Les forces magnétiques de même module et d'orientations opposées exercées par deux fils conducteurs parallèles parcourus par des courants. La force est répulsive si les courants sont de sens opposés. (Notons que la force $\vec{\mathbf{F}}_{12}$ est illustrée sur le fil 1, mais que le champ $\vec{\mathbf{B}}_2$ qui la cause, lui, n'est pas illustré.)

Aujourd'hui, il est facile d'expliquer cette force : puisque les deux fils sont parcourus par un courant, chacun agit à la fois comme une source et comme une cible. Ainsi, chaque fil est plongé dans le champ magnétique produit par l'autre fil et subit donc une force exercée par ce champ. Pour calculer le module de cette force, considérons deux longs fils rectilignes parcourus par les courants I_1 et I_2 (figure 9.4). Ils sont parallèles et séparés par une distance d. Le champ $\vec{\mathbf{B}}_1$ produit par le fil 1 exerce une force sur la longueur ℓ_2 du fil 2. D'après l'équation 8.4*a*, cette force est $\vec{\mathbf{F}}_{21} = I_2\vec{\ell}_2 \times \vec{\mathbf{B}}_1$, où $\vec{\ell}_2$ est de même sens que I_2. Comme $\vec{\ell}_2$ est perpendiculaire à $\vec{\mathbf{B}}_1$, le module de la force est $F_{21} = I_2\ell_2B_1$, où B_1 est le module du champ produit par le fil 1, donné par l'équation 9.1. En substituant cette équation, on obtient

$$F_{21} = I_2\ell_2B_1 = I_2\ell_2\frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

On trouve une expression similaire pour F_{12}, à partir du champ $\vec{\mathbf{B}}_2$ produit par le fil 2. En appliquant la règle de la main droite, on constate que des courants de même sens s'attirent mutuellement. Par contre, des courants de sens opposés

se repoussent. Le *module de la force magnétique par unité de longueur* exercée sur chaque fil (par exemple, F_{21}/ℓ_2 sur le fil 2) est le même :

Module de la force magnétique par unité de longueur entre deux fils parallèles

$$\frac{F_B}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \qquad (9.2)$$

Définition de l'ampère et du coulomb

Au chapitre 6, nous avions défini provisoirement l'ampère comme un débit de charge d'un coulomb par seconde, sans trop préciser la définition du coulomb. En pratique, cette définition n'est pas celle qui est officiellement utilisée par le Bureau international des poids et mesures, car la charge qui circule dans un fil est impossible à mesurer directement. C'est plutôt l'équation 9.2 qui sert à définir officiellement l'ampère (A) : si deux longs fils parallèles parcourus par le même courant sont distants de 1 m et si chaque longueur unitaire (1 m) est soumise à une force magnétique de 2×10^{-7} N, le courant circulant dans les fils est, par définition, égal à 1 A. Quant au coulomb, il est défini comme la quantité de charge qui traverse chaque seconde une section d'un fil où circule un courant de 1 A.

9.3 LA LOI DE BIOT-SAVART

Le champ magnétique produit par un courant rectiligne I peut être comparé au champ électrique produit par un fil rectiligne portant la charge linéique λ (voir la section 2.5). Mais quelle source produirait un champ magnétique analogue au champ électrique d'une charge ponctuelle ($E = k|q|/r^2$) ? Il ne s'agit *pas* d'une simple charge ponctuelle en mouvement (le champ magnétique qu'elle produit en un point n'est pas constant dans le temps), mais plutôt d'un **élément de courant** $I\,\mathrm{d}\ell$, c'est-à-dire une longueur infinitésimale de fil $\mathrm{d}\ell$ parcourue par un courant I.

Puisqu'un courant ne circule pas sans circuit fermé, un élément de courant ne peut pas être isolé des éléments de courants voisins. Cependant, on peut quand même déduire une équation donnant le champ qu'il produirait *s'il était isolé*. À l'aide de cette équation, on pourra calculer le champ produit par un conducteur de forme quelconque, en le considérant comme une succession d'éléments de courant.

Après que Biot et Savart eurent mesuré le champ magnétique produit par un long fil rectiligne, le mathématicien Pierre Simon Laplace (1749-1827) leur fit remarquer que le résultat obtenu pour le long fil implique que le champ infinitésimal $\mathrm{d}\vec{\mathbf{B}}$ créé par un élément de courant doit être proportionnel à l'inverse du carré de la distance ($\mathrm{d}B \propto 1/r^2$).

On peut obtenir le reste de l'équation donnant $\mathrm{d}\vec{\mathbf{B}}$ en faisant la comparaison qui suit. Si on pose $k' = \mu_0/4\pi$, l'équation 9.1 donnant le module du champ magnétique produit par un long fil rectiligne s'écrit

$$B = \frac{2k'I}{R} \qquad (9.3)$$

Cette équation a une forme identique à celle du module du champ électrique produit par un fil infini chargé de densité linéique λ positive (équation 2.13):

$$E = \frac{2k\lambda}{R} \tag{9.4}$$

Or, en suivant la méthode de résolution de la section 2.5 (p. 59), on peut obtenir l'équation 9.4 par intégration: on considère le fil infini chargé comme une succession d'éléments de charge infinitésimaux $dq = \lambda\, d\ell$, on calcule le champ électrique infinitésimal $d\vec{\mathbf{E}}$ produit par chaque élément, on en détermine les composantes (par exemple, dE_x et dE_y) et on additionne (intègre) selon chaque axe.

Nous supposons que, par une démarche analogue, on peut obtenir l'équation 9.3 en considérant le fil parcouru par un courant comme une succession d'éléments de courant $I\, d\ell$, en calculant le champ infinitésimal $d\vec{\mathbf{B}}$ produit par chacun, en déterminant ses composantes et en intégrant.

Considérant la similitude entre les équations 9.3 et 9.4, l'équation donnant le module de $d\vec{\mathbf{B}}$ est forcément similaire à celle donnant le module de $d\vec{\mathbf{E}}$, c'est-à-dire

$$dE = k\frac{\lambda\, d\ell}{r^2} \tag{9.5}$$

Biot et Savart conclurent rapidement que la seule forme possible pour le module de $d\vec{\mathbf{B}}$ est

$$dB = k'\frac{I\, d\ell}{r^2} f(\theta)$$

Cette forme diffère de l'équation 9.5 à cause du facteur angulaire $f(\theta)$. Poursuivant leurs expériences, ils purent déterminer que $f(\theta) = \sin\theta$ et, en décembre 1820, annoncèrent le résultat suivant:

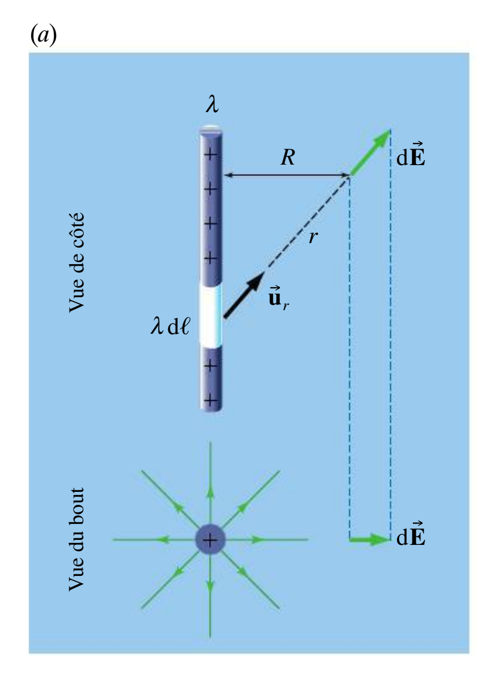
Loi de Biot-Savart

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\, d\ell \sin\theta}{r^2} \tag{9.6}$$

L'équation 9.6 est connue sous le nom de **loi de Biot-Savart**. La figure 9.5 illustre trois différences entre cette équation et l'équation 9.5: d'abord, la première s'applique à un fil chargé, alors que la seconde s'applique à un courant dans un conducteur. Ensuite, $d\vec{\mathbf{E}}$ est radial (figure 9.5*a*), alors que $d\vec{\mathbf{B}}$ est tangent à un cercle centré sur le fil (figure 9.5*b*), son sens étant donné par la même règle de la main droite que l'on utilise pour le fil infini: si l'on saisit la droite qui prolonge l'élément $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ avec la main droite, le pouce étant orienté dans le sens du courant, les autres doigts s'enroulent dans le sens du champ. Enfin, la loi de Biot-Savart fait intervenir le facteur angulaire $\sin\theta$, où θ est l'angle entre l'élément de courant et le segment de droite allant de l'élément de courant au point où l'on calcule le champ (figure 9.5*b*). L'angle $180° - \theta$ convient lui aussi, car la valeur de son sinus est la même.

Notons que la loi de Biot-Savart est valable pour un courant constant, exactement comme la loi de Coulomb est valable pour une charge immobile. Si le courant I varie dans le temps, on ne peut appliquer l'équation 9.6 qu'à des points situés suffisamment proches du conducteur pour qu'on puisse considérer que le champ est modifié instantanément.

(*a*)



(*b*)

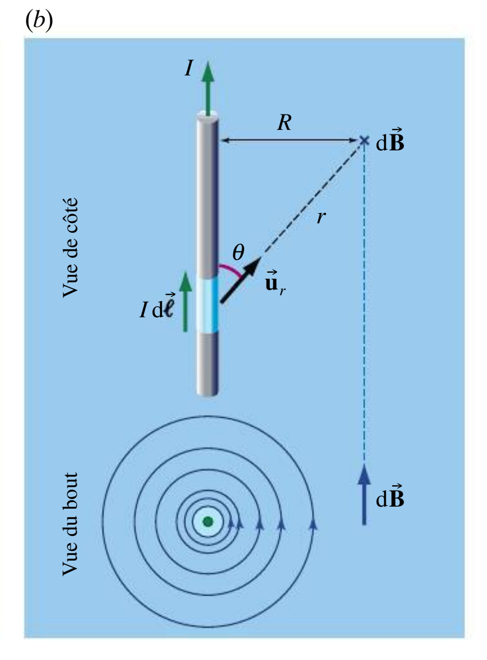


Figure 9.5

(*a*) Le champ électrique $\mathrm{d}\vec{\mathbf{E}}$ créé par la charge élémentaire $\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}\ell$ est orienté radialement par rapport à d*q*. (*b*) Le champ magnétique $\mathrm{d}\vec{\mathbf{B}}$ créé par l'élément de courant $I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}$ est perpendiculaire à la fois au segment de droite allant de l'élément au point où on calcule le champ et à $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}$. L'orientation du champ magnétique est donnée par la règle de la main droite.

En notation vectorielle, la loi de Biot-Savart donnant le champ magnétique $\mathrm{d}\vec{\mathbf{B}}$ produit par un élément de courant $I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}$ (figure 9.5*b*) s'écrit

$$\mathrm{d}\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{I\,\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\mathbf{u}}_\mathrm{r}}{r^2} \qquad (9.7)$$

où $\vec{\mathbf{u}}_\mathrm{r}$ est un vecteur unitaire pointant de l'élément de courant vers le point où on calcule le champ qu'il produit. Notez que l'équation 9.7 donne à la fois le module du champ et son orientation, cette dernière étant celle du produit vectoriel qui figure dans l'équation. (Vérifiez que cette orientation correspond bel et bien à celle donnée par la règle de la main droite formulée à la section 9.1.)

À la section 2.5, nous avons montré comment l'expression $\mathrm{d}E = k\,\mathrm{d}q/r^2$, donnant le champ électrique d'une charge ponctuelle, permettait de prédire le champ électrique produit par n'importe quelle configuration continue de charge. La loi de Biot-Savart a un rôle tout à fait analogue : elle peut être considérée comme l'équation fondamentale, tirée de l'expérience, permettant de prédire le champ magnétique produit par n'importe quelle configuration de courant. (En particulier, elle devrait permettre d'obtenir l'équation 9.1 dans le cas où la configuration de courant est celle d'un long conducteur rectiligne.)

Dans le reste de cette section, nous allons donc voir comment utiliser ainsi la loi de Biot-Savart pour calculer le champ magnétique produit par des courants circulant dans quelques conducteurs de formes géométriques simples. Cette démarche, résumée dans la méthode de résolution qui suit, est analogue à celle utilisée à la section 2.5 pour calculer des champs électriques.

Méthode de résolution

Champ produit par le courant circulant dans un conducteur fini ou non rectiligne

Le champ magnétique produit par un courant circulant dans un conducteur rectiligne infini est donné par l'équation 9.1. Voici les étapes recommandées pour calculer le champ magnétique produit par tout autre courant.

1. Tracer un schéma de la situation et dessiner un élément de courant $I\,\mathrm{d}\ell$ *quelconque*. Choisir un système d'axes qui permettra, au besoin, d'exprimer $\mathrm{d}\ell$ en fonction d'une seule coordonnée.
2. Illustrer le vecteur champ $\mathrm{d}\vec{\mathbf{B}}$ produit par $I\,\mathrm{d}\ell$, le segment de droite de longueur r et l'angle θ entre

leurs directions. Le sens de $d\vec{\mathbf{B}}$ est donné par la règle de la main droite. Écrire le module dB (équation 9.6) en exprimant $d\ell$, θ et r en fonction de *variables*. (L'expression obtenue doit être valable où que soit placé l'élément de courant et non correspondre à un élément de courant en particulier.)

3. Calculer les composantes de $d\vec{\mathbf{B}}$. Même si $d\vec{\mathbf{B}}$ est parallèle à un axe x, il faut distinguer dB et dB_x, qui peuvent avoir un signe différent.

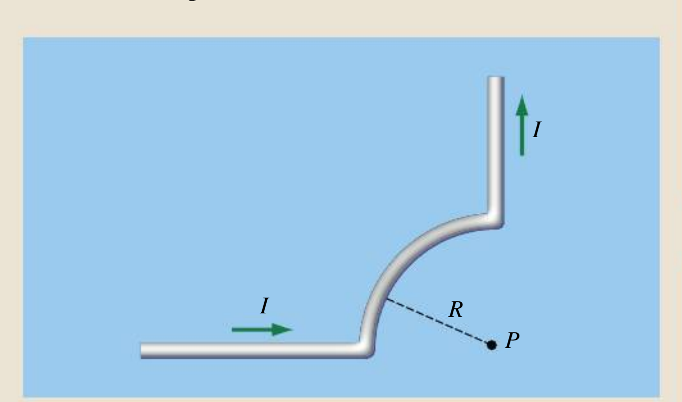
4. Afin de réduire le nombre d'intégrales à résoudre, utiliser la symétrie du problème pour déduire si le champ selon un ou deux des trois axes est nul. Écrire l'intégrale selon chaque composante où le champ est non nul. Par exemple, $B_x = \int dB_x$.

5. Souvent, l'intégrale obtenue contient quatre variables: $d\ell$, θ, r et un autre angle utilisé pour calculer la composante de $d\vec{\mathbf{B}}$. Utiliser la géométrie du problème pour exprimer toutes ces variables en fonction d'une même variable d'intégration (qui est souvent une des coordonnées du système d'axes ou encore une coordonnée angulaire). Ce faisant, il faut s'assurer que $d\ell$ demeure positif, car il s'agit d'une longueur et non d'une composante vectorielle.

6. Déterminer les bornes d'intégration qui correspondent aux valeurs extrêmes de la variable d'intégration, puis intégrer afin d'obtenir chaque composante du champ résultant.

Exemple 9.2

Un courant de 5 A circule dans le fil illustré à la figure 9.6. Calculer le champ magnétique produit par ce courant au point P. On donne $R = 2$ m.



▲ **Figure 9.6**

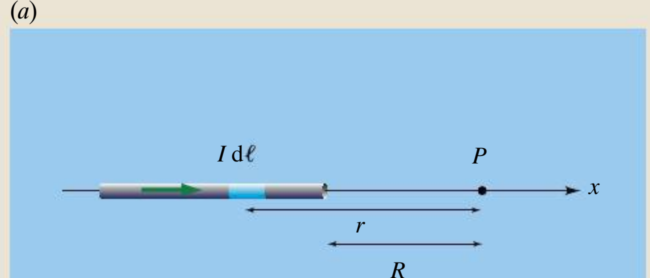
Quel champ ce fil produit-il au point P ?

Solution

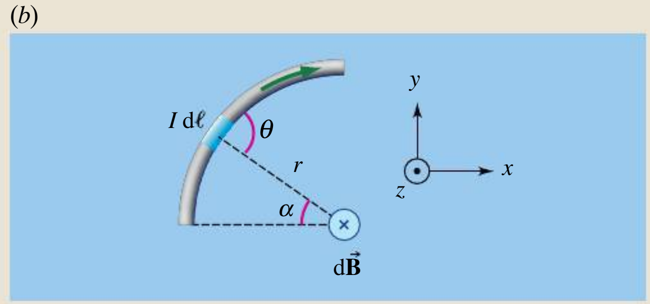
Le fil a deux portions rectilignes et une portion en arc. Nous allons calculer séparément les champs $\vec{\mathbf{B}}_1$, $\vec{\mathbf{B}}_2$ et $\vec{\mathbf{B}}_3$ produits au point P par ces trois portions et ensuite faire la somme vectorielle $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_1 + \vec{\mathbf{B}}_2 + \vec{\mathbf{B}}_3$. Pour chaque portion, on suit les étapes de la méthode de résolution. ■

La figure 9.7*a* illustre la première portion rectiligne et les coordonnées d'un élément de courant de longueur $d\ell = dx$. On note que $\theta = 0$ quelle que soit la position de l'élément de courant le long du segment rectiligne. Par conséquent, l'équation 9.6 donne $dB = 0$. On peut donc écrire directement le résultat de l'intégrale: $\vec{\mathbf{B}}_1 = 0$.

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 9.7**

(*a*) Tous les éléments de courant sur la portion rectiligne ne produisent aucun champ au point P. (*b*) Un élément de courant sur la portion en arc produit au point P un champ perpendiculaire à la page et orienté vers celle-ci.

La figure 9.7*b* illustre la portion en arc, un élément de courant et le champ $d\vec{\mathbf{B}}$ qu'il produit au point P. Si on définit une coordonnée angulaire α qui donne la position de l'élément de courant par rapport au début de la portion de fil, on peut écrire $d\ell = R\,d\alpha$, à la condition que α soit en radians.

On note que tous les éléments de courant de la figure 9.7*b* font un angle $\theta = 90°$ avec le segment de droite de

longueur r qui les relie au point P et qu'ils sont tous situés à la même distance $r = R$ du point P. L'équation 9.6 s'écrit donc

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R\, d\alpha \sin\theta}{R^2} = 2{,}5 \times 10^{-7}\, d\alpha$$

Le vecteur $d\vec{\mathbf{B}}$ étant orienté vers la page, on a $dB_x = dB_y = 0$ et $dB_z = -dB = -2{,}5 \times 10^{-7}\, d\alpha$.

Ensuite, on intègre selon chaque composante. On a directement $B_x = B_y = 0$ et, selon z, avec les bornes d'intégration $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_2 = \pi/2$, on a

$$B_z = \int dB_z = -2{,}5 \times 10^{-7} \int_0^{\pi/2} d\alpha$$
$$= -2{,}5 \times 10^{-7} [\alpha]_0^{\pi/2} = -3{,}93 \times 10^{-7}\ \text{T}$$

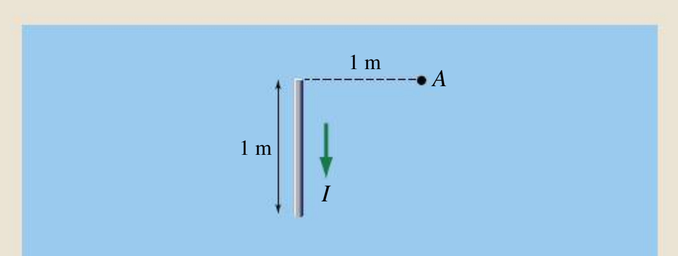
On a donc $\vec{\mathbf{B}}_2 = -3{,}93 \times 10^{-7} \vec{\mathbf{k}}$ T.

Quant à la troisième portion de fil, on a le même résultat que pour la première, car $\theta = 180°$ pour chaque élément de courant, d'où $\vec{\mathbf{B}}_3 = 0$.

Le champ produit par l'ensemble du fil au point P est donc $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_1 + \vec{\mathbf{B}}_2 + \vec{\mathbf{B}}_3 = -3{,}93 \times 10^{-7} \vec{\mathbf{k}}$ T.

Exemple 9.3

Un courant de 2 A circule dans le fil illustré à la figure 9.8. Trouver le module et l'orientation du champ magnétique produit par ce courant au point A en exprimant l'intégrale en fonction (a) d'une coordonnée angulaire ; (b) d'une coordonnée cartésienne.



▲ **Figure 9.8**

Quel champ ce fil produit-il au point A ?

Solution

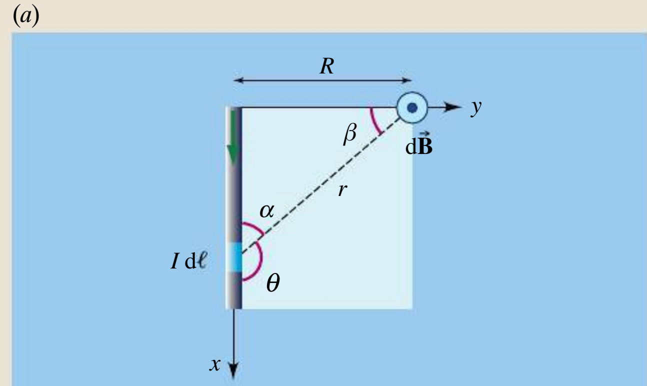
On suit les étapes de la méthode de résolution. D'abord, on choisit un axe des x confondu avec le fil et dans le même sens que le courant, de telle sorte que $d\ell = dx$. La figure 9.9 illustre ce système d'axes selon deux perspectives, de même qu'un élément de courant $I\, d\ell$ et le champ magnétique $d\vec{\mathbf{B}}$ qu'il produit au point A. On note que $d\vec{\mathbf{B}}$ est perpendiculaire au plan défini par le fil et le segment de droite de longueur r (ce même plan est en bleu clair sur les deux figures) ; son sens est donné par la règle de la main droite. Pour faciliter l'intégration, on a choisi l'axe des z parallèle à $d\vec{\mathbf{B}}$ et l'origine de telle sorte que l'axe des y passe par le point A. Pour cet élément de courant quelconque, l'équation 9.6 s'écrit

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dx \sin\theta}{r^2} = 2 \times 10^{-7} \frac{dx \sin\theta}{r^2} \qquad \text{(i)}$$

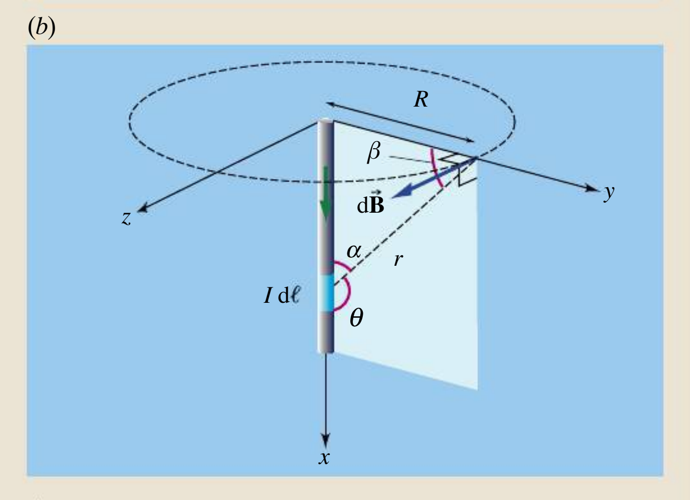
Comme les $d\vec{\mathbf{B}}$ produits au point A par les différents éléments de courant pointent tous vers les z positifs, on a $dB_x = dB_y = 0$ et $dB_z = dB$. Avant d'intégrer $B_z = \int dB_z$, on doit tout ramener en fonction d'une même variable d'intégration, exactement comme nous l'avons fait à la section 2.5.

(a) Pour exprimer toute l'intégrale en fonction d'une coordonnée angulaire, il faut choisir soigneusement entre les angles α, β et θ. Nous choisissons β, car il présente deux avantages : puisqu'il est inférieur à 90°, il est facile de visualiser dans un triangle les rapports

(a)



(b)



▲ **Figure 9.9**

L'élément de courant $I\, d\ell$ produit le champ $d\vec{\mathbf{B}}$ au point A.

trigonométriques s'y rapportant ; de plus, puisqu'il augmente quand x augmente, dx et $d\beta$ auront le même signe et la condition voulant que $d\ell$ soit positif est automatiquement respectée*.

On réalise que $\sin \theta = \sin \alpha = \cos \beta$, donc que l'équation (i) devient

$$dB_z = dB = 2 \times 10^{-7} \frac{dx \cos \beta}{r^2}$$

Sur la figure, on voit que $\cos \beta = R/r$, ce qui permet de substituer $r = R/\cos \beta = (1 \text{ m})/\cos \beta$, d'où

$$dB_z = 2 \times 10^{-7} \cos^3 \beta \, dx$$

Pour exprimer dx en fonction de $d\beta$, il faut exprimer x en fonction de β, puis dériver. On note d'abord que $\tan \beta = x/R$, donc que $x = R \tan \beta$. Ensuite, on dérive : $dx = R \sec^2 \beta \, d\beta = (R/\cos^2 \beta) d\beta = [(1 \text{ m})/\cos^2 \beta] d\beta$, d'où

$$dB_z = 2 \times 10^{-7} \cos \beta \, d\beta$$

Les bornes d'intégration sont $\beta_1 = 0°$ et $\beta_2 = 45°$, de sorte que l'intégrale pour B_z est

$$B_z = \int dB_z = 2 \times 10^{-7} \int_{0°}^{45°} \cos \beta \, d\beta$$
$$= 2 \times 10^{-7} [\sin \theta]_{0°}^{45°} = 1{,}41 \times 10^{-7} \text{ T}$$

Comme $B_x = B_y = 0$, alors le module du champ résultant au point A est $B = |B_z| = 1{,}41 \times 10^{-7}$ T. Son orientation est vers les z positifs, ce qu'on pouvait aussi obtenir directement dès le départ d'après la règle de la main droite.

(b) On reprend à partir de l'équation (i) et on ramène tout en fonction de x. D'abord, il est utile de substituer $\sin \theta = \sin \alpha$, ce qui facilite la visualisation des rapports trigonométriques :

$$dB_z = dB = 2 \times 10^{-7} \frac{dx \sin \alpha}{r^2}$$

Sur la figure, on voit que $\sin \alpha = R/r = (1 \text{ m})/r$, d'où

$$dB_z = 2 \times 10^{-7} \frac{dx}{r^3}$$

Ensuite, on voit que $r = (x^2 + R^2)^{1/2} = [x^2 + (1 \text{ m})]^{1/2}$, d'où

$$dB_z = 2 \times 10^{-7} \frac{dx}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

Avec ce choix de variable d'intégration, les bornes d'intégration sont $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ m. Puisqu'on intègre de la borne la plus petite vers la plus grande, dx est positif et la condition voulant que $d\ell$ soit positif est automatiquement respectée. L'intégrale pour B_z devient donc

$$B_z = \int dB_z = 2 \times 10^{-7} \int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$
$$= 2 \times 10^{-7} \left[\frac{x}{(x^2 + 1)^{1/2}} \right]_0^1 = 1{,}41 \times 10^{-7} \text{ T}$$

où B_z est en teslas et x est en mètres. On obtient donc le module $B = 1{,}41 \times 10^{-7}$ T.

Ce résultat est évidemment identique à celui qu'on a obtenu en utilisant β comme variable d'intégration. Chaque choix présente son avantage : l'intégration en fonction de β donne une intégrale plus simple et des bornes d'intégration qui ne seront jamais infinies, alors que l'intégration en fonction de x permet d'éviter d'avoir à transformer dx en $d\beta$, une étape dont l'aspect conceptuel est difficile à visualiser, et évite le risque de substituer une valeur négative pour $d\ell$. ■

* Si on choisissait de tout exprimer en fonction de α, on obtiendrait plus loin $dx = -(R/\sin^2 \alpha) d\alpha$. Cette expression montre qu'une variation $d\alpha$ positive correspond à une variation dx négative. Il faudrait alors écrire $d\ell = -dx$ pour avoir $d\ell$ positif comme il se doit.

Le champ magnétique produit par un fil rectiligne de longueur finie

On peut toujours calculer le champ magnétique produit par un courant, comme nous l'avons fait dans les deux derniers exemples, en suivant la méthode de résolution qui précède, laquelle consiste à intégrer directement l'équation 9.6. Toutefois, deux géométries reviennent souvent : le fil rectiligne et le fil en arc de cercle. Chaque fois, l'intégrale se ressemble, de sorte qu'on peut obtenir pour chacun de ces cas une équation où il ne reste qu'à substituer l'équivalent des bornes d'intégration. Nous allons maintenant obtenir de telles équations qui pourront nous éviter d'intégrer à l'avenir.

Nous allons commencer par le cas du champ produit par le courant circulant dans un fil rectiligne qui n'est pas assez long pour que l'équation 9.1 soit applicable. Choisissons un système d'axes tel que le fil coïncide avec l'axe des x et

que le courant circule dans le sens positif de l'axe (figure 9.10*a*). On a donc $d\ell = dx$. Pour les besoins du calcul, considérons un point P situé directement au-dessus de l'origine du système d'axes, à une distance R de celle-ci, et calculons le champ magnétique en ce point. Comme R peut prendre une valeur quelconque, le résultat que nous obtiendrons (équation 9.8*a* ou 9.8*b*) sera général. Chaque élément de courant $I\,dx$ produit, au point P, un champ $d\vec{\mathbf{B}}$ dont le module est

$$dB = \frac{\mu_0 I\, dx \sin\theta}{4\pi r^2}$$

Tous les $d\vec{\mathbf{B}}$ produits au point P sortent de la page (règle de la main droite), tel qu'illustré. On en déduit que $dB_x = dB_y = 0$, donc $B_x = B_y = 0$ et que $dB_z = dB$. Il ne reste qu'à intégrer pour obtenir B_z. En sortant les constantes à gauche de l'intégrale, on a

$$B_z = \int dB_z = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{dx \sin\theta}{r^2} \qquad \text{(i)}$$

On trouve trois variables dans l'intégrale, soit x, θ et r. Avant d'intégrer, nous devons tout ramener en fonction d'une de ces variables, qui deviendra la variable d'intégration. Pour montrer que la variable choisie n'a pas d'importance, nous obtiendrons le résultat de deux façons différentes. S'il y a un angle dans l'intégrale et qu'on n'a pas accès à une table d'intégrale, on obtient souvent une intégrale finale plus simple si on ramène tout en fonction de θ. Nous allons donc faire une première fois le calcul en exprimant x et r en fonction de θ. Pour ramener tout en fonction de la variable d'intégration θ et de la constante R, on fait des transformations similaires à celles de l'exemple 9.3 : on commence par noter sur la figure 9.10*a* que $r = R/\sin\theta$. Ensuite, on voit que $\tan\theta = R/|x| = -R/x$ puisque l'élément de courant est situé à une position x négative quand $\theta < 90°$, tel qu'illustré. Cela permet donc d'écrire $x = -R/\tan\theta = -R \cot\theta$, d'où $dx = R \operatorname{cosec}^2\theta\, d\theta = R\, d\theta/\sin^2\theta$. On note que dx et $d\theta$ ont le même signe, donc que la condition voulant que $d\ell$ soit positif est respectée. En fonction de θ, les bornes d'intégration sont θ_1 et θ_2. On a donc

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{R\, d\theta}{\sin^2\theta}\sin\theta\left(\frac{\sin\theta}{R}\right)^2 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin\theta\, d\theta = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\Big[-\cos\theta\Big]_{\theta_1}^{\theta_2}$$

Comme $B_x = B_y = 0$, le module B du champ correspond à sa composante B_z. On obtient donc

Champ magnétique produit par un fil rectiligne

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2) \qquad (9.8a)$$

Les angles θ_1 et θ_2 correspondent à l'angle θ dans la loi de Biot-Savart. Ils sont compris entre 0° et 180°, et on aura toujours $\theta_1 \le \theta_2$ (figure 9.10*b*). Ainsi, $\cos\theta_1 \ge \cos\theta_2$, ce qui donne un module de champ magnétique B positif, comme il se doit.

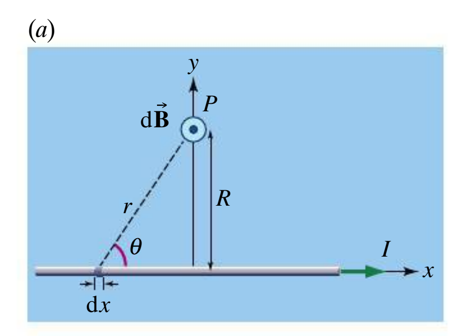
Dans le cas particulier d'un fil « infini », on a $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = 180°$, et l'équation 9.8*a* donne

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}[1 - (-1)] = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

On retrouve bien l'équation 9.1, ce qui confirme que la loi de Biot-Savart permet bel et bien de prédire ce résultat expérimental.

Le même résultat aurait pu être obtenu si on avait choisi x comme variable d'intégration. Nous reprenons donc maintenant le calcul de cette deuxième façon.

(*a*)



(*b*)

▲ **Figure 9.10**

(*a*) On veut calculer le champ magnétique créé au point P par le courant circulant dans le fil. (*b*) Si on choisit θ comme variable d'intégration, les bornes d'intégration sont θ_1 et θ_2 ; dans tous les cas, $\theta_1 \le \theta_2$.

Dans ce cas, c'est r et θ qu'il faut exprimer en fonction de x, dans l'intégrale initiale de l'équation (i). Pour ce faire, on note sur la figure 9.10*a* que $\sin\theta = R/r$ et que $r = (x^2 + R^2)^{1/2}$, d'où

$$dB_z = dB = \frac{\mu_0 IR\, dx}{4\pi(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

En fonction de la variable d'intégration x, les bornes désignent les coordonnées x des deux extrémités du fil, soit x_1 et x_2, d'où

$$B_z = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

où on a fait passer les constantes à gauche de l'intégrale. Cette intégrale est plus complexe que celle obtenue en fonction de θ, mais la démarche a été jusqu'ici plus simple. Le résultat de l'intégrale ci-dessus est donné dans la table d'intégrales de l'annexe C :

$$B_z = \frac{\mu_0 IR}{4\pi}\left[\frac{x}{R^2(x^2 + R^2)^{1/2}}\right]_{x_1}^{x_2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left[\frac{x}{(x^2 + R^2)^{1/2}}\right]_{x_1}^{x_2}$$

Comme $B_x = B_y = 0$, le module B du champ correspond à sa composante B_z. On obtient donc

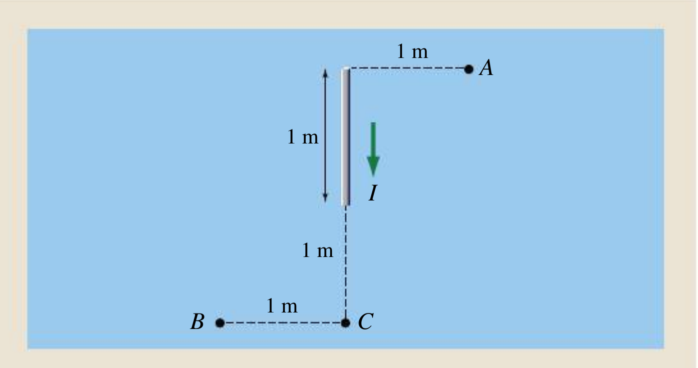
Champ magnétique produit par un fil rectiligne

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left[\frac{x_2}{(x_2^2 + R^2)^{1/2}} - \frac{x_1}{(x_1^2 + R^2)^{1/2}}\right] \quad (9.8b)$$

Cette équation peut paraître très différente de l'équation 9.8*a*, mais elle est bel et bien équivalente. En effet, chacun des deux termes entre crochets correspond, à un signe près, à un rapport entre deux des côtés du triangle rectangle visible à la figure 9.10*a* : la valeur absolue du numérateur est le côté adjacent à l'angle θ et le dénominateur est l'hypoténuse r. Ce rapport est donc un cosinus. En tenant compte des signes de x_1 et de x_2 et du fait que $\theta > 90°$ si $x > 0$, on peut montrer que le premier terme entre crochets correspond bien à $-\cos\theta_2$, alors que le second correspond bien à $-\cos\theta_1$. L'équation 9.8*b* correspond donc bel et bien à l'équation 9.8*a*. De même, pour un fil infiniment long, x_1 et x_2 tendent respectivement vers $-\infty$ et $+\infty$, et le terme entre crochets devient $[1-(-1)]$, de sorte qu'on retrouve l'équation 9.1.

Exemple 9.4

Un courant de 2 A circule dans le fil illustré à la figure 9.11. Donner le module et l'orientation champ magnétique produit par ce courant (a) au point A ; (b) au point B ; et (c) au point C.



▲ Figure 9.11
Quel champ ce fil produit-il aux points A, B et C ?

Solution

(a) On obtient le module en utilisant l'équation 9.8*a* avec $R = 1$ m, $\theta_1 = 90°$ et $\theta_2 = 135°$, ou encore l'équation 9.8*b* avec $R = 1$ m, $x_1 = 0$ et $x_2 = 1$ m. Dans les deux cas, on trouve $B = 1{,}41 \times 10^{-7}$ T. D'après la règle de la main droite, le champ est perpendiculaire au plan de la page et il sort de celle-ci.

On remarque que ce résultat est identique à celui de l'exemple 9.3. ■

(b) Avec l'équation 9.8*a*, on a θ_1 = arctan(1/2) = 26,6°, θ_2 = 45° et R = 1 m, de sorte que $B = 3{,}75 \times 10^{-8}$ T. Avec l'équation 9.8*b*, on obtient le même résultat avec les bornes $x_1 = -2$ m et $x_2 = -1$ m. D'après la règle de la main droite, le champ est perpendiculaire au plan de la page et il entre dans la page.

(c) Quelle que soit la position de l'élément de courant, l'équation 9.6 donne dB = 0, car sin θ = 0. Après intégration, on a donc B = 0.

L'équation 9.8*a* ou 9.8*b* n'est *pas valable* dans ce contexte, car R = 0. ■

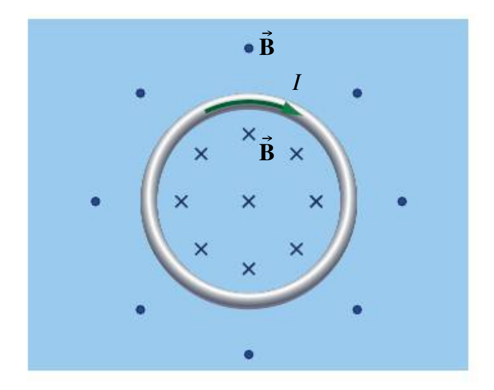
Le champ magnétique produit par une boucle de courant

La deuxième situation générale que nous allons étudier est celle d'un courant qui circule dans une **boucle**. Considérons une boucle dans le plan de la page, parcourue par un courant* dans le sens horaire (figure 9.12). On peut appliquer la règle de la main droite à chaque élément de courant qui constitue la boucle. On trouve ainsi que chacun d'eux produit dans son voisinage un champ magnétique qui entre dans la page à l'intérieur de la boucle et qui sort de la page à l'extérieur de la boucle. Il est donc clair que le champ résultant $\vec{\mathbf{B}}$ sera orienté vers la page en tout point situé à l'intérieur de la boucle et vice versa. On peut utiliser ce résultat pour formuler une autre variante de la règle de la main droite, qui permet de trouver facilement le sens du champ résultant dans une boucle :

Variante de la règle de la main droite donnant le sens de $\vec{\mathbf{B}}$

Dans une boucle de courant, si on enroule les doigts de la main droite dans le sens du courant I, le pouce donne le sens dans lequel $\vec{\mathbf{B}}$ traverse la région du plan de la boucle située *à l'intérieur* de la boucle.

La figure 9.13 montre comment on peut mettre en évidence ce champ à l'aide de la limaille de fer.



▲ **Figure 9.12**

Le champ magnétique d'une boucle de courant.



▲ **Figure 9.13**

La configuration de la limaille de fer associée à une boucle parcourue par un courant.

* Comme pour tous les conducteurs parcourus par un courant, on suppose ici qu'une f.é.m. maintient le courant.

Nous allons maintenant calculer le module du champ magnétique en un point P situé sur l'axe de la boucle. Pour ce faire, faisons pivoter la boucle pour que son plan soit perpendiculaire à la page (figure 9.14) : le haut de la boucle sort de la page et le bas de la boucle entre dans la page. Les lignes de champ dans le plan de la page sont représentées à la figure 9.14*c*, ainsi que le vecteur champ $\vec{\mathbf{B}}$ au point P visé par le calcul qui suit.

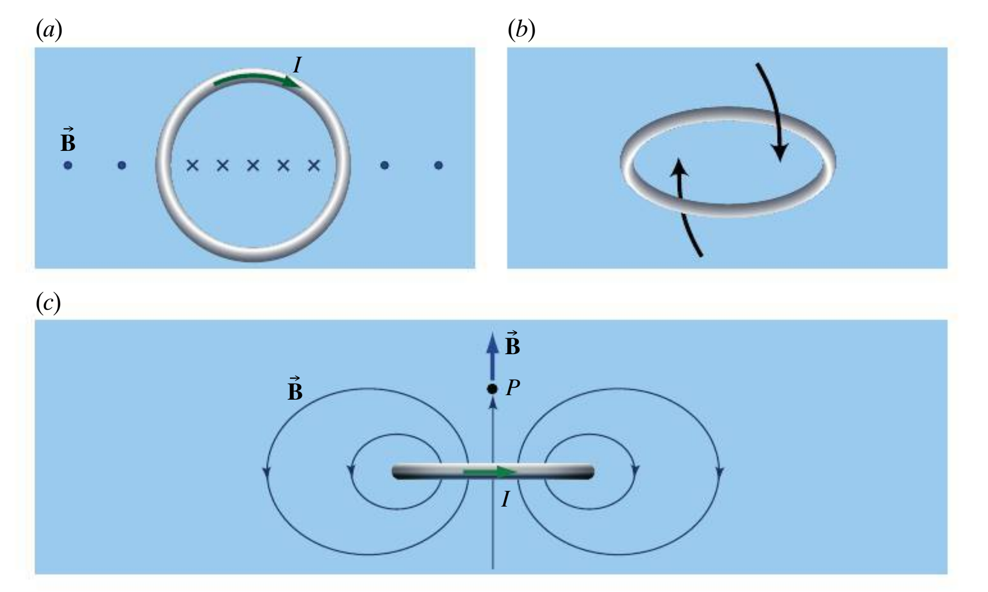


Figure 9.14

(*a*) Le champ magnétique d'une boucle de courant dont le plan coïncide avec le plan de la page. (*b*) On fait pivoter la boucle pour que son axe soit dans le plan de la page. (*c*) Le champ magnétique dans le plan de la page produit par la boucle de courant. Le champ magnétique au point P est orienté vers le haut. Le sens du courant illustré est celui dans la partie *avant* de la boucle ; il est évidemment vers la gauche dans la partie arrière.

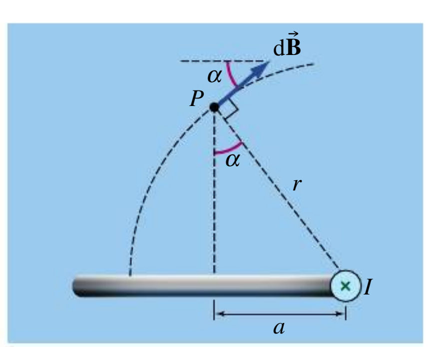


Figure 9.15

D'après la règle de la main droite, l'élément de courant entrant dans la page à droite de la boucle produit un champ magnétique $d\vec{\mathbf{B}}$ dans le plan de la page.

Considérons le champ magnétique $d\vec{\mathbf{B}}$ produit au point P par le courant qui circule dans l'élément de courant $I\, d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ le plus à droite de la boucle (figure 9.15) : le courant à cet endroit entre dans la page. D'après la loi de Biot-Savart, on a

$$dB = \frac{\mu_0 I \, d\ell \sin 90°}{4\pi r^2}$$

où r est la distance entre l'élément de courant et le point P. Puisque l'élément de courant entre perpendiculairement dans la page, l'angle entre $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ et le segment de droite r est en effet 90°. Quant à l'orientation de $d\vec{\mathbf{B}}$, elle est donnée par la règle de la main droite : $d\vec{\mathbf{B}}$ étant tangent à un cercle centré sur l'élément de courant, il est perpendiculaire à r (figure 9.15).

Pour calculer le champ total au point P, il faut intégrer les contributions de tous les éléments de courant qui forment la boucle : l'ensemble des vecteurs $d\vec{\mathbf{B}}$ forme un *cône* dont le sommet est au point P et dont l'axe coïncide avec l'axe de la boucle. Le champ total s'annule donc bien dans le plan de la boucle, et il ne reste qu'une composante de champ le long de l'axe, tel que prévu d'après la figure 9.14*c*. Pour calculer cette composante du champ, il faut intégrer la composante de $d\vec{\mathbf{B}}$ selon l'axe. En fonction de l'angle α défini à la figure 9.15, la composante de $d\vec{\mathbf{B}}$ parallèle à l'axe de la boucle est $dB_{\text{axe}} = dB \sin \alpha$, d'où

$$B_{\text{axe}} = \int dB \sin \alpha = \int \frac{\mu_0 I \, d\ell}{4\pi r^2} \sin \alpha$$

Ici, r et α *sont des constantes*. Ainsi, tout sort de l'intégrale sauf $d\ell$:

$$B_{\text{axe}} = \frac{\mu_0 I \sin \alpha}{4\pi r^2} \int d\ell$$

L'intégrale de tous les éléments de fil $d\ell$ le long de la boucle donne tout simplement la circonférence $2\pi a$ de la boucle, où a est le rayon de la boucle. On a donc

$$B_{\text{axe}} = \frac{\mu_0 I a \sin \alpha}{2r^2}$$

On peut faire disparaître r à l'aide de la relation $r = a/\sin \alpha$. On trouve ainsi la formule générale pour le module du champ magnétique sur l'axe d'une boucle :

$$B_{\text{axe}} = \frac{\mu_0 I \sin^3 \alpha}{2a}$$

Il arrive souvent qu'on enroule le fil qui porte le courant pour former N **spires** (une spire est un tour complet de fil). Si le fil est assez mince par rapport au rayon de la boucle et qu'on colle les spires les unes sur les autres, on peut considérer que les spires sont *confondues*, c'est-à-dire toutes au même endroit. Dans ce cas, le module du champ magnétique sur l'axe de la boucle est tout simplement multiplié par N, et on trouve

$$B_{\text{axe}} = \frac{\mu_0 N I \sin^3 \alpha}{2a} \qquad (9.9)$$

Champ magnétique produit sur l'axe d'une boucle de courant à N spires

Exemple 9.5

(a) Un fil formant une spire circulaire de rayon 1 m est parcouru par un courant de 2 A (figure 9.16). Quel est le module du champ magnétique aux points A et B situés sur l'axe de la spire à 1 m de part et d'autre du centre de la spire ? (*b*) On utilise la même longueur de fil, mais on l'enroule pour former quatre spires circulaires superposées. Si le courant reste le même, quel est le module du champ magnétique en A et en B ?

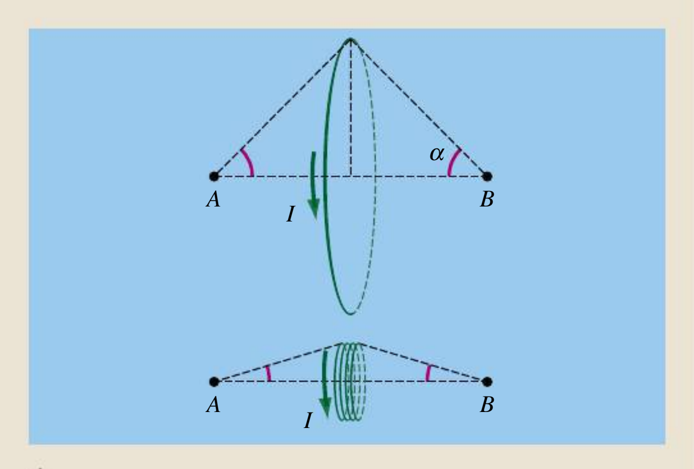
Solution



(a) Par symétrie, le module du champ magnétique est le même en A et en B. ■

Dans l'équation 9.9, on a $N = 1$, $I = 2$ A, $a = 1$ m et $\alpha = 45°$, d'où $B = 4{,}44 \times 10^{-7}$ T. Par la règle de la main droite, le champ magnétique, *partout sur l'axe* (et donc en A et en B) est orienté *vers la droite*.

(b) Si on fait quatre spires avec le même fil, le rayon est divisé par quatre. On a donc $N = 4$, $I = 2$ A, $a = 0{,}25$ m et $\alpha = \arctan(0{,}25/1) = 14{,}0°$. L'équation 9.9 donne alors $B = 2{,}85 \times 10^{-7}$ T, et le champ est encore orienté vers la droite en A et en B.



▲ **Figure 9.16**
Deux bobines utilisant la même longueur de fil.

Soit une boucle à une seule spire ($N = 1$) disposée dans un plan xy. En un point éloigné de son axe (alors confondu avec l'axe z), on peut montrer que l'équation 9.9 devient (voir le problème P11) :

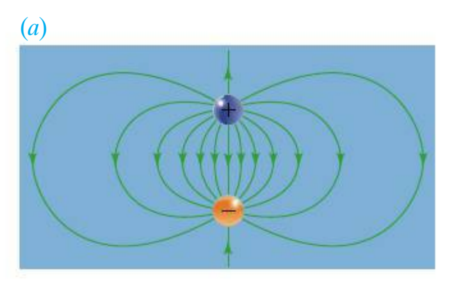
$$B_{\text{axe}} = \frac{2k'\mu}{z^3} \qquad (9.10)$$

où $k' = \mu_0/4\pi$ et où $\mu = I(\pi a^2)$ est le moment dipolaire magnétique de la boucle, que nous avons défini à la section 8.4 (il ne faut surtout pas confondre la constante μ_0 avec le moment dipolaire magnétique μ). L'équation 9.10 est de la même forme que l'équation 2.22 donnant le champ en un point éloigné sur l'axe (considéré comme confondu avec l'axe z d'un système d'axes) d'un dipôle électrique :

$$E = \frac{2kp}{z^3}$$

À la section 8.4, nous avons dit que les boucles de courant pouvaient être qualifiées de dipôles magnétiques. La ressemblance que nous venons de souligner

(*a*)



(*b*)

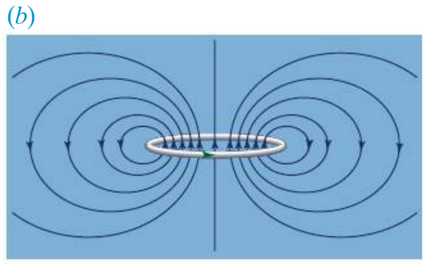


Figure 9.17

Les lignes de champ pour (*a*) un dipôle électrique et (*b*) un dipôle magnétique. Bien que les champs en des points éloignés semblent similaires, les champs au voisinage des dipôles sont de sens opposés.

montre que les dipôles magnétiques produisent *en des points éloignés* un champ très analogue à celui produit *en des points éloignés* par les dipôles électriques. Toutefois, comme on le voit à la figure 9.17, le champ magnétique à l'intérieur de la boucle est très différent du champ électrique à l'intérieur d'un dipôle électrique. En outre, ils sont carrément de sens opposés ! À courte distance, les dipôles électrique et magnétique n'ont donc plus un comportement analogue. Nous avions déjà souligné cette différence en comparant un dipôle électrique et une aiguille aimantée (dipôle magnétique), à la section 8.1.

Autre aspect important : l'équation 9.10 montre que *le champ magnétique que produit un dipôle est proportionnel à son moment dipolaire magnétique*. Nous nous servirons de cette proportionnalité très importante à la section 9.6, quand nous décrirons le champ produit par un matériau fait de milliards de dipôles microscopiques : décrire le dipôle résultant équivaudra à décrire le champ produit.

Le champ magnétique produit au centre d'une boucle ou d'une portion de boucle

Dans le cas particulier où le point P est dans le plan de la boucle et au centre de celle-ci, $\alpha = 90°$ et l'équation 9.9 devient

Module du champ magnétique au centre d'une boucle de courant

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2a} \qquad (9.11a)$$

On peut facilement généraliser l'équation 9.11*a* pour calculer le champ magnétique produit au centre de courbure d'un fil en forme d'arc de cercle parcouru par un courant, comme celui que nous avons rencontré à l'exemple 9.2. Le champ donné par l'équation 9.11*a* est la somme de tous les $d\vec{\mathbf{B}}$ produits au centre de la boucle par les éléments de fil de la boucle ; or, au centre de la boucle, tous les $d\vec{\mathbf{B}}$ ont la même orientation : le long de l'axe de la boucle. Ainsi, la contribution d'une fraction de la boucle est tout simplement égale au champ donné par l'équation 9.11*a multiplié par la fraction f de la boucle par rapport à une boucle complète :*

$$B = f\,\frac{\mu_0 NI}{2a} \qquad (9.11b)$$

Par exemple, un arc en demi-cercle ($f = 1/2$) avec $N = 1$ spire produit en son centre de courbure un champ magnétique dont le module est $B = \frac{1}{2}(\mu_0 I/2a) = \mu_0 I/4a$.

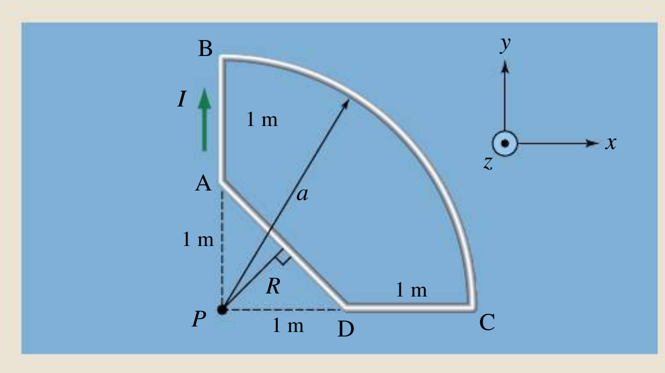
Exemple 9.6

Soit le circuit représenté à la figure 9.18, avec $I = 5$ A. Quel est le module du champ magnétique au point P ? (Le fil ne forme qu'une seule spire.)

Solution

Pour les segments rectilignes AB et CD, les équations 9.8*a* et 9.8*b* ne sont pas valables (car $R = 0$), mais l'équation 9.6 donne $dB = 0$, car $\theta = 180°$ pour tous les éléments de courant de AB et $\theta = 0°$ pour tous ceux de CD. Donc $B_{AB} = B_{CD} = 0$. Sur le segment DA, on utilise l'équation 9.8*a* avec $\theta_1 = 45°$, $\theta_2 = 135°$ et $R = 0{,}707$ m, et on trouve

$$B_{DA} = 1{,}00\ \mu\text{T}$$



▲ **Figure 9.18**

Un courant circule dans un circuit formé de trois segments rectilignes et d'un quart de cercle.

D'après la règle de la main droite, ce champ *sort de la page*, donc est orienté vers les z positifs.

Le champ produit par le quart de cercle BC équivaut à un quart du champ d'une boucle de rayon $a = 2$ m. ■

Par l'équation 9.11*b* avec $N = 1$ et $f = 1/4$, on trouve

$$B_{BC} = \frac{1}{4}(\mu_0 I/2a) = 0{,}393\ \mu\text{T}$$

D'après la règle de la main droite, ce champ *entre dans la page*, et est donc orienté vers les z négatifs.

Pour calculer le champ résultant, on doit additionner les composantes des deux contributions. Comme il n'y a aucune contribution en x ou en y, on a $B_x = B_y = 0$ et, selon z, on a

$$B_z = (1{,}00 - 0{,}393)\ \mu\text{T} = 0{,}607\ \mu\text{T}$$

Le champ résultant sort donc de la page et son module est $B = |B_z| = 0{,}607\ \mu$T.

Exemple 9.7

Directement à partir de la loi de Biot-Savart, démontrer l'équation 9.11*a*. Considérer le cas $N = 1$.

Solution

On suit les étapes de la méthode de résolution. La figure 9.19 illustre la boucle, le système d'axes, un élément de courant et le champ $d\vec{\mathbf{B}}$ que cet élément de courant produit au point P où on cherche le champ magnétique résultant $\vec{\mathbf{B}}$. Comme tout est situé dans un plan, nous n'avons pas à illustrer la situation de profil comme à la figure 9.15 (p. 368). L'équation 9.6 appliquée à l'élément de courant illustré en mauve donne

$$dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\ell \sin\theta}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\ell \sin 90°}{R^2}$$

où nous avons tenu compte du fait que tous les éléments de courant sont situés à la distance $r = R$ du point P et que $\theta = 90°$ pour chacun d'eux.

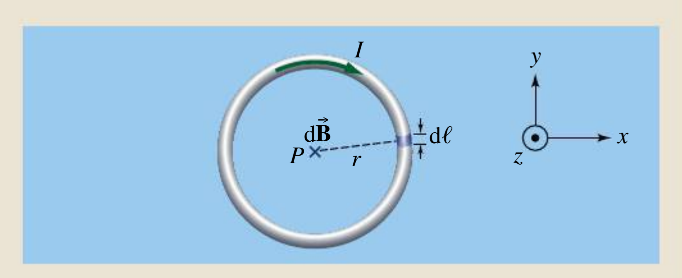
Comme on a supposé que le courant circule en sens horaire, alors la règle de la main droite indique que tous les $d\vec{\mathbf{B}}$ pointent *vers* la page, donc $dB_x = dB_y = 0$ et $dB_z = -dB$. Le champ total selon z est donc

$$B_z = \int dB_z = -\int \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{d\ell \sin 90°}{R^2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2}\int d\ell$$

Comme $\int d\ell = 2\pi R$, on obtient

$$B_z = -\frac{\mu_0 I}{2R}$$

Puisque $B_x = B_y = 0$, on a $B = |B_z|$ et le signe disparaît. Donc ce résultat correspond bel et bien à l'équation 9.11*a* pour $N = 1$.



▲ **Figure 9.19**

Démonstration de l'équation 9.11*a* pour le cas $N = 1$.

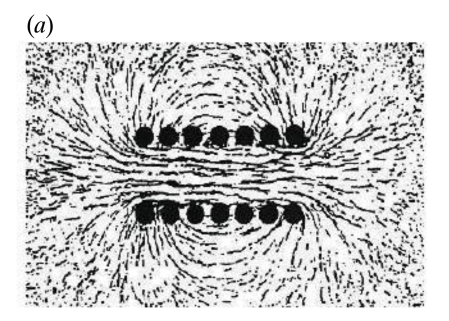
Le champ magnétique produit sur l'axe d'un solénoïde fini

Maintenant que nous avons utilisé la loi de Biot-Savart pour déterminer le champ produit sur l'axe d'une boucle de courant, considérons ce qui se produit si on utilise plusieurs de ces boucles, mais qu'elles ne sont *pas confondues*, c'est-à-dire quand il faut tenir compte de la distance qui les sépare. La figure 9.20*a* représente la répartition de la limaille de fer pour une bobine de sept spires. La figure 9.20*b* représente les lignes de champ magnétique pour une bobine de cinq spires. On remarque que les lignes de champ sont toujours des boucles fermées. Au voisinage immédiat de chaque fil, la forme des lignes tend vers

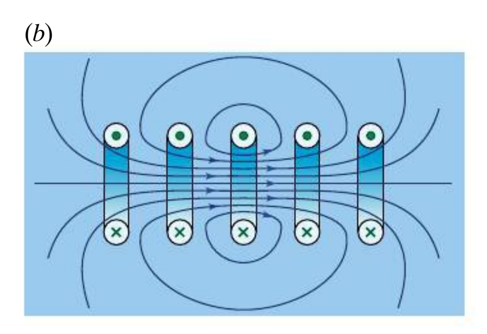
Figure 9.20

(*a*) La configuration de la limaille de fer dans le cas de sept spires. (*b*) Les lignes de champ magnétique dans le cas de cinq spires.

(*a*)



(*b*)



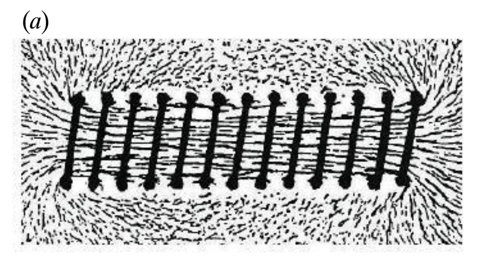
celle d'un cercle (ce qui n'est pas visible sur les figures). À l'intérieur de la bobine, les contributions de chaque spire s'additionnent et le champ magnétique est donc intense. Près de l'axe, il est pratiquement uniforme. À l'extérieur de la bobine, les contributions des divers éléments de courant ont tendance à s'annuler mutuellement et le champ est donc beaucoup plus faible. On peut en juger par le fait que les lignes de champ sont moins denses.

Le champ à l'extérieur de la bobine ressemble à celui d'un barreau aimanté, l'une des extrémités de la bobine jouant le rôle de pôle nord et l'autre de pôle sud (comparez avec les figures 8.1*a* et 8.4*a*, p. 308 et 311). Lorsque les spires sont très serrées et en très grand nombre, le dispositif obtenu est appelé **solénoïde**. Le champ magnétique à l'intérieur d'un long solénoïde est assez uniforme et intense, alors qu'il est pratiquement nul à l'extérieur (figure 9.21).

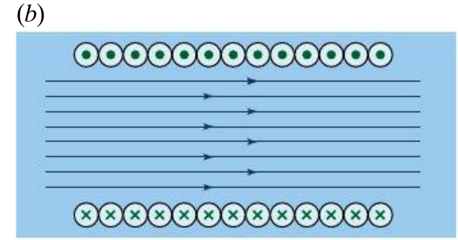
Figure 9.21

Le champ magnétique à l'intérieur d'un long solénoïde est uniforme. À l'extérieur, il est pratiquement nul.

(*a*)



(*b*)



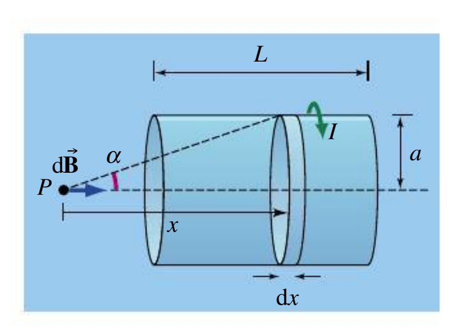


Figure 9.22

Calcul du champ magnétique sur l'axe d'un solénoïde.

Nous allons maintenant calculer le module du champ magnétique en un point P sur l'axe d'un solénoïde qui possède N spires de rayon identique a réparties sur sa longueur L (figure 9.22). Ce calcul requiert d'intégrer, mais d'intégrer autre chose que l'équation 9.6.

Aux fins du calcul, nous allons assimiler les N spires d'épaisseur finie qui composent le solénoïde à un nombre infini de boucles de courant d'épaisseur infinitésimale. Puisqu'il y a N boucles réparties sur une longueur L, l'élément d'épaisseur $\mathrm{d}x$ contient un nombre infinitésimal de boucles $\mathrm{d}N$ tel que $N/L = \mathrm{d}N/\mathrm{d}x$, ce qui donne

$$\mathrm{d}N = (N/L)\mathrm{d}x = n\,\mathrm{d}x$$

où $n = N/L$ correspond au *nombre de spires par unité de longueur*.

On considère ces $\mathrm{d}N$ boucles comme une source infinitésimale qui produit un champ $\mathrm{d}\vec{\mathbf{B}}$ au point P et on fera la somme (intégrale) sur toutes les boucles. Le module $\mathrm{d}B$ n'est pas donné par l'équation 9.6 car la source infinitésimale n'est pas un élément de courant $I\,\mathrm{d}\ell$; il est plutôt donné par l'équation 9.9, où on écrit $\mathrm{d}N$ et $\mathrm{d}\vec{\mathbf{B}}$ plutôt que N et $\vec{\mathbf{B}}$:

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0\,\mathrm{d}N\,I\sin^3\alpha}{2a} = \frac{\mu_0 nI\,\mathrm{d}x\sin^3\alpha}{2a}$$

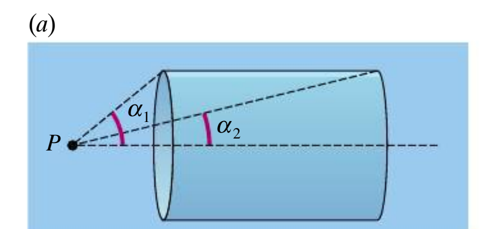
Tous les $\mathrm{d}\vec{\mathbf{B}}$ sont orientés le long de l'axe des x, donc $\mathrm{d}B_y = \mathrm{d}B_z = 0$ et $\mathrm{d}B_x = \mathrm{d}B$. Si on écrit directement $B = B_x$, on a

$$B = B_x = \int \mathrm{d}B_x = \frac{\mu_0 nI}{2a}\int \sin^3\alpha\,\mathrm{d}x$$

Pour résoudre l'intégrale, nous allons exprimer x en fonction de α et de la constante a : $x = a/\tan\alpha = a \cot\text{an}\,\alpha$, d'où $dx = -a\,\text{cosec}^2\,\alpha\, d\alpha = (-a/\sin^2\alpha)\, d\alpha$. En fonction de α, les bornes d'intégration vont de α_1 à α_2 (figure 9.23), et on trouve

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 nI \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} -\sin\alpha\, d\alpha$$

(*a*)



(*b*)

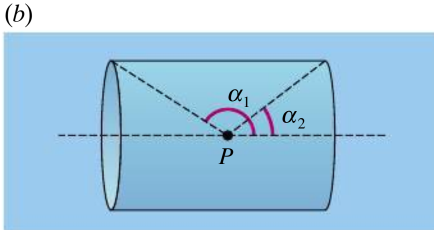


Figure 9.23

Les bornes d'intégration pour un point (*a*) à l'extérieur et (*b*) à l'intérieur d'un solénoïde. On a toujours $\alpha_1 \geq \alpha_2$.

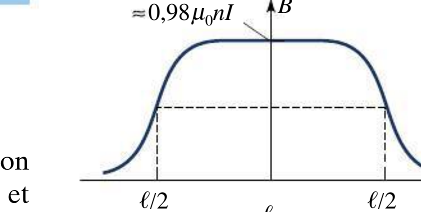


Figure 9.24

Graphe de B le long de l'axe d'un solénoïde tel que $\ell = 10a$.

d'où

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 nI(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1) \qquad (9.12)$$

Les angles α_1 et α_2 sont définis de la même façon que l'angle α dans l'équation donnant le champ pour une boucle (équation 9.9). Ils sont compris entre 0° et 180°, et on aura toujours $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Ainsi, $\cos\alpha_1 \leq \cos\alpha_2$, ce qui donne un module de champ magnétique B positif, comme il se doit. La figure 9.24 représente B en fonction de la position pour un solénoïde dont la longueur est égale à 10 fois son diamètre (voir le problème P7).

Exemple 9.8

Montrer que le module du champ magnétique à l'extrémité d'un solénoïde très long est $\mu_0 nI/2$.

Solution

Dans l'équation 9.12, on a $\alpha_1 = 90°$ et $\alpha_2 = 0$, d'où $B = \mu_0 nI/2$.

Le champ magnétique produit à l'intérieur d'un long solénoïde

Si le point P est *à l'intérieur d'un solénoïde très long* et qu'il est *assez loin des deux extrémités*, $\alpha_1 \approx 180°$ et $\alpha_2 \approx 0°$, et l'équation 9.12 donne $B = \frac{1}{2}\mu_0 nI[1 - (-1)]$, d'où

Module du champ magnétique à l'intérieur d'un long solénoïde

$$B = \mu_0 nI \qquad (9.13)$$

On peut montrer (voir la section suivante) que cette expression est également valable pour tous les points à l'intérieur d'un long solénoïde, et pas seulement sur l'axe. Ainsi, pour obtenir un champ magnétique uniforme, il est souvent plus simple d'utiliser le volume intérieur d'un long solénoïde que de rapprocher les pôles d'un barreau aimanté comme à la figure 8.5 (p. 312).

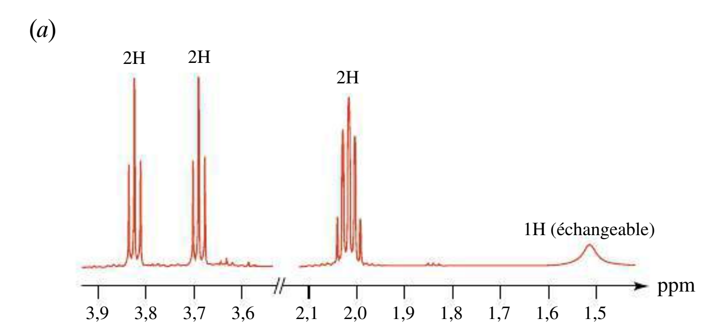
L'utilisation de solénoïdes est particulièrement importante dans la technique de la résonance magnétique nucléaire (RMN), utilisée en spectroscopie biochimique pour déterminer la structure de molécules inconnues. Quand on place l'échantillon dans un champ magnétique, qui peut atteindre

jusqu'à 15 T dans les meilleurs spectromètres, les noyaux de tous les atomes d'hydrogène qu'il contient alignent leur moment dipolaire magnétique sur le champ extérieur. On envoie ensuite une onde radio qui, si elle a la fréquence lui permettant d'être absorbée par un noyau, fait passer son moment dipolaire magnétique de l'orientation parallèle à l'antiparallèle. En testant une gamme de fréquences, on différencie celles qui causent une *résonance*, c'est-à-dire celles qui sont absorbées et réémises. La fréquence de la radiation absorbée et réémise nous renseigne sur la densité d'électrons qui entoure le noyau ayant interagi avec la radiation, de même que sur le nombre de noyaux d'hydrogène voisins dans la molécule inconnue. Cette fréquence étant proportionnelle au champ magnétique, celui-ci doit avoir un module rigoureusement uniforme. Chaque molécule est entièrement caractérisée par son *spectre*, c'est-à-dire un graphique de l'intensité absorbée en fonction de la fréquence (figure 9.25*a*).

Comme le montre la figure 9.25*b*, la RMN est aussi utilisée en imagerie médicale pour visualiser les tissus mous d'un patient, en particulier le cerveau, les muscles et les tumeurs, difficiles à voir avec la radiographie classique (figure 9.25*c*). Elle fonctionne selon le même principe que les spectromètres RMN que nous venons de décrire, c'est-à-dire par l'absorption et la réémission d'ondes radio par les noyaux d'hydrogène. Ces noyaux sont abondants dans l'*eau* dont les tissus sont composés en majeure partie, ainsi que dans d'autres molécules comme celles composant les gras. Comme dans un spectromètre, on observe les ondes radio réémises, mais on s'intéresse cette fois à leur intensité et à leur position d'origine, plutôt qu'à leur fréquence. Pour déterminer la position d'origine, on perturbe localement le champ magnétique pour faire en sorte que, à une fréquence radio donnée, la résonance ne se produise que dans une petite « tranche » du corps à la fois. On utilise ensuite une échelle de tons de gris pour différencier visuellement l'intensité reçue d'un endroit à l'autre.

On constate que les noyaux d'hydrogène placés dans des environnements différents (c'est-à-dire des tissus différents) diffèrent par leur *délai de relaxation*, c'est-à-dire le délai entre l'absorption et la réémission de la radiation. On peut se servir de ce fait pour mieux distinguer les différents tissus sur les images obtenues. Comparativement à la spectrométrie RMN, le champ magnétique requis pour l'imagerie est moins intense (jusqu'à 2 T), mais il faut y placer le corps entier du patient, ce qui requiert un solénoïde énorme (voir la photo de la page titre du chapitre). Celui-ci fonctionne grâce à un aimant supraconducteur.

(*a*)



(*b*)



(*c*)



▲ Figure 9.25

(*a*) Spectre RMN d'une molécule. Chaque groupe de pics correspond à un noyau d'hydrogène. Le dédoublement des pics permet de déterminer le nombre d'autres noyaux d'hydrogène situés à proximité ; la position horizontale des pics nous renseigne sur la densité d'électrons environnante. Bien que l'axe horizontal soit habituellement gradué en parties par millions (ppm), sa graduation est une fonction linéaire de la fréquence absorbée. (*b*) L'imagerie par RMN permet de visualiser les tissus mous avec beaucoup plus de détails que (*c*) la radiographie classique aux rayons X.

Électroaimants et aimants permanents

Une boucle (ou un solénoïde) parcourue par un courant est appelée un **électroaimant**, c'est-à-dire un dispositif qui tire son aimantation du courant électrique qui le traverse. En revanche, un **aimant permanent** (comme un morceau de magnétite, un barreau aimanté ou une aiguille de boussole) produit un champ magnétique sans qu'il n'y ait de courant qui le traverse. Or, la similitude entre les lignes de champ magnétique d'un électroaimant (voir la figure 9.20, p. 372) et celles d'un aimant permanent (voir les figures 8.1*a* et 8.4*a*, p. 308 et 311) est frappante.

Dès le XIX[e] siècle, plusieurs physiciens ont soupçonné que tous les aimants sont en quelque sorte des électroaimants : le champ magnétique d'un aimant permanent serait produit par des courants électriques microscopiques dans le matériau. Comme nous l'avons mentionné à la section 8.1, on sait aujourd'hui que cette idée de courants microscopiques est valable : le champ magnétique produit par les aimants est attribué au *mouvement* microscopique des électrons dans l'atome, de même qu'au phénomène du *spin* des électrons, tels que décrits par la mécanique quantique. *Ainsi, à la base, tout champ magnétique est produit par des courants électriques, qu'ils soient macroscopiques ou microscopiques*. Dans un aimant permanent, les orbites des électrons sont orientées selon un alignement particulier, ce qui produit un champ magnétique résultant non nul. Dans un barreau non aimanté, les orbites des électrons sont orientées de manière aléatoire, et le champ magnétique résultant est nul. On reviendra de façon plus détaillée sur les propriétés magnétiques de la matière à la section 9.6.

Le fait que le champ magnétique d'un aimant soit produit par l'équivalent d'une boucle de courant explique pourquoi on ne peut jamais séparer un pôle nord magnétique d'un pôle sud magnétique (voir la figure 8.2, p. 309) : une boucle de courant a nécessairement un pôle nord d'un côté et un pôle sud de l'autre, et on ne peut pas construire une boucle qui n'aurait qu'un seul côté !

Le champ magnétique produit par une charge ponctuelle en mouvement

L'équation 9.7 peut être transformée pour donner le champ magnétique produit par une charge ponctuelle se déplaçant à la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$.

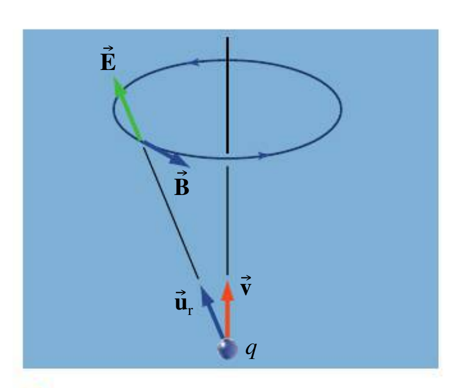
La loi de Biot-Savart donne le champ magnétique produit par un élément de courant $I\,\mathrm{d}\vec{\ell}$. Puisque $I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$, on peut réécrire

$$I\,\mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}q\frac{\mathrm{d}\vec{\ell}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{d}q\,\vec{\mathbf{v}}$$

où $\vec{\mathbf{v}}$ est la vitesse de la charge dq. D'après l'équation 9.7, on en déduit que le champ magnétique créé par une charge ponctuelle q se déplaçant à la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ est

$$\vec{\mathbf{B}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{u}}_\mathrm{r}}{r^2} \qquad (9.14)$$

Les lignes du champ magnétique sont circulaires (figure 9.26). Contrairement à celui produit par le courant circulant dans un conducteur, le champ magnétique produit en un point P par une particule en mouvement n'est pas constant dans le temps. Son module est maximal à l'instant où la particule passe devant le point P : r est alors minimal et θ est 90°. L'équation 9.14 est valable dans les mêmes limites que la loi de Biot-Savart.



▲ **Figure 9.26**
Le champ magnétique produit par une charge q se déplaçant à la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$. La figure montre aussi le champ électrique produit par q.

Exemple 9.9

(a) Selon la théorie présentée dans ce tome, quel est le module de la force résultante qu'exercent l'une sur l'autre deux charges positives égales se déplaçant parallèlement l'une à l'autre, à une distance d, avec la même vitesse ? (b) Montrer que les champs électrique et magnétique produits par une charge ponctuelle en mouvement sont liés par la relation $\vec{\mathbf{B}} = (\mu_0\varepsilon_0)\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{E}}$.

Solution

(a) À la figure 9.27, le module de la force électrique de répulsion entre les charges est

$$F_E = \frac{kq^2}{d^2}$$

Le module de la force magnétique $\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ exercée par une des charges sur l'autre est

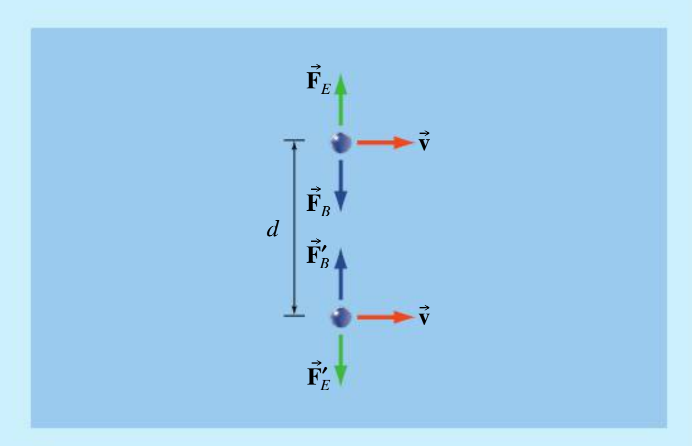
$$F_B = qv\frac{k'qv}{d^2} = \frac{k'q^2v^2}{d^2}$$

Cette force est attractive. Puisque $k' = \mu_0/4\pi$ et que $k = 1/4\pi\varepsilon_0$, on trouve $k' = k/c^2$, c étant la vitesse de la lumière dans le vide (nous montrerons au chapitre 13 que $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$). La force résultante entre les charges est donc

$$F = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\frac{kq^2}{d^2}$$

En tenant compte des effets relativistes, ce résultat doit être légèrement modifié, mais un constat demeure : la force résultante exercée sur chacune des particules se déplaçant avec la même vitesse est *inférieure* à la force exercée sur les particules lorsqu'elles sont au repos. Nous reviendrons sur ce résultat au chapitre 8 du tome 3.

(b) On remarque que $\vec{\mathbf{E}} = (kq/r^2)\vec{\mathbf{u}}_r$, avec $k = 1/4\pi\varepsilon_0$. Ainsi, $(\mu_0\varepsilon_0)\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{E}}$ correspond bien au membre de droite de l'équation 9.14. Le produit vectoriel peut être visualisé à la figure 9.26.



▲ **Figure 9.27**

Deux charges en mouvement côte à côte avec la même vitesse. La force résultante entre elles est inférieure à celle qui s'exerce lorsqu'elles sont au repos (en l'absence de forces magnétiques).

APERÇU HISTORIQUE

Les électroaimants

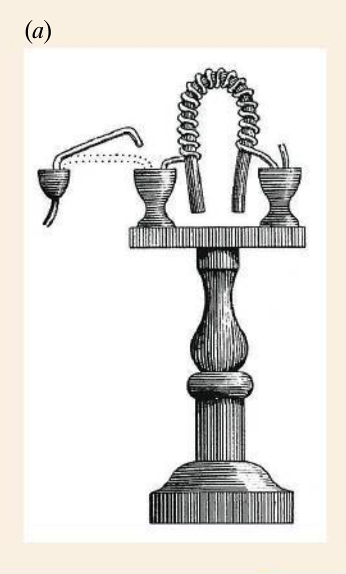
En septembre 1820, François Arago (1786-1853) découvrit qu'un barreau de fer devenait aimanté lorsqu'on le plaçait à l'intérieur d'un solénoïde parcouru par un courant. Ce fut le premier électroaimant. En 1825, William Sturgeon (1783-1850) utilisa un barreau de fer en forme de fer à cheval, qu'il enduisit de vernis (agissant comme couche isolante) et autour duquel il enroula plusieurs spires de fil conducteur nu (figure 9.28*a*). Mais les spires de conducteur étant éloignées les unes des autres, cet électroaimant ne pouvait soulever que quelques grammes.

À l'Université de Princeton, Joseph Henry (1797-1878) perfectionna considérablement le modèle de Sturgeon. N'ayant pas de fil isolé à sa disposition, Henry utilisa des lambeaux de soie pour recouvrir laborieusement des centaines de mètres de fil conducteur nu. Il fut récompensé de ses efforts, car l'isolation lui permit d'enrouler plusieurs spires autour d'un même noyau de fer (figure 9.28*b*). Son plus gros électroaimant était capable de soulever 750 livres.

Henry apporta une aide importante à Samuel Finley Morse (1791-1872) aux États-Unis et à Wheatstone en Angleterre, qui étaient en train de mettre sur pied des compagnies de télégraphe, et leur donna de nombreux conseils. L'essentiel du fonctionnement du télégraphe électrique fut démontré par Henry avec l'appareil illustré à la figure 9.28*c*.

Lorsqu'un courant provenant d'une source distante est appliqué à l'électroaimant, le barreau aimanté suspendu tourne et vient frapper la cloche. De nos jours, les électroaimants sont utilisés, par exemple, dans les têtes d'enregistrement des bandes magnétiques, pour soulever des voitures, pour verrouiller des portes à distance ou encore pour produire des champs magnétiques pour la recherche.

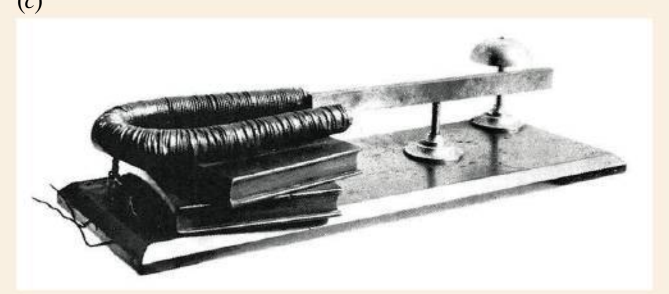
(*a*)



(*b*)



(*c*)



▲ **Figure 9.28**

(*a*) Le premier électroaimant confectionné par William Sturgeon en 1825. (*b*) Un électroaimant fabriqué par Joseph Henry. (*c*) Le montage utilisé par Henry pour démontrer le principe du télégraphe électrique.

9.4 LE THÉORÈME D'AMPÈRE

André Marie Ampère (figure 9.29) avait exprimé plusieurs objections aux travaux de Biot et Savart. Par exemple, il estimait que leurs expériences n'étaient pas assez précises pour établir avec certitude la valeur du facteur sin θ. L'obligation de faire intervenir des « éléments de courant » ne lui plaisait pas non plus, puisque les éléments de courant isolés n'existent pas en réalité ; ils font toujours partie d'un circuit complet. Il décida donc de poursuivre de son côté ses travaux expérimentaux et théoriques qui lui permirent d'établir une relation différente, appelée maintenant *théorème d'Ampère*, entre un courant et le champ magnétique qu'il produit.



▲ **Figure 9.29**

André Marie Ampère (1775-1836).

Comme nous le verrons, le théorème d'Ampère est analogue au théorème de Gauss que nous avons étudié au chapitre 3 : alors que le théorème de Gauss permet de relier l'intégrale *de surface* du champ électrique à la charge contenue dans le *volume* enfermé par la surface, le théorème d'Ampère permet de relier l'intégrale de *ligne* du champ magnétique au courant qui traverse la *surface* délimitée par la ligne.

Avant de démontrer le théorème d'Ampère, il nous faut expliquer ce qu'est l'intégrale de ligne $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}$. Nous avons déjà appliqué ce type d'intégrale au champ *électrique*, au chapitre 4 (dans l'équation 4.9, $\Delta V = -\int_A^B \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathbf{s}}$) : pour la calculer, on choisit un parcours (et non une surface), qu'on subdivise en petits déplacements $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}$ successifs. Sur chacun de ces éléments, on évalue le produit scalaire $\vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} = B\,\mathrm{d}\ell \cos\theta$, puis on additionne (intègre) les contributions infinitésimales obtenues. La seule nouveauté de cette démarche, comparativement à celle utilisée au chapitre 4, est que le théorème d'Ampère considérera un *parcours fermé* pour calculer l'intégrale de ligne. Par conséquent, on ajoute

un cercle sur le symbole de l'intégration ($\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell}$) pour signifier que le parcours d'intégration doit être un parcours fermé sur lui-même.

Note importante : il ne faut pas confondre $d\vec{\ell}$ avec le facteur $d\vec{\ell}$ contenu dans la loi de Biot-Savart : le premier représente un élément d'un *parcours* dans le champ, alors que le second représente la longueur d'un élément de *courant*.

La démonstration du théorème d'Ampère

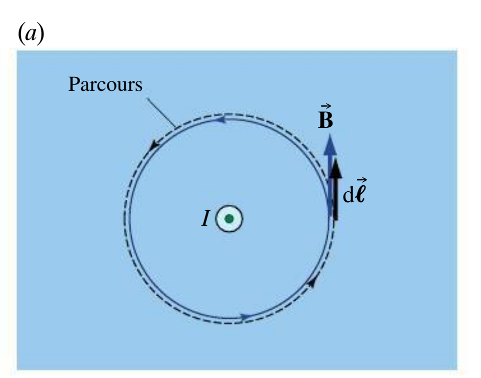
Pour démontrer le théorème, considérons tout d'abord un parcours fermé en forme de cercle de rayon R, centré sur un conducteur rectiligne parcouru par un courant I (figure 9.30*a*). Le parcours épouse la forme d'une ligne de champ ; ainsi, quelle que soit la position de $d\vec{\ell}$, on a $\cos\theta = 1$, donc $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = B\,d\ell$. Puisque la valeur du module B est constante tout au long du parcours, l'intégrale de ligne se réduit à $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = B\oint d\ell = B(2\pi R)$. Si on exprime B à l'aide de l'équation 9.1, on obtient

$$(I \text{ à l'intérieur}) \qquad \oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I$$

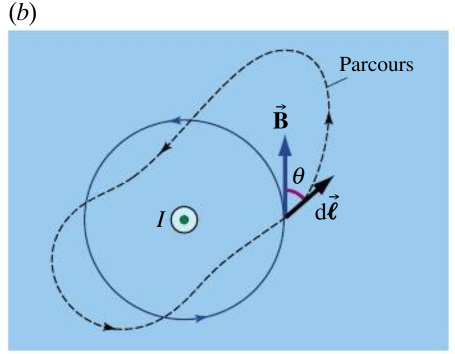
Exactement comme au chapitre 3, où le flux électrique qui traversait une sphère ne dépendait pas du rayon de la sphère, on note que ce résultat ne dépend pas du rayon R du cercle. Cela s'explique par le fait que le module B du champ est inversement proportionnel à R, mais que la longueur du parcours, elle, est proportionnelle à R. Leur produit n'en dépend donc pas.

On peut montrer que ce résultat est valable pour un parcours de forme quelconque, pourvu que ce parcours entoure le courant (figure 9.30*b*). En effet, un peu comme nous l'avons fait à la section 3.2 pour montrer que le flux électrique ne dépendait pas de la forme de la surface enfermant une charge, on peut décomposer le parcours de la figure 9.30*b* en « projections » qui sont des portions de cercles, chacune étant sous-tendue par un même angle. Pour chacune de ces projections, le produit scalaire $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell}$ est le même, *quel que soit le rayon*.

(*a*)

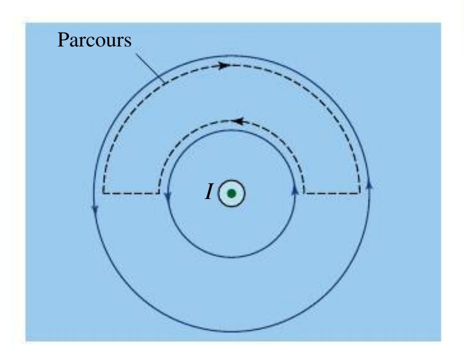


(*b*)



▶ **Figure 9.30**

Un courant qui sort de la page. L'intégrale $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell}$ sur un parcours fermé qui entoure le courant est égale à $\mu_0 I$. Ce résultat demeure valable que le parcours épouse la forme d'une ligne de champ comme en (*a*) ou qu'il ait une forme quelconque comme en (*b*), pourvu que le parcours entoure le courant.



▲ **Figure 9.31**

L'intégrale $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell}$ sur un parcours fermé qui n'entoure pas le courant est nulle, quelle que soit la forme du parcours.

Considérons maintenant le cas d'un parcours qui *n'entoure pas* le courant (figure 9.31). On voit clairement que le champ longe la moitié du parcours dans un sens et l'autre moitié dans l'autre sens, donc que

$$(I \text{ à l'extérieur}) \qquad \oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

Ici encore, on peut montrer que ce résultat est valable quelle que soit la forme du parcours, pourvu qu'il n'entoure pas le courant.

Il ne reste donc plus qu'à considérer ce qui se produit quand il y a *plusieurs courants*, certains encerclés par le parcours et d'autres non. Exactement comme nous l'avons fait pour démontrer le théorème de Gauss, on peut exprimer le champ magnétique résultant comme une somme vectorielle des contributions

dues à chacun des courants. L'intégrale de ligne du champ résultant sera donc la somme des intégrales de lignes des contributions. Pour les courants qui ne sont pas entourés par le parcours, ces intégrales seront nulles, et pour les autres, elles seront $\mu_0 I$. On obtiendra donc le résultat suivant, qui est le **théorème d'Ampère**:

Théorème d'Ampère

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \Sigma I \quad (9.15)$$

Puisque ΣI est le courant *total* traversant la surface délimitée par le parcours, cela signifie que les courants en sens opposés ont un signe différent. Le sens (horaire ou antihoraire) choisi pour calculer l'intégrale est donné par la règle de la main droite: le pouce de la main droite étant placé dans le sens positif du courant, les quatre doigts enroulés autour du fil indiquent le sens positif du parcours.

Cette version du théorème d'Ampère est incomplète (voir la section 13.1) et n'est valable que pour des courants *continus* et pour des champs produits dans le vide ou dans des matériaux non magnétiques, comme le cuivre. Le courant ne doit pas nécessairement circuler dans un fil conducteur; un faisceau de particules chargées constitue également un courant. On souligne que le membre de gauche de l'équation 9.15 ne dépend pas de la position exacte des courants encerclés par le parcours. De plus, le champ $\vec{\mathbf{B}}$ qui intervient dans le théorème d'Ampère est le champ *total* créé par tous les courants du voisinage, et non pas seulement par ceux circulant à l'intérieur du parcours. Si le courant encerclé par le parcours est nul, cela ne veut *pas* forcément dire que $\vec{\mathbf{B}} = 0$ le long du parcours. Le champ peut très bien être créé par les courants extérieurs au parcours, comme le montre la figure 9.31. Toutefois, le théorème d'Ampère implique que l'intégrale de ligne le long d'un parcours est fonction *uniquement* des courants qui sont encerclés par le parcours. L'exemple suivant, analogue à l'exemple 3.3, clarifiera cette idée.

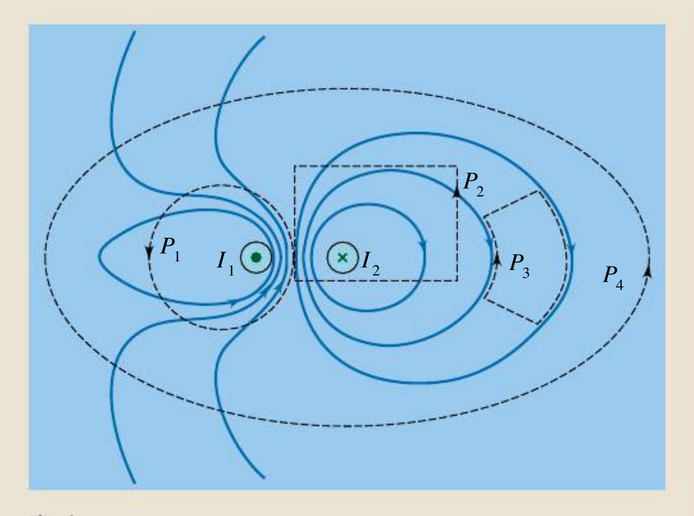
Exemple 9.10

La figure 9.32 représente le champ magnétique *résultant* dû aux courants $I_1 = 1$ A et $I_2 = 2$ A dans deux conducteurs perpendiculaires à la page. Calculer l'intégrale de ligne de ce champ magnétique le long des parcours P_1, P_2, P_3 et P_4, selon le sens indiqué sur la figure.

Solution

C'est le résultat de l'intégrale de ligne qui est demandé et non le champ. Il n'est donc pas nécessaire d'intégrer: le théorème d'Ampère donne directement l'intégrale de ligne, qui vaut dans chaque cas $\mu_0 \Sigma I$. ■

Considérons d'abord le parcours P_1. Puisqu'on intègre en longeant ce parcours dans le sens antihoraire, le sens positif du courant sort de la page. Puisque le seul courant encerclé par le parcours est I_1, l'intégrale de ligne est $\mu_0(1\ \text{A}) = 1{,}26 \times 10^{-6}$ T·m. La présence de I_2 n'a aucun



▲ **Figure 9.32**
L'intégrale de ligne le long d'un parcours est déterminée par le courant total encerclé par le parcours.

effet sur le résultat de l'intégrale de ligne le long de P_1, même si I_2 participe à la production du champ magnétique le long de P_1.

Le même raisonnement vaut pour le parcours P_2, le courant I_2 encerclé par ce parcours étant dans le sens négatif. Le long de ce parcours, l'intégrale de ligne vaut donc $\mu_0(-2 \text{ A}) = -2{,}51 \times 10^{-6}$ T·m. Pour le parcours P_3, l'intégrale de ligne est nulle, car aucun courant ne traverse la surface délimitée par le parcours.

Enfin, si on considère le parcours P_4, il encercle un courant total $I_1 - I_2$, donc l'intégrale de ligne du champ le long de ce parcours est $\mu_0(-1 \text{ A}) = -1{,}26 \times 10^{-6}$ T·m.

Si on avait demandé le champ plutôt que son intégrale de ligne, il aurait fallu isoler le champ du membre de gauche de l'équation 9.15 en intégrant, ce que la (faible) symétrie de la figure ne permet pas de faire. Il en sera autrement dans les cas étudiés dans les prochains exemples. ■

Notons que la figure 9.32 est analogue à la figure 3.11 (p. 99). Cependant, contrairement au flux qui possède une interprétation visuelle facile (le nombre de lignes de champ qui traversent une surface), il n'existe pas d'équivalent pour l'intégrale de ligne du champ.

L'utilisation du théorème d'Ampère

À la section 3.3, nous avons vu que le champ électrique avait les mêmes propriétés de symétrie que le système de charges sources qui le produisent. De même, *le champ magnétique a les mêmes propriétés de symétrie sous rotation ou sous translation que les courants sources qui le produisent**. Exactement comme le théorème de Gauss ne permettait de calculer le champ électrique que dans des situations très symétriques, le théorème d'Ampère n'aura d'utilité que dans des situations très symétriques. Dans de telles situations, on pourra choisir un parcours qui possède les mêmes propriétés de symétrie que les courants, et l'intégrale de ligne du champ deviendra très simple : il sera possible d'extraire B de l'intégrale. En somme, comme c'était le cas pour le théorème de Gauss, ce sont les informations déduites par symétrie, combinées à celles données par le théorème d'Ampère, qui permettent de calculer B et non l'une ou l'autre de ces informations prises de façon isolée.

En pratique, pour calculer le champ en un point P, il faut d'abord connaître (ou supposer) l'orientation des lignes de champ. Ensuite, il faut trouver un parcours d'intégration *passant par le point P* et pour lequel l'intégrale est facile à évaluer. Sur chaque portion de ce parcours, il faut (i) que le champ ait partout le même module et soit dans la même direction que $d\vec{\ell}$ *ou* (ii) que le champ soit partout perpendiculaire à $d\vec{\ell}$. Dans le cas (i), l'angle entre le champ et chaque $d\vec{\ell}$ est de 0° (ou 180°), le terme cos θ dans le produit scalaire égale 1 (ou –1) et la valeur constante B (ou $-B$) peut être extraite de l'intégrale. L'intégrale est alors égale à la somme des éléments de parcours, donc à la longueur du parcours. Dans le cas (ii), le facteur cos θ dans le produit scalaire est égal à 0 et l'intégrale est nulle.

La grandeur ΣI dans le théorème d'Ampère représente le courant total qui traverse la surface délimitée par le parcours d'intégration. Or, dans plusieurs cas, le parcours n'encercle qu'*une partie* de la section du conducteur qui porte le courant. Si la densité de courant est uniforme, on peut alors déterminer ΣI en multipliant le courant total par la fraction de la section qui est encerclée par le parcours d'intégration.

Dans les exemples qui suivent, on appliquera le théorème d'Ampère à des situations connues, comme la détermination du champ produit par un long conducteur

* Il faut toutefois prendre garde à la symétrie sous réflexion : si les courants sont inchangés sous réflexion, il peut quand même arriver que le champ inverse son sens, même s'il conserve la même direction. Cela découle de la règle de la main droite. Toutefois, la symétrie est restaurée si on applique *deux* réflexions par rapport à des plans différents.

rectiligne ou par un long solénoïde. On obtiendra des résultats identiques aux équations 9.1 et 9.13, mais avec beaucoup plus de facilité qu'avec la loi de Biot-Savart. Ensuite, on considérera des situations nouvelles. En particulier, on verra que le champ à l'intérieur d'un conducteur de rayon R parcouru par un courant uniformément réparti dans sa section, à une distance r du centre, est donné par

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \qquad (9.16)$$

On verra aussi que le champ dans une bobine toroïdale de N spires, à une distance r de l'axe de symétrie de la bobine, est donné par

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \qquad (9.17)$$

Exemple 9.11

Un *conducteur rectiligne infini* de rayon R est parcouru par un courant I. Déterminer le module du champ magnétique à une distance r du centre du conducteur pour (a) $r > R$ et (b) $r < R$. On suppose que le courant est distribué uniformément sur la section transversale du conducteur.

Solution

(a) Étant donné la symétrie cylindrique de la distribution de courant, on sait que le champ aura une symétrie cylindrique. Cela nous permet d'affirmer que le module du champ est le même pour tous les points situés à une distance r du centre et que les lignes de champ sont circulaires. On choisit donc pour le parcours d'intégration un cercle de rayon r dont le centre coïncide avec le centre du conducteur (figure 9.33*a*). En un point quelconque situé sur le parcours, $\vec{\mathbf{B}}$ est parallèle à $d\vec{\ell}$, ce qui signifie que $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = B\, d\ell$. D'après l'équation 9.15,

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = B \oint d\ell = \mu_0 \Sigma I \qquad \text{(i)}$$

En effet, on peut sortir le module du champ B de l'intégrale puisqu'il est constant sur le parcours choisi. L'intégrale est alors simplement égale à $2\pi r$ et le courant total ΣI à l'intérieur du parcours est égal à I. On obtient donc $B(2\pi r) = \mu_0 I$ et

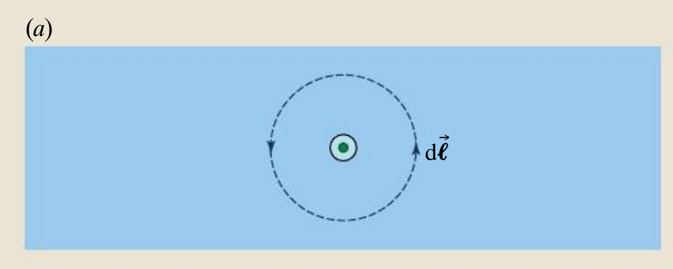
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \qquad \text{(ii)}$$

Cette approche est plus simple que ce qu'exige la loi de Biot-Savart appliquée à une telle situation. En revanche, le théorème d'Ampère devient inapplicable si le fil n'est pas infini. En effet, il faut alors tenir compte du champ magnétique résultant produit par le courant *dans tout le circuit* dont fait partie le conducteur, situation qui n'a plus la symétrie nécessaire. ■

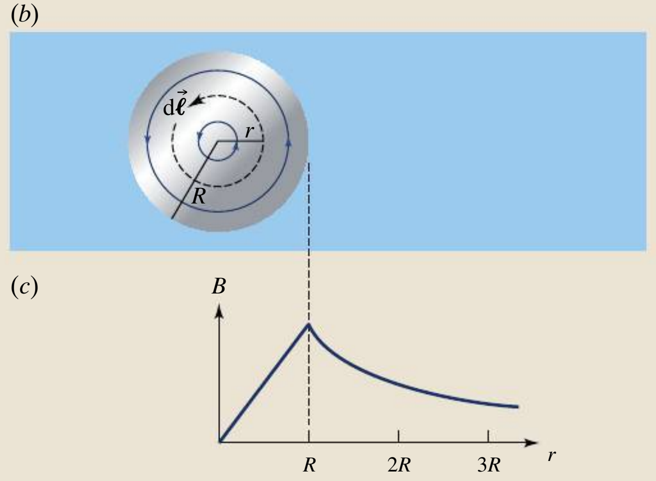
(b) Les conditions de symétrie étant les mêmes à l'intérieur du conducteur, l'équation (i) reste valable, mais cette fois le parcours circulaire fermé est situé à l'intérieur du conducteur.

Le courant circulant à l'intérieur du parcours de la figure 9.33*b* est égal à une fraction seulement du courant total I. Cette fraction est donnée par le rapport entre l'aire délimitée par le parcours et celle du conducteur, c'est-à-dire $\Sigma I = (\pi r^2/\pi R^2)I$. ■

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 9.33**

(*a*) Étant donné la symétrie, un cercle centré sur le fil conducteur est un parcours d'intégration approprié. (*b*) Le parcours d'intégration est choisi à l'intérieur du conducteur, de sorte qu'il encercle une partie seulement du courant total. (*c*) Graphique du module du champ magnétique en fonction de la distance à partir du centre du fil conducteur.

L'équation (i) prend la forme

$$B(2\pi r) = \mu_0 \frac{r^2}{R^2} I$$

$$B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \qquad \text{(iii)}$$

On remarque que, pour $r = R$, les équations (ii) et (iii) donnent le même résultat. Le module du champ magnétique est donc continu d'un côté à l'autre de la surface du conducteur. La figure 9.33*c* représente le module du champ magnétique en fonction de r.

Exemple 9.12

Un très long solénoïde comporte n spires par unité de longueur et il est parcouru par un courant I. Déterminer le module du champ magnétique produit à l'intérieur de ce solénoïde.

Solution

Le champ à l'extérieur d'un solénoïde infini idéal est nul (voir la figure 9.21, p. 372). À l'intérieur, on sait que le champ a les mêmes propriétés de symétrie que le solénoïde. Or, celui-ci est inchangé s'il subit une rotation par rapport à son axe ou une translation le long de son axe (car il est infini). En suivant le raisonnement de la section 3.3, on en déduit que toutes les lignes de champ dans le solénoïde doivent être *parallèles à l'axe*. De même, la symétrie sous translation implique que le champ en chacun des points situés sur l'axe d'un solénoïde infini a la même valeur*. On peut dire la même chose à propos de toute droite parallèle à l'axe : le champ a la même valeur en chacun des points d'une telle droite. La seule chose que la symétrie ne permet pas de déterminer est si le champ dépend ou non de la distance par rapport au centre du solénoïde. ■

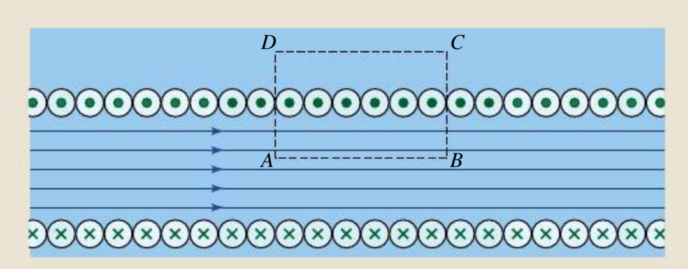
Pour tirer parti de cette géométrie, on choisit le rectangle $ABCD$ de la figure 9.34 comme parcours d'intégration. Pour le moment, le trajet AB est le long de l'axe central du solénoïde.

Soulignons que le champ $\vec{\mathbf{B}}$ le long du parcours comprend les contributions de boucles de courant qui *ne sont pas* encerclées par le parcours. D'ailleurs, sans ces contributions extérieures, on n'aurait pas pu prétendre que $B = 0$ à l'extérieur ou que les lignes de champ à l'intérieur du solénoïde sont parallèles à l'axe. ■

Le long de ce parcours, l'intégrale de ligne se décompose en quatre parties :

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = \int_A^B \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} + \int_B^C \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} + \int_C^D \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} + \int_D^A \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell}$$

Sur le trajet CD, $\vec{\mathbf{B}} = 0$ et la troisième intégrale est donc nulle. $\vec{\mathbf{B}}$ est également nul pour les parties de BC



▲ **Figure 9.34**

Le parcours d'intégration approprié pour un très long solénoïde est rectangulaire. Seule la portion située à l'intérieur du solénoïde contribue à l'intégrale.

et de DA situées à l'extérieur du solénoïde. À l'intérieur du solénoïde, sur ces deux trajets, $\vec{\mathbf{B}}$ est perpendiculaire à $d\vec{\ell}$, de sorte que $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = 0$. Pour ces deux raisons, la deuxième et la quatrième intégrale disparaissent. Enfin, sur le trajet AB, $\vec{\mathbf{B}}$ est constant (à cause de la symétrie de translation) et parallèle à $d\vec{\ell}$, de sorte que $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = B\, d\ell$. Si le trajet AB a une longueur L, le nombre de spires est nL et le courant à l'intérieur est $\Sigma I = nLI$. Le théorème d'Ampère devient maintenant

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = B \int_B^A d\ell = \mu_0 n L I$$

d'où l'on tire que le module du champ le long de l'axe central du solénoïde est

$$B = \mu_0 n I$$

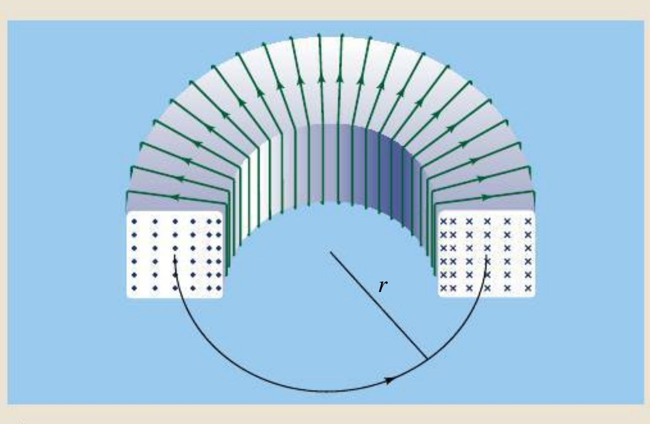
On voit donc que, en choisissant le parcours approprié pour le théorème d'Ampère, on peut remplacer la longue intégration de la section précédente par un calcul d'une seule ligne !

On peut même aller plus loin : si on recommence en modifiant le parcours d'intégration de façon à ce que les points C et D soient inchangés, que le même courant soit encerclé, mais que le trajet AB soit sur une droite parallèle à l'axe du solénoïde, on obtient à nouveau $B = \mu_0 n I$. Ce résultat est donc valable partout à l'intérieur du solénoïde infini, ce qui signifie que le champ magnétique à l'intérieur d'un tel solénoïde est *uniforme* sur l'ensemble de sa section transversale. Ce résultat va *beaucoup plus loin* que ce que nous avions déduit à la section précédente avec l'approche de Biot-Savart. ■

* Cette prédiction basée sur la symétrie correspond à ce que peut nous apprendre le principe de superposition : si on considère un point donné de l'axe du solénoïde, la somme des contributions de toutes les spires au champ magnétique total à ce point est effectivement orientée selon l'axe.

Exemple 9.13

Une *bobine toroïdale* (en forme de bouée ou de beigne), aussi appelée un *tore*, est faite de N spires jointives parcourues par un courant I. On suppose qu'elle a une section transversale rectangulaire (figure 9.35). Déterminer le module du champ magnétique à l'intérieur du tore en fonction de la distance r par rapport au centre.



▲ **Figure 9.35**
À l'intérieur d'une bobine toroïdale, le module du champ est constant le long d'un cercle donné de rayon r ayant le même centre que la bobine.

Solution

Dans un tore, les lignes de champ ont la forme de cercles concentriques, dont on ne voit sur la figure que les points où ils entrent et sortent de la page. Pour déduire cette forme, on doit utiliser la symétrie : la configuration de courant est la même en tout point situé à une même distance r de l'axe central de la bobine. Il s'ensuit que le champ est lui aussi le même en tout point situé à une même distance r de l'axe central. On dit qu'ils partagent la même symétrie sous rotation (voir la section 3.3).

Nous choisirons donc un parcours d'intégration en forme de cercle de rayon r, centré sur l'axe de la bobine (figure 9.35). Le long de ce parcours, $\vec{\mathbf{B}}$ est parallèle à $d\vec{\ell}$ et a le même module en tout point. Le courant à l'intérieur du parcours est $\Sigma I = NI$ et le théorème d'Ampère prend alors la forme

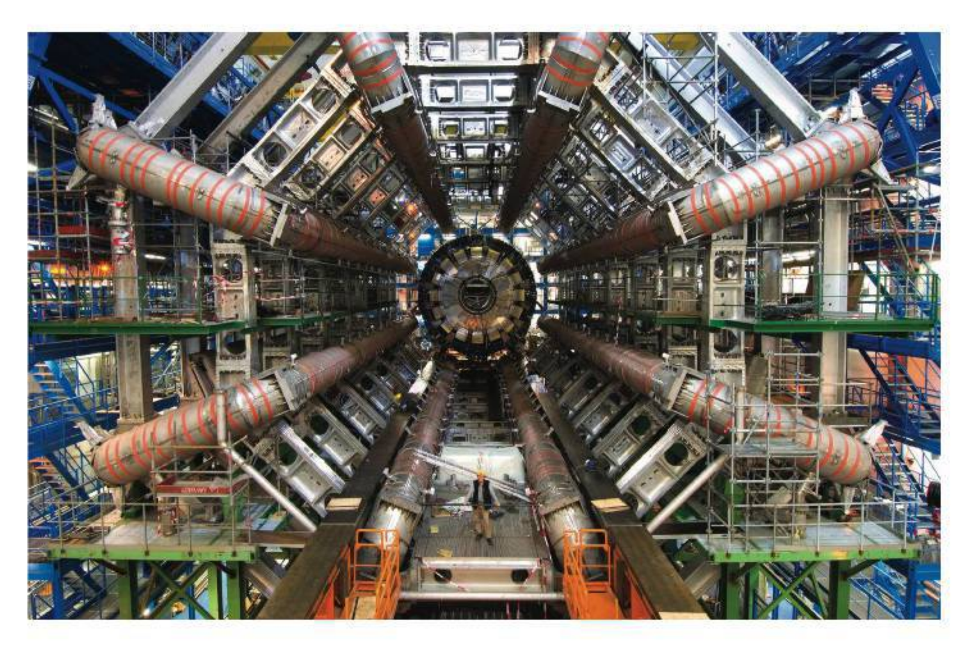
$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = B\oint d\ell = \mu_0(NI)$$

Comme $\oint d\ell = 2\pi r$, on trouve

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

Puisque $N/2\pi r$ n'est rien d'autre que n, le nombre de spires par unité de longueur, on pourrait penser que ce résultat est identique à celui obtenu pour un solénoïde infini. Il y a cependant une différence importante : ici, le module du champ n'est *pas uniforme* : il varie en $1/r$. Cependant, dans la limite où $r \to \infty$, le tore devient rectiligne et le champ redevient uniforme. ■

Les champs toroïdaux comme ceux présentés dans le dernier exemple sont utilisés dans la recherche sur la fusion (voir le sujet connexe sur les réacteurs nucléaires, au chapitre 12 du tome 3), de même que dans plusieurs détecteurs de particules (figure 9.36).



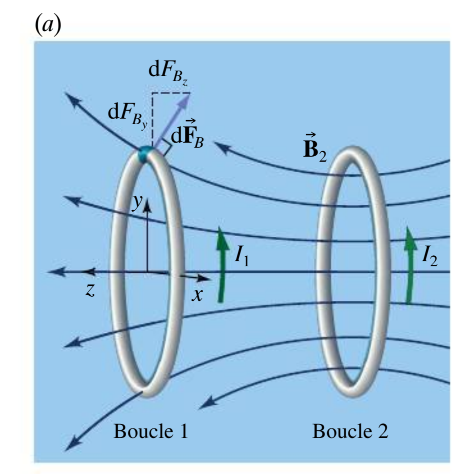
◀ **Figure 9.36**
Le détecteur ATLAS, au *Large Hadron Collider* (LHC), contient le plus grand aimant toroïdal au monde. Ses spires sont regroupées en huit « groupes » qu'on voit sur la photo. On peut juger de sa taille grâce à la personne qui se tient entre deux des « groupes », au bas de la photo. L'aimant produit un champ maximal de 3,9 T dans l'air grâce à un courant de plusieurs milliers d'ampères. (On voit ici le détecteur pendant sa construction pour que l'aimant toroïdal soit visible ; le détecteur complété est illustré à la figure 8.38*c*, p. 337.)

9.5 LA FORCE MAGNÉTIQUE ENTRE DEUX DIPÔLES MAGNÉTIQUES

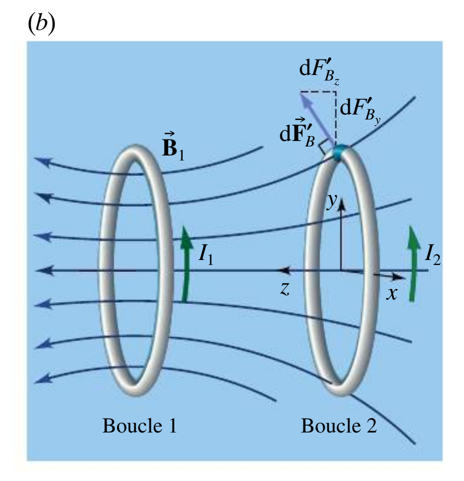
À la section 9.2, nous avons présenté une situation où les courants portés par deux conducteurs parallèles s'attirent ou se repoussent mutuellement : chacun des deux est un courant cible plongé dans le champ produit par l'autre. Nous allons maintenant appliquer la même approche pour montrer comment deux dipôles magnétiques s'attirent ou se repoussent mutuellement eux aussi.

Le cas de boucles de courant

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 9.37**

(*a*) La force magnétique s'exerçant sur l'élément de courant de la boucle 1 placée dans le champ magnétique dipolaire de la boucle 2. (*b*) La force magnétique s'exerçant sur l'élément de courant de la boucle 2 placée dans le champ magnétique dipolaire de la boucle 1.

Considérons d'abord que les deux dipôles sont des boucles de courant d'une spire chacune. Aux fins de la discussion, la boucle 1 sera d'abord considérée comme la cible et la boucle 2, comme la source. La figure 9.37*a* montre ces deux boucles, orientées selon un plan xy perpendiculaire au plan de la page. Elles sont séparées par une certaine distance et leurs axes coïncident. Un courant de même sens les parcourt. Chaque boucle produit un champ magnétique dont la configuration, présentée à la figure 9.17*b* (p. 370), est celle d'un dipôle magnétique, mais la figure 9.37*a* ne montre que les lignes du champ $\vec{\mathbf{B}}_2$ produit par la source (boucle 2).

D'après la section 8.4, nous savons que la boucle 1 va subir une force résultante donnée par $F_z = \mu_1 \frac{dB_2}{dz}$, où $\mu_1 = N_1 I_1 A_1 = I_1 A_1$ caractérise la boucle 1 et où dB_2/dz est le taux de variation du champ $\vec{\mathbf{B}}_2$ au centre de la boucle 1 (cette équation suppose que la boucle est de petite dimension). On peut obtenir dB_2/dz en dérivant par rapport à z l'équation 9.9 qui donne B_2 sur l'axe des z, mais la figure révèle facilement le signe de ce taux de variation : puisque $\vec{\mathbf{B}}_2$ a un module plus élevé à la droite de la boucle 1 qu'à sa gauche, $dB_2/dz < 0$ et $F_z < 0$. La boucle 1 subit une force orientée vers les z négatifs, c'est-à-dire vers la droite.

Nous allons chercher à comprendre l'origine de cette force d'un point de vue plus fondamental. La boucle 1, un conducteur parcouru par un courant, est plongée dans le champ $\vec{\mathbf{B}}_2$; comme tous les conducteurs plongés dans un champ magnétique, elle subit donc une force (voir la section 8.3). Comme il s'agit d'une boucle et non d'un fil rectiligne, il nous faut la subdiviser en éléments de courant, de manière à nous servir de l'équation 8.5 qui donne la force agissant sur chaque élément de longueur $d\vec{\ell}_1$: $d\vec{\mathbf{F}}_B = I_1\, d\vec{\ell}_1 \times \vec{\mathbf{B}}_2$. Même si on ne connaît pas la valeur de $\vec{\mathbf{B}}_2$ à la position d'un $d\vec{\ell}_1$ donné, on connaît au moins son orientation qualitative. On peut donc estimer l'orientation de la force magnétique sur chaque élément de courant, donc l'orientation de la force magnétique résultante s'exerçant sur toute la boucle 1. Nous verrons qualitativement qu'elle est conforme à l'équation $F_z = \mu_1 \frac{dB_2}{dz}$.

La figure 9.37*a* montre un élément $d\vec{\ell}_1$ situé juste en haut de la boucle 1 et orienté selon $-x$. À l'aide de la règle de la main droite, on obtient, étant donné l'orientation locale de $\vec{\mathbf{B}}_2$, un vecteur $d\vec{\mathbf{F}}_B$ possédant deux composantes, l'une selon $+y$ et l'autre selon $-z$. La force magnétique totale s'exerçant sur la boucle 1 correspond à la somme de toutes les contributions des éléments infinitésimaux $d\vec{\ell}_1$. Mais, comme on peut facilement s'en rendre compte à partir de la figure, la symétrie de la boucle fait en sorte que la force résultante selon y ou x est nulle : à chaque élément de courant correspond un autre élément de contribution inverse selon l'une ou l'autre des deux directions x et y. Ainsi, bien qu'il nous manque de l'information pour en connaître le module, nous pouvons déduire que la force magnétique résultante $\vec{\mathbf{F}}$ s'exerçant sur la boucle 1 sera dirigée selon $-z$, vers la boucle 2. C'est effectivement l'orientation que nous avons obtenue avec l'équation $F_z = \mu_1 \frac{dB_2}{dz}$.

Inversons maintenant les rôles : à la figure 9.37*b*, c'est la boucle 1 qui est considérée comme la source et la boucle 2, comme la cible. Seul le champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}_1$ produit par la source (boucle 1) est illustré. La force subie par la boucle 2 est telle que $F_z' = \mu_2 \frac{dB_1}{dz}$ et on voit sur la figure que $dB_1/dz > 0$ donc que la force sur la boucle 2 est orientée vers les z positifs, soit vers la gauche. On obtient le même résultat avec l'approche de la section 8.3 : un élément $d\vec{\boldsymbol{\ell}}_2$ se trouvant en haut de la boucle 2 va subir une force magnétique dont ne subsistera que la composante selon $+z$, puisque l'autre s'annulera par symétrie. Ainsi, la force magnétique résultante $\vec{\mathbf{F}}'$ correspondant à la somme de toutes les contributions infinitésimales de force est dirigée selon $+z$: la boucle 2 est attirée par la boucle 1. En somme, deux boucles parallèles parcourues par des courants de même sens *s'attirent*. On en déduit que deux dipôles $\vec{\boldsymbol{\mu}}_1$ et $\vec{\boldsymbol{\mu}}_2$ pointant dans le même sens s'attirent.

Le cas de petits barreaux aimantés

Nous allons maintenant considérer que les deux dipôles sont des barreaux aimantés. En étudiant le champ magnétique qui existe autour d'une boucle parcourue par un courant, nous avons vu qu'il était très similaire à celui qu'on détecte autour d'un petit barreau aimanté. Nous fondant sur cette similitude, nous avons affirmé à la section 8.4 que tous deux peuvent être qualifiés de dipôles magnétiques et caractérisés par un moment dipolaire magnétique $\vec{\boldsymbol{\mu}}$. On s'attend donc à ce que toutes les conclusions que nous venons d'établir pour deux boucles parcourues par des courants dans le même sens s'appliquent aussi pour deux petits aimants alignés dans le même sens. On peut se servir de cette similitude pour expliquer, quoique de manière simplifiée, pourquoi les aimants permanents comme les barreaux aimantés s'attirent ou se repoussent.

L'origine physique de cette équivalence a été présentée à la section 8.1 : le champ magnétique de tout aimant permanent découle de la présence de mouvements microscopiques de charges dans le matériau. C'est une interprétation simple de phénomènes qui sont mieux décrits par la mécanique quantique.

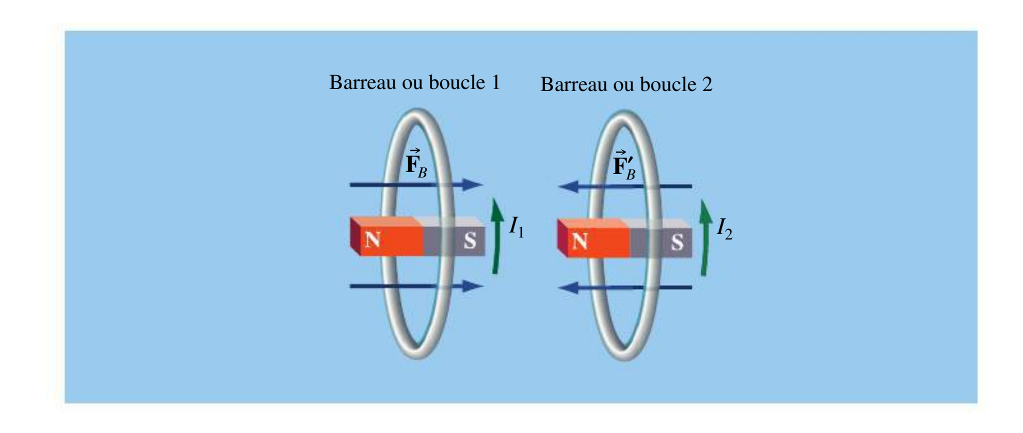
Grâce à cette interprétation simple, on peut affirmer que l'attraction observée entre deux aimants dont les pôles opposés se font face est due à un mécanisme similaire à celui que nous venons d'analyser à la figure 9.37. Le champ magnétique produit par chacun des barreaux aimantés agit sur les courants microscopiques de l'autre. Par exemple, supposons que ces courants microscopiques suivent des parcours circulaires, chacune de ces « boucles » se comportant de façon identique à celles de la figure 9.37. La force résultante découle alors de la contribution d'un grand nombre de ces boucles microscopiques. Dans la plupart des matériaux, ces boucles sont orientées au hasard et on n'observe aucune force ; mais dans un aimant permanent, elles sont majoritairement alignées dans une même direction, ce qui fait apparaître une force résultante macroscopique.

En résumé, comme le montre la figure 9.38, il n'y a pas de grande différence conceptuelle entre les mécanismes expliquant l'attraction de deux boucles parcourues par un courant, l'attraction de deux barreaux aimantés et l'attraction d'un barreau aimanté et d'une boucle parcourue par un courant. Il va de soi que si l'on inverse le sens du courant dans l'une des boucles ou l'orientation de l'aimant qui lui est équivalent, la force magnétique devient répulsive.


L'interaction entre des dipôles magnétiques est utilisée abondamment en sciences de la vie, tant dans le travail de laboratoire que dans les

applications cliniques. Par exemple, pour séparer des molécules qui sont mélangées en solution, on peut y plonger des billes magnétisables dont la surface a une affinité élevée pour une molécule en particulier. Il suffit d'extraire les billes grâce à la force magnétique après que les molécules souhaitées y aient adhéré. L'interaction entre dipôles permet aussi de contrôler à distance, au travers de la peau, les fonctions d'implants médicaux. Par exemple, un cardiostimulateur défibrillateur peut être désactivé de cette façon pendant une chirurgie. ●

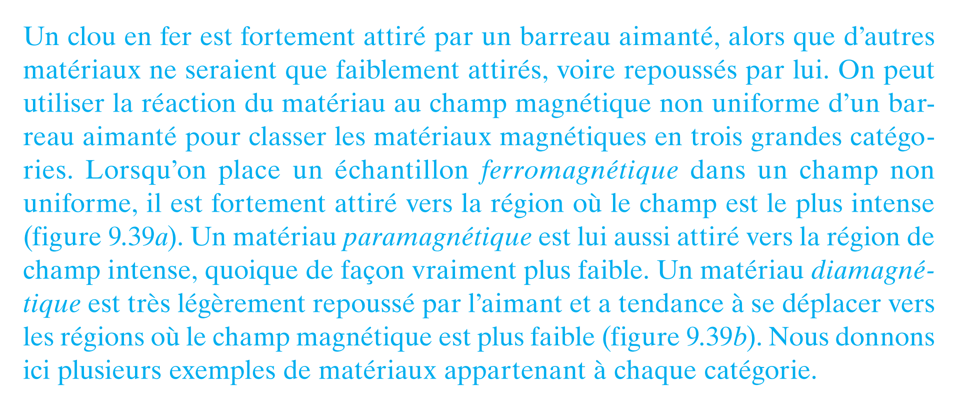
Dans la section suivante, nous décrirons davantage le comportement microscopique des matériaux utilisés pour fabriquer des aimants permanents.



▶ Figure 9.38

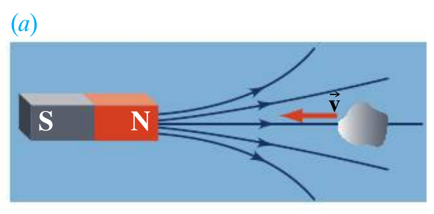
L'attraction qu'on observe entre deux boucles parcourues par un courant de même sens est tout à fait équivalente à celle qu'on observe entre deux barreaux aimantés dont les pôles opposés se font face.

9.6 LES PROPRIÉTÉS MAGNÉTIQUES DE LA MATIÈRE



Un clou en fer est fortement attiré par un barreau aimanté, alors que d'autres matériaux ne seraient que faiblement attirés, voire repoussés par lui. On peut utiliser la réaction du matériau au champ magnétique non uniforme d'un barreau aimanté pour classer les matériaux magnétiques en trois grandes catégories. Lorsqu'on place un échantillon *ferromagnétique* dans un champ non uniforme, il est fortement attiré vers la région où le champ est le plus intense (figure 9.39*a*). Un matériau *paramagnétique* est lui aussi attiré vers la région de champ intense, quoique de façon vraiment plus faible. Un matériau *diamagnétique* est très légèrement repoussé par l'aimant et a tendance à se déplacer vers les régions où le champ magnétique est plus faible (figure 9.39*b*). Nous donnons ici plusieurs exemples de matériaux appartenant à chaque catégorie.

(*a*)



(*b*)



▲ Figure 9.39

(*a*) Un matériau ferromagnétique ou paramagnétique est attiré vers un aimant. (*b*) Un matériau diamagnétique est repoussé par un aimant.

Ferromagnétiques: Fe, Ni, Co, Gd et Dy; les alliages de ces éléments et d'autres éléments, et les oxydes comme CrO_2, EuO et Fe_3O_4 (magnétite).

Paramagnétiques: Al, Cr, K, Mg, Mn et Na.

Diamagnétiques: Cu, Bi, C, Ag, Au, Pb et Zn.

Comme nous le verrons, ces propriétés magnétiques de la matière sont dues à un phénomène comparable à celui décrit aux sections 2.7 et 5.6: quand on plonge un matériau dans un champ électrique, il se *polarise* de façon à réduire le champ électrique résultant en son sein. De façon comparable, quand on plonge un matériau dans un champ magnétique, il se *magnétise* de façon à affecter (augmenter ou réduire) le champ magnétique résultant en son sein. Ainsi, lorsqu'on place un matériau dans un champ magnétique externe $\vec{\mathbf{B}}_0$, le champ résultant à l'intérieur du matériau est différent de $\vec{\mathbf{B}}_0$. Dans une situation

simple comme la plupart de celles que nous étudions, le champ $\vec{\mathbf{B}}_M$ dû au matériau lui-même est directement proportionnel à $\vec{\mathbf{B}}_0$:

$$\vec{\mathbf{B}}_M = \chi_m \vec{\mathbf{B}}_0 \tag{9.18}$$

où χ_m est la *susceptibilité magnétique*. Le champ magnétique résultant à l'intérieur du matériau est donc

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{B}} &= \vec{\mathbf{B}}_0 + \vec{\mathbf{B}}_M \\ &= (1 + \chi_m)\vec{\mathbf{B}}_0 \\ &= \kappa_m \vec{\mathbf{B}}_0\end{aligned} \tag{9.19}$$

où $\kappa_m = 1 + \chi_m$, que l'on appelle *perméabilité relative*, joue un rôle similaire à celui joué par la constante diélectrique κ (aussi appelée permittivité relative) dans l'équation $\vec{\mathbf{E}} = \vec{\mathbf{E}}_0/\kappa$. (Notez cependant l'inversion.) Les nombres χ_m et κ_m sont tous deux sans dimension.

Dans un matériau paramagnétique, le module du champ résultant $\vec{\mathbf{B}}$ est supérieur à celui de $\vec{\mathbf{B}}_0$, ce qui signifie que la susceptibilité magnétique χ_m est positive. Sa valeur est en général voisine de 10^{-5} et dépend de la température. À l'intérieur d'un matériau diamagnétique, le module du champ résultant $\vec{\mathbf{B}}$ est inférieur à celui de $\vec{\mathbf{B}}_0$, ce qui signifie que la susceptibilité est négative. La valeur de χ_m y est en général voisine de -10^{-5} et ne dépend pas de la température. La susceptibilité d'un matériau ferromagnétique dépend de la température, du module du champ extérieur B_0 et de l'histoire magnétique de l'échantillon considéré (nous verrons pourquoi plus tard). Pour ce matériau, la valeur de χ_m est énorme : en général, elle est comprise entre 10^3 et 10^5.

Les moments atomiques

Les propriétés magnétiques de la matière sont principalement associées aux mouvements des électrons. Les électrons en mouvement dans un atome établissent des courants atomiques qui ont des moments dipolaires magnétiques et produisent des champs magnétiques. Dans le modèle de Bohr semi-classique de l'atome d'hydrogène, un électron est en orbite autour d'un proton immobile. À la section 8.4 (voir l'exemple 8.10), nous avons montré que la relation entre le moment dipolaire magnétique ($\vec{\boldsymbol{\mu}}$) associé au mouvement orbital et le *moment cinétique orbital* ($\vec{\mathbf{L}}$) était la suivante :

$$\vec{\boldsymbol{\mu}} = \frac{e\vec{\mathbf{L}}}{2m}$$

Même si ce modèle atomique n'est plus accepté aujourd'hui, il se trouve que celui de la mécanique quantique prévoit quand même que les électrons aient un moment cinétique orbital et que celui-ci est relié au moment dipolaire magnétique par une équation identique à l'équation précédente. Il existe, en mécanique quantique, une règle (voir le chapitre 11 du tome 3) selon laquelle le module du moment cinétique est *quantifié*, c'est-à-dire qu'il apparaît uniquement sous forme de multiples entiers d'une unité fondamentale : $L = n\hbar = 0, \hbar, 2\hbar, \ldots$, où $\hbar = h/2\pi$, h étant la constante de Planck. En remplaçant $L = \hbar$ dans l'équation précédente, on trouve

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m} \tag{9.20}$$

Cette quantité, que l'on appelle *magnéton de Bohr*, a pour valeur $9{,}27 \times 10^{-24}$ A·m^2. Dans la plupart des substances, les orientations des moments cinétiques $\vec{\mathbf{L}}$ diffèrent d'un atome à l'autre et la valeur moyenne du moment dipolaire magnétique sur l'ensemble des atomes est donc nulle. Mais il existe toutefois une autre source microscopique de champ magnétique.

En mécanique quantique, on considère que chaque électron a un certain *moment cinétique intrinsèque*, appelé *spin*. Bien que l'image ne soit pas valable (voir la section 11.2 du tome 3), on peut imaginer l'électron tournant sur lui-même autour d'un axe interne et créant donc des courants internes. Le moment dipolaire magnétique associé au spin d'un électron est égal au magnéton de Bohr. Dans de nombreux atomes et ions, les moments cinétiques de spin sont couplés par paires de sens opposés et le moment dipolaire résultant est donc nul. Dans certains cas, un ou deux électrons ne sont pas couplés et l'atome acquiert alors un moment dipolaire permanent. Or, comme le montre l'équation 9.10, le moment dipolaire magnétique d'un dipôle source est proportionnel au champ magnétique qu'il produit. Si un atome possède un moment permanent, cela signifie qu'*il produit un champ magnétique permanent*. Nous verrons donc maintenant comment la présence ou l'absence d'un tel moment dipolaire permanent, ainsi que le comportement collectif des atomes, nous permet d'expliquer les propriétés magnétiques de la matière.

Le diamagnétisme

Dans un matériau diamagnétique, les atomes n'ont pas de moment dipolaire magnétique permanent. Lorsqu'on applique un champ magnétique extérieur $\vec{\mathbf{B}}_0$, le moment orbital des électrons est modifié de telle sorte que la variation de moment dipolaire magnétique est dirigée dans le sens opposé au champ externe. Il en résulte que le module du champ résultant $\vec{\mathbf{B}}$ est inférieur à celui du champ extérieur $\vec{\mathbf{B}}_0$. Ce comportement est le seul possible : comme les atomes n'ont pas de moment dipolaire magnétique permanent, il serait impossible de leur en induire un qui renforce le champ externe, car le champ plus élevé accentuerait à nouveau cet effet, qui accentuerait à nouveau le champ et ainsi de suite. Une telle situation serait absurde, car elle permettrait de faire apparaître un champ considérable pratiquement sans fournir d'énergie. L'effet induit doit donc nécessairement *nuire* à la cause qui lui a donné naissance. En l'absence de mécanisme pour dissiper l'énergie, la variation des courants d'électrons persiste même après que le champ extérieur ait atteint une valeur constante. L'effet diamagnétique, qui est présent dans tous les matériaux, est très faible et il est souvent masqué par les effets paramagnétique ou ferromagnétique. Un matériau supraconducteur est un matériau diamagnétique parfait ; sa susceptibilité est $\chi_m = -1$. Autrement dit, le champ extérieur est totalement exclu du supraconducteur.

Le paramagnétisme

Dans un matériau paramagnétique, les atomes ou les ions ont des moments dipolaires magnétiques permanents, mais les interactions entre ces dipôles sont faibles et leurs orientations sont aléatoires en l'absence de champ magnétique extérieur. Lorsqu'on applique un champ extérieur $\vec{\mathbf{B}}_0$, les dipôles ont tendance à s'aligner suivant l'orientation du champ, mais l'agitation thermique s'oppose à ce processus d'alignement. Par conséquent, l'alignement n'est pas complet à moins que le module B_0 du champ extérieur ne soit très élevé et que la température soit très basse. L'alignement partiel des moments dipolaires vient renforcer le champ extérieur ; ainsi, le module B du champ résultant est supérieur à B_0.

(Notons que ce comportement est *contraire* à celui des dipôles électriques dans un diélectrique, où l'alignement des dipôles donne un champ électrique intérieur résultant plus faible.)

Les énergies associées au champ magnétique et à l'agitation thermique ont environ les valeurs suivantes. L'énergie requise pour faire tourner un dipôle de 180° est égale à $2\mu B_0$. Dans un champ externe de 1 T et pour $\mu = \mu_B = 9{,}27 \times 10^{-24}$ A·m^2, $2\mu B_0 \approx 1{,}9 \times 10^{-23}$ J. L'énergie moyenne associée à l'agitation thermique est voisine de $kT \approx 6 \times 10^{-21}$ J à 300 K. L'énergie thermique est donc 200 fois plus grande. Il faut diminuer sensiblement la température pour qu'un bon alignement des dipôles puisse se maintenir malgré l'agitation thermique.

La figure 9.40 représente l'aimantation M, définie comme le moment dipolaire magnétique par unité de volume, en fonction du rapport du module du champ extérieur B_0 sur la température absolue T. La *loi de Curie* donne une bonne description de la première partie linéaire de la courbe :

$$M = C\left(\frac{B_0}{T}\right) \qquad (9.21)$$

où C est une constante. Soulignons que, même pour un champ externe élevé de 1 T et une température de 300 K, la courbe réelle s'ajuste bien à l'approximation linéaire. Au fur et à mesure que le module du champ extérieur augmente ou que la température baisse, l'aimantation augmente jusqu'à atteindre sa valeur à saturation, M_S, qui correspond à l'alignement parfait de tous les dipôles sur le champ. Sur la figure 9.40, cet alignement se produit pour $B_0/T \approx 4$, ce qui correspond à une température de ≈0,25 K pour un champ de 1 T.

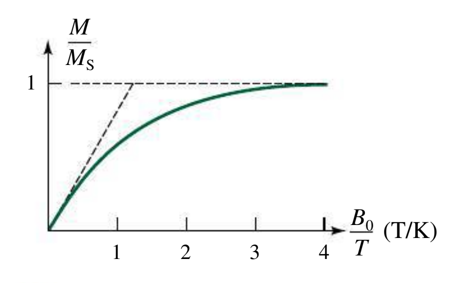


Figure 9.40

L'aimantation d'un échantillon paramagnétique en fonction de B_0/T, où B_0 est le module du champ magnétique extérieur et T est la température absolue.

Le ferromagnétisme

Dans un matériau ferromagnétique, chaque atome a un moment dipolaire magnétique provenant du spin d'un ou de deux électrons. Même en l'absence de champ magnétique externe, les moments des atomes voisins ont tendance à s'aligner parallèlement l'un à l'autre par une interaction que seule la mécanique quantique peut expliquer. À l'intérieur de petits *domaines* magnétiques mesurant environ 1 mm, cet alignement est parfait. Chaque domaine contient environ 10^{16} atomes. Bien que l'alignement soit parfait à l'intérieur de chaque domaine, les domaines ont des orientations aléatoires (figure 9.41). Ils sont séparés par des parois de quelques atomes d'épaisseur dans lesquelles la direction de l'aimantation varie progressivement entre les orientations des deux domaines. Si l'on saupoudre des particules ferromagnétiques à la surface, on peut observer les parois des domaines au microscope (figure 9.42). La limaille a tendance à s'accumuler aux parois, là où le champ est très peu uniforme.

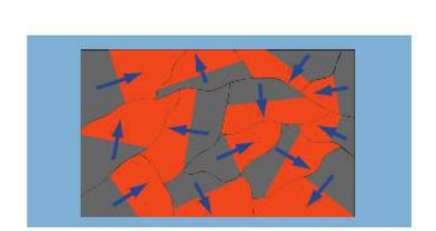


Figure 9.41

Les domaines dans un échantillon non aimanté ont une orientation aléatoire.

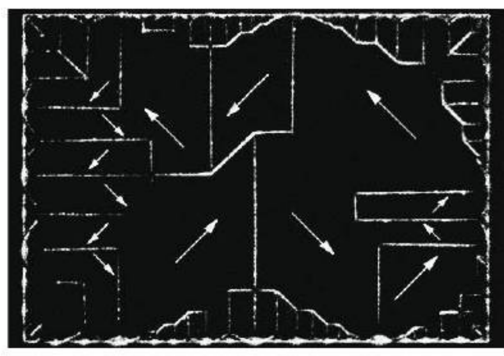
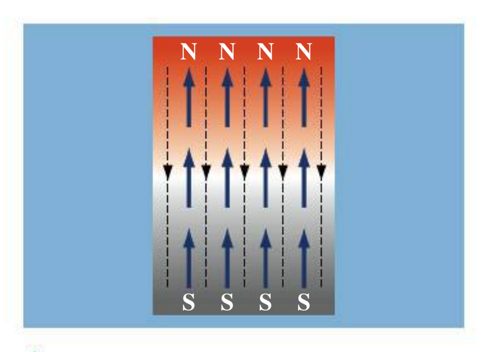


Figure 9.42

Les parois des domaines mises en évidence par de la limaille de fer.

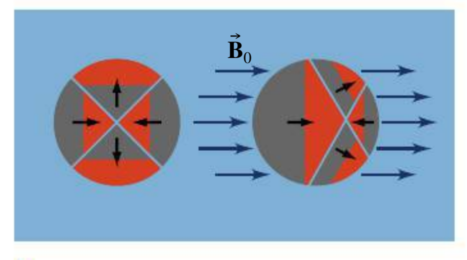
On peut comprendre qualitativement pourquoi se forment des domaines en considérant les énergies mises en jeu. Un dipôle quelconque est plongé dans le champ produit par tous les autres, considérés comme des sources. Supposons que tous ces dipôles sources du matériau soient alignés parfaitement (figure 9.43). Les extrémités des domaines vont alors être uniquement constituées de pôles nord ou sud. Le champ créé par ces pôles sera orienté du pôle nord vers le pôle sud. Le dipôle cible se trouve donc aligné dans la direction opposée au champ produit par ses voisins, ce qui correspond à l'énergie la plus élevée. Et on peut appliquer le même raisonnement à chaque dipôle, plongé dans le champ produit par ses voisins. L'interaction spin-spin entre atomes diminue l'énergie des dipôles adjacents, mais, au fur et à mesure que les domaines grandissent, l'énergie magnétique « globale » dont nous venons de parler augmente. Les dimensions et l'orientation aléatoire des domaines correspondent à la situation où l'énergie *totale* du système est minimale.

Lorsqu'on applique un champ magnétique extérieur $\vec{\mathbf{B}}_0$, les domaines réagissent de deux manières. Dans un champ faible, les domaines dont les moments sont alignés parallèlement à $\vec{\mathbf{B}}_0$ grandissent aux dépens des autres. Dans un champ plus élevé, les domaines subissent également une rotation qui les fait s'aligner sur le champ extérieur. Les deux effets sont représentés à la figure 9.44. Quand on augmente $\vec{\mathbf{B}}_0$, le matériau atteint éventuellement une aimantation de saturation M_s.



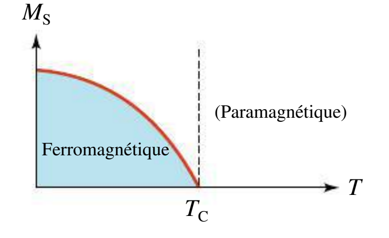
▲ Figure 9.43

Si tous les domaines étaient alignés parfaitement, comme sur la figure, alors un moment dipolaire magnétique quelconque serait plongé dans le champ magnétique produit par tous les autres, dirigé des pôles nord à une extrémité vers les pôles sud à l'autre. Cette orientation des domaines est telle que l'énergie magnétique « globale » est maximale. Ce n'est pas une configuration stable.



▲ Figure 9.44

Lorsqu'on applique un champ magnétique extérieur $\vec{\mathbf{B}}_0$, les domaines alignés parallèlement à $\vec{\mathbf{B}}_0$ deviennent plus étendus aux dépens des autres. Les domaines ont également tendance à s'aligner sur le champ.



▲ Figure 9.45

Au fur et à mesure que la température d'un matériau ferromagnétique s'élève, son aimantation de saturation diminue. Au-dessus du point de Curie, l'échantillon devient paramagnétique.

On peut détruire l'aimantation d'un aimant permanent en le frappant vivement, ce qui perturbe l'alignement des domaines. De même, si l'on augmente la température, l'aimantation de saturation diminue. Au-dessus de la *température de Curie* T_C, le matériau cesse d'être ferromagnétique et devient paramagnétique (figure 9.45). Nous donnons ici les températures de Curie de cinq éléments ferromagnétiques : Fe (1043 K), Co (1404 K), Ni (631 K), Gd (289 K), Dy (85 K).

L'hystérésis

Étudions maintenant ce qui se produit lorsqu'on place dans un champ magnétique extérieur $\vec{\mathbf{B}}_0 = B_{0x}\vec{\mathbf{i}}$ un matériau ferromagnétique initialement non aimanté. À la figure 9.46, nous comparons la composante selon x du champ résultant $\vec{\mathbf{B}}$ à celle de $\vec{\mathbf{B}}_0$. (Notez que l'échelle de B_x est 1000 fois plus grande que celle de B_{0x}.) Au fur et à mesure que B_{0x} augmente à partir de zéro, B_x

augmente le long de la courbe *ab*. Après la première pente raide de la courbe, B_x s'approche de la valeur de saturation B_S (2,1 T pour le fer, 1,6 T pour le permalloy) relativement lentement. Lorsque B_{0x} décroît, la composante B_x ne revient pas sur la courbe initiale *ba*, mais suit *bcd*. Lorsque B_{0x} s'annule à nouveau, il reste une valeur rémanente B_R au point *c* produit par l'aimantation de l'échantillon. C'est ce qui caractérise un aimant permanent. Une fois que la plupart des domaines ont tourné pour s'aligner sur le champ magnétique extérieur, ils ne reprennent pas leur orientation initiale. Leur réponse est «en retard» par rapport à la variation de B_{0x}. Ce phénomène de «retard» est appelé *hystérésis*. Lorsque le sens de $\vec{\mathbf{B}}_0$ s'inverse, B_x atteint la valeur zéro au point *d*. La valeur B_C, correspondant au champ coercitif, nous indique dans quelle mesure il est difficile de détruire l'aimantation d'un échantillon. Alors que B_{0x} devient de plus en plus négatif, les domaines commencent à s'aligner dans la direction opposée, jusqu'au point *e*. Si B_{0x} revient à zéro puis commence à augmenter dans la direction initiale, on obtient la partie *efb* de la courbe. L'aire de la boucle d'hystérésis *bdefb* indique le travail nécessaire pour accomplir un cycle complet. Si le champ extérieur est créé par un courant alternatif, les inversions du champ entraînent une production d'énergie thermique.

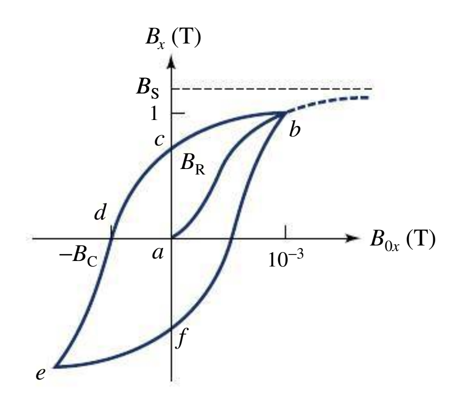


Figure 9.46

Une courbe d'hystérésis. Un champ magnétique extérieur $\vec{\mathbf{B}}_0$ est appliqué selon x : la composante du champ résultant B_x est représentée comme une fonction de la composante B_0x. Notez la différence des échelles utilisées.

Soulignons que la perméabilité relative, $\kappa_m = B/B_0$, n'est pas constante, mais dépend à la fois de B_0 et de l'histoire préalable de l'échantillon. Au champ de saturation, $\kappa_m = 5000$ pour le fer, alors que $\kappa_m = 25\,000$ pour le permalloy.

Les matériaux pour lesquels B_C est plus grand sont appelés matériaux magnétiques «durs» et leur boucle d'hystérésis ressemble à celle de la figure 9.47*a*. Ces matériaux sont utilisés pour la fabrication des aimants permanents dans les haut-parleurs. Les matériaux pour lesquels B_C est faible, comme le fer, sont des matériaux magnétiques «doux» dont la boucle d'hystérésis ressemble à celle de la figure 9.47*b*. Le fait que l'aire de leur boucle soit plus petite signifie que l'énergie dissipée sous forme de chaleur est réduite. Le fer est utilisé dans les transformateurs, les électroaimants, les rubans magnétiques et les dispositifs antivol des bibliothèques.

Pour démagnétiser un objet, il faut le soumettre à plusieurs cycles d'hystérésis en faisant décroître progressivement le champ extérieur (figure 9.48). On produit un champ magnétique oscillant en faisant passer un courant alternatif dans une bobine. On place d'abord la bobine près de l'objet aimanté, puis on l'éloigne progressivement.

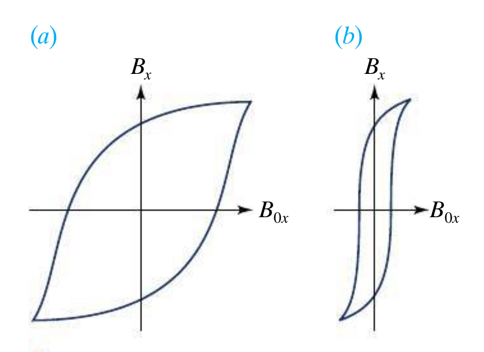


Figure 9.47

(*a*) Un matériau magnétique «dur» utilisé pour la fabrication des aimants permanents. (*b*) Un matériau magnétique «doux» utilisé pour la fabrication des électroaimants et pour l'enregistrement magnétique.

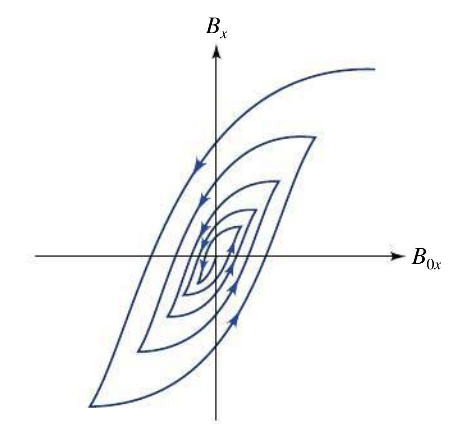


Figure 9.48

Pour démagnétiser un échantillon, on doit le soumettre à plusieurs cycles d'hystérésis successifs tout en diminuant le module du champ magnétique extérieur.

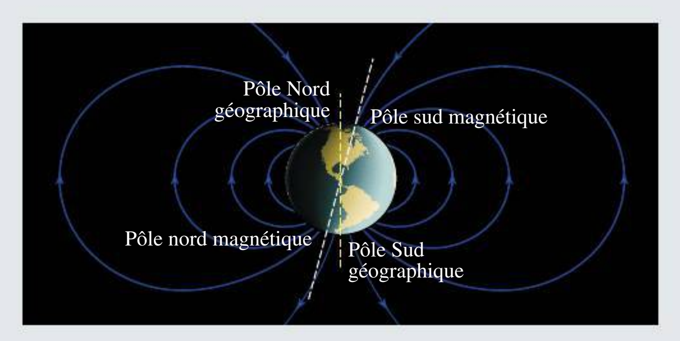
SUJET **CONNEXE**

Le champ magnétique terrestre

Les effets du champ magnétique terrestre sont connus depuis longtemps, mais on croyait au IIe siècle que l'aiguille d'une boussole s'orientait vers l'étoile polaire sous l'influence directe de cette étoile. Durant un de ses voyages, en 1492, Christophe Colomb (vers 1451-1506) s'aperçut que l'aiguille ne pointait pas vers l'étoile polaire et ses marins furent affolés à l'idée d'avoir atteint une région où les lois de la nature étaient différentes. Il fallut attendre jusqu'en 1544 pour commencer à comprendre réellement le comportement de la boussole. Cette année-là, on découvrit que le pôle nord d'une aiguille initialement en équilibre sur un axe de rotation pointe vers le bas par rapport à l'horizontale dès que l'aiguille est aimantée. En 1600, William Gilbert suggéra, à juste titre, que la Terre est elle-même un aimant gigantesque. Dans ce sujet connexe, nous décrirons le champ magnétique terrestre, ses variations locales, son évolution dans le temps, la façon dont il est produit et ses effets sur l'espace qui entoure notre planète.

La Terre, presque un dipôle magnétique

Le champ magnétique près de la surface de la Terre est essentiellement celui d'un dipôle magnétique (figure 9.49). Le module du champ à la surface varie de 0,3 G à 0,6 G. L'orientation du champ en un point donné de la surface est déterminée par l'inclinaison et la déclinaison. L'*inclinaison* est l'angle que fait le champ avec le plan horizontal local. La *déclinaison* est l'angle compris entre la composante horizontale du champ et le Nord géographique. Les points où l'inclinaison est égale à ±90° sont appelés pôles d'inclinaison. Plusieurs points de la surface terrestre vérifient cette condition. Le lieu des points d'inclinaison nulle (où le champ est horizontal) est appelé équateur d'inclinaison.



▲ **Figure 9.49**

Le champ magnétique terrestre correspond essentiellement au champ d'un dipôle.

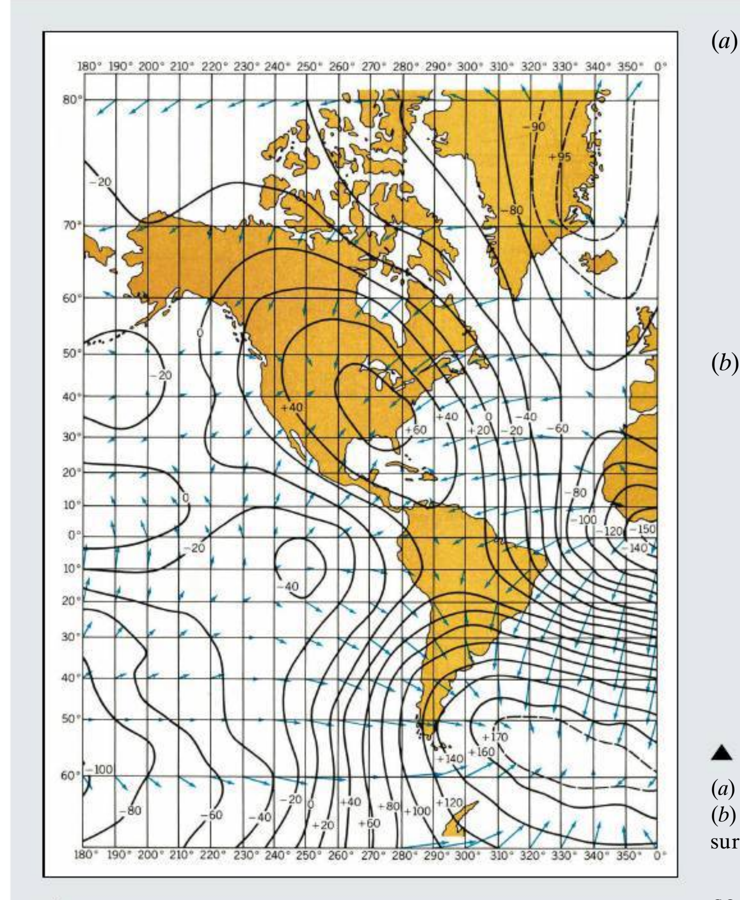
Si on représente le champ terrestre par celui d'un dipôle parfait, on se rapproche le plus des mesures en imaginant que ce dipôle a un moment dipolaire magnétique de 8×10^{22} A·m^2, qu'il se trouve à 400 km environ du centre de la Terre (6 % du rayon terrestre) et que son axe fait un angle de 11,5° avec l'axe de rotation de la Terre. Les pôles magnétiques nord et sud sont situés sur l'axe de ce dipôle fictif. Le pôle magnétique situé dans l'hémisphère Nord se trouve à environ 78,5° N 100° O, au large de l'île Bathurst dans l'Arctique canadien.

On observe toutefois des écarts, en moyenne de 5 %, entre le champ mesuré et celui du dipôle fictif que nous venons de décrire. Ces anomalies, appelées *champ non dipolaire*, peuvent être localement beaucoup plus grandes. Les gisements de minerais peuvent produire des variations de près de 10^{-4} G. La figure 9.50 représente le champ non dipolaire, obtenu à partir de la différence entre le champ mesuré et le champ théorique dipolaire. Les flèches représentent la composante horizontale et les courbes correspondent à des valeurs précises de la composante verticale en milligauss. Pour qu'elle soit précise, toute lecture effectuée à la boussole doit être corrigée à l'aide d'une telle carte. On peut représenter le champ magnétique terrestre avec un meilleur modèle qui combine le dipôle principal et environ huit dipôles orientés radialement et de moments magnétiques divers.

La variation du champ

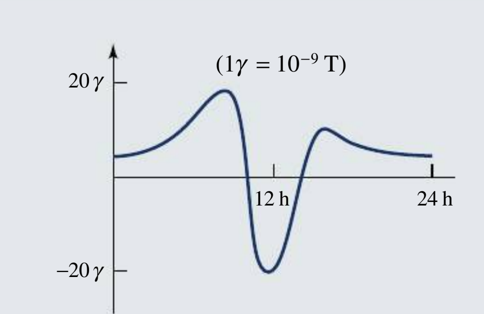
Le champ magnétique terrestre n'est pas constant dans le temps. Les composantes de sa variation ont des échelles de temps allant de la minute à quelques millions d'années. Les variations à court terme correspondent à des perturbations provoquées par le *vent solaire* (voir plus bas). Au cours d'une journée, la composante horizontale du champ en un point donné peut varier comme le montre la figure 9.51*a*. De telles variations sont causées par des courants dans l'ionosphère et dans la magnétosphère (voir plus bas). Les « orages magnétiques », qui durent quelques jours, sont provoqués par les taches solaires et entraînent des perturbations dans les radiocommunications.

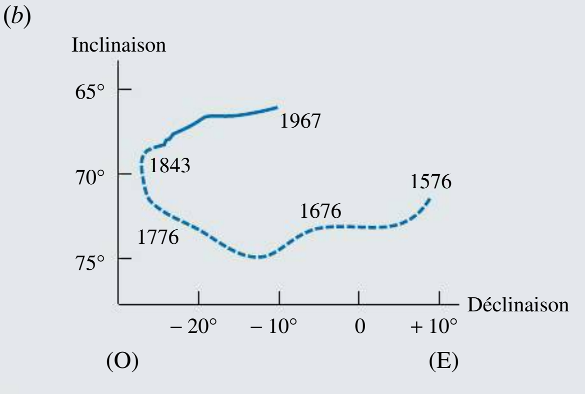
En plus de changer de forme, les composantes du champ non dipolaire ont tendance à dériver vers l'ouest à raison d'environ 0,2° par an, bien que certaines composantes dérivent vers l'est. C'est pourquoi les cartes mondiales du champ doivent être dressées à quelques années



▲ **Figure 9.50**

La contribution non dipolaire au champ magnétique terrestre. Les flèches représentent la composante horizontale et les courbes correspondent à des valeurs de la composante verticale.





▲ **Figure 9.51**

(*a*) Le champ magnétique varie au cours de la journée.
(*b*) La variation de la déclinaison et de l'inclinaison à Londres sur plusieurs siècles.

d'intervalle. Les mesures effectuées par satellite permettent maintenant d'accélérer la compilation des données.

À partir de mesures effectuées à Londres entre 1580 et 1634, le cartographe Henry Gillibrand découvrit que la déclinaison à cet endroit avait varié progressivement. La figure 9.51*b* représente les données recueillies au cours des derniers siècles. Des mesures faites régulièrement entre 1835 et 1955 montrent que le moment dipolaire magnétique de la Terre a diminué, passant d'environ $8{,}5 \times 10^{22}$ A·m^2 à 8×10^{22} A·m^2. Si le taux actuel de diminution (0,05 % par an) devait se maintenir, le champ du dipôle disparaîtrait (ou passerait momentanément par une valeur nulle) dans à peu près 2000 ans. (Les mesures les plus récentes effectuées par satellite révèlent un taux accéléré de 0,09 %, ce qui voudrait dire que le champ dipolaire pourrait devenir nul dans 1200 ans.)

On peut déterminer l'évolution du champ magnétique terrestre sur une plus longue période grâce à des objets retrouvés dans des sites archéologiques. En effet, l'argile et les roches contiennent du fer sous forme de minéraux comme la magnétite. Lorsque ces matériaux sont chauffés puis refroidis en présence d'un champ extérieur comme le champ terrestre, ils acquièrent une « aimantation rémanente thermique » qui peut nous renseigner sur l'histoire du champ terrestre. Les anciennes poteries ou les fours retrouvés dans des sites archéologiques ont en effet conservé l'empreinte du champ. Si elles n'ont pas été déplacées, les briques des fours peuvent nous renseigner sur le module et sur l'orientation du champ à l'époque où le four était en fonction.

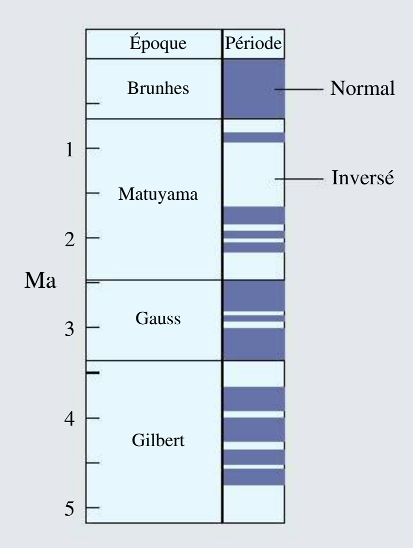
Les données archéologiques portant sur quelques milliers d'années montrent que le pôle nord magnétique s'écarte jusqu'à 20° du pôle géographique. Néanmoins, sa position moyenne sur un millier d'années paraît coïncider avec le pôle géographique.

On peut également déterminer l'évolution du champ terrestre sur une échelle de plusieurs millions d'années (paléomagnétisme), grâce aux coulées de lave volcanique, aux roches sédimentaires et aux roches ignées qui conservent également l'empreinte du champ. En plus de l'aimantation rémanente thermique citée plus haut, les roches sédimentaires peuvent acquérir une aimantation de la manière suivante. Les petits grains (10 μm) qui se déposent en présence du champ terrestre s'orientent parallèlement aux lignes de champ. Lorsqu'ils sont comprimés par la suite, ils conservent cette orientation. Les données recueillies dans le monde entier



montrent que le sens du champ dipolaire principal s'est inversé plusieurs fois.

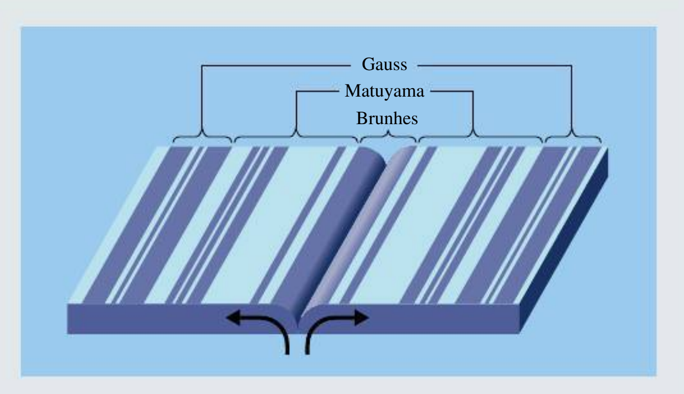
La figure 9.52 représente les inversions du champ au cours des derniers cinq millions d'années. Chaque *époque*, qui dure à peu près un million d'années, est caractérisée par un sens relativement stable, interrompu par de brèves *périodes* d'inversion (10^4 à 10^5 années). Le passage d'un sens au sens opposé dure environ 5000 ans. Au lieu de tourner de manière continue d'un sens à l'autre, le champ dipolaire principal s'annule progressivement (en laissant probablement un champ non dipolaire), puis augmente à nouveau dans le sens opposé. Les mesures remontant à 80 millions d'années ne révèlent aucune préférence pour l'un ou l'autre sens, bien qu'on observe une tendance nette du champ à s'aligner sur l'axe de rotation de la Terre.



▲ **Figure 9.52**

Les inversions du champ magnétique terrestre sur une période de plusieurs millions d'années.

Les relevés magnétiques des fonds marins viennent corroborer les renseignements apportés par les roches. On observe en effet au fond de la mer des bandes relativement droites aimantées selon des sens opposés. La configuration qui est représentée à la figure 9.53 est symétrique par rapport à une droite centrale. Lorsque des matériaux chauds provenant des profondeurs de la Terre arrivent à la surface, ils se refroidissent et acquièrent une aimantation rémanente thermique parallèle au champ existant. L'alternance des sens d'aimantation des bandes correspond aux inversions du champ terrestre (les dates concordent avec les dates déduites de l'examen des laves volcaniques). Cette configuration a d'ailleurs fourni une confirmation spectaculaire de la dérive des continents en montrant que le fond de l'océan progresse à raison de 2,5 cm/an à peu près.

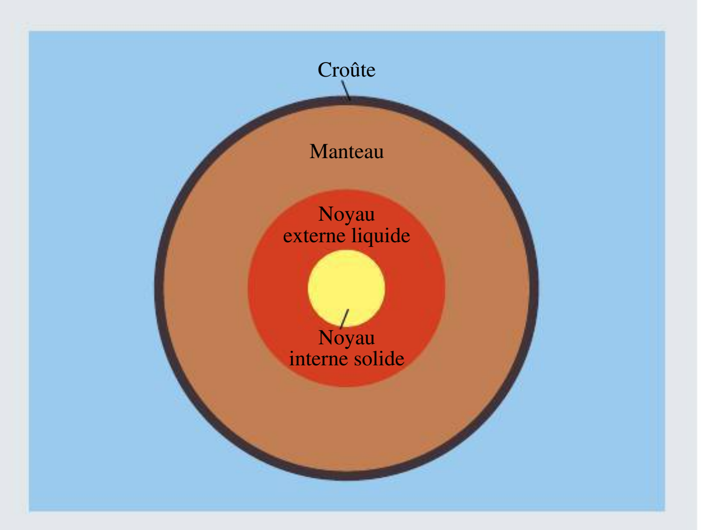


▲ **Figure 9.53**

Les roches volcaniques qu'on trouve au fond de la mer sont disposées en bandes symétriques d'aimantation opposée. Cette observation confirme l'hypothèse selon laquelle le champ magnétique de la Terre a changé de sens alors que le fond de l'océan se déplaçait.

La source du champ terrestre

Comment la Terre produit-elle un champ magnétique ? Elle ne peut pas être un aimant permanent ordinaire, puisque la température du noyau est suffisamment élevée pour détruire tout magnétisme comme celui des pierres de magnétite. Le fait que les pôles aient fortement tendance à s'aligner sur l'axe de rotation indique que la rotation de la Terre intervient dans la production du champ. On admet en général que le champ magnétique terrestre est produit par des courants dans la partie liquide externe du noyau (figure 9.54). Cette région s'étend entre 1000 km et 3000 km du centre de la Terre. Par ailleurs, l'existence d'un champ non dipolaire montre que les mouvements des fluides sont complexes. En plus du mouvement de rotation, il existe des



▲ **Figure 9.54**

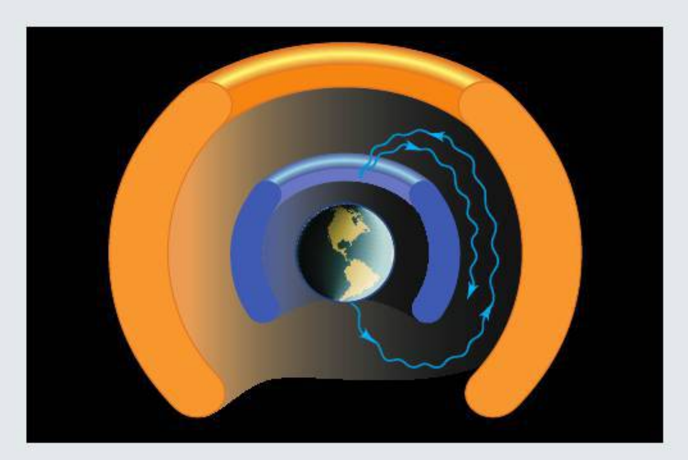
Le champ magnétique terrestre est produit par des courants dans le noyau externe liquide. La température y est plus élevée que celle à laquelle peut exister une aimantation permanente (comme dans un barreau aimanté).

courants de convection radiaux créés par la différence de température entre le noyau interne chaud et le manteau plus froid situé au-dessus du liquide. On ne connaît pas avec précision le mécanisme par lequel ces courants sont créés. Le champ à l'intérieur du noyau liquide est intense (500 G) et de forme complexe. Le champ dipolaire prédominant observé à la surface n'en représente qu'une petite portion qui parvient à «fuir» à travers le manteau. Une faible instabilité, associée par exemple à la rotation ou à une interaction entre noyau et manteau, peut déclencher une inversion du champ. Il a été également suggéré que les pluies de météorites et l'activité volcanique peuvent déclencher ces inversions.

Les effets du champ magnétique aux environs de la Terre

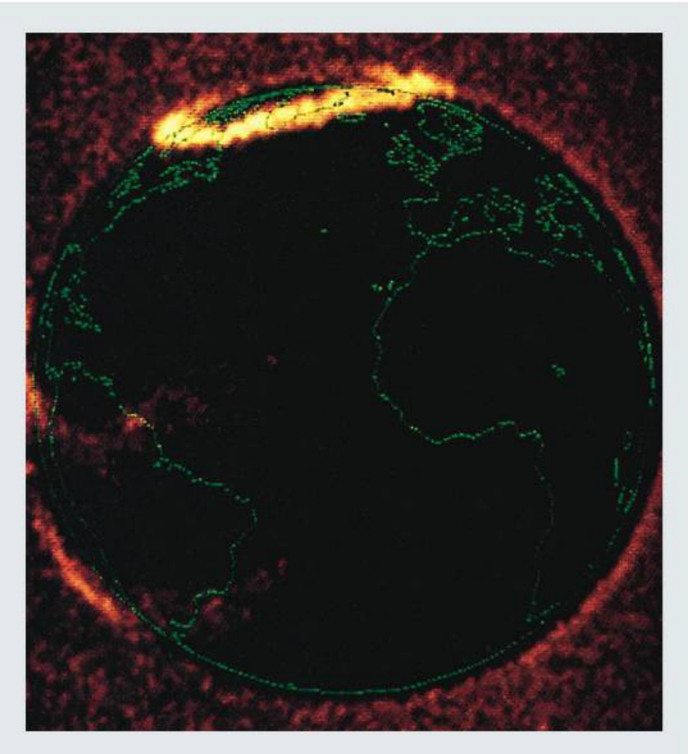
Nous allons maintenant voir que le champ magnétique confine plusieurs particules chargées et, en particulier, nous protège des particules chargées de haute énergie émises par le Soleil.

Lorsque le premier satellite américain, *Explorer I*, fut lancé en janvier 1958, il permit de déceler un flux de particules anormalement élevé. Les données recueillies ultérieurement par d'autres satellites ont permis de découvrir deux ceintures de particules chargées autour de la Terre (figure 9.55). Ce sont les ceintures de Van Allen, qui portent le nom du physicien qui les a découvertes ; elles sont essentiellement composées d'électrons et de protons piégés dans le champ magnétique terrestre (voir la figure 8.30, p. 329). Ces zones annulaires ne sont pas aussi bien définies que sur la figure ; en réalité, le plasma s'étend jusqu'à 40 000 km de la Terre, soit plus de six rayons terrestres. La ceinture intérieure est surtout constituée de protons dont le nombre reste constant, alors que la ceinture extérieure est formée d'un nombre variable d'électrons.



▲ **Figure 9.55**

Les ceintures de rayonnement de Van Allen contiennent des particules chargées piégées dans le champ magnétique terrestre.



Représentation d'une aurore boréale obtenue par un satellite situé à une distance d'environ trois fois le rayon de la Terre. Les longueurs d'onde mesurées sont les raies de 130,4 nm et 135,6 nm émises par l'oxygène, auxquelles on a fait correspondre des couleurs sur l'image. L'aurore observée résulte de l'interaction des électrons contenus dans le vent solaire avec les atomes de l'ionosphère. Le mouvement des électrons est déterminé de façon complexe par le champ magnétique terrestre. (Suggestion de lecture sur le sujet : S.I. Akasofu, «The Dynamic Aurora», *Scientific American*, mai 1989.)

Comme nous l'avons vu à la section 8.5, une particule chargée en mouvement dans un champ magnétique non uniforme décrit une spirale dont le pas diminue progressivement jusqu'à ce que la direction du mouvement s'inverse. Les particules des ceintures de Van Allen mettent entre 0,25 s et 1 s environ à faire la navette entre leurs points de réflexion. Certaines des particules piégées s'échappent au voisinage des pôles et donnent lieu au phénomène des aurores boréales. La fuite de ces particules de haute énergie peut également expliquer les températures élevées observées dans la haute atmosphère. Quant à la source des particules, elle n'est pas bien connue. Les particules de la ceinture intérieure pourraient provenir de la désintégration des neutrons qui ont été produits dans la haute atmosphère par les rayons cosmiques. Celles de la ceinture extérieure pourraient se renouveler grâce au vent solaire (voir plus bas).

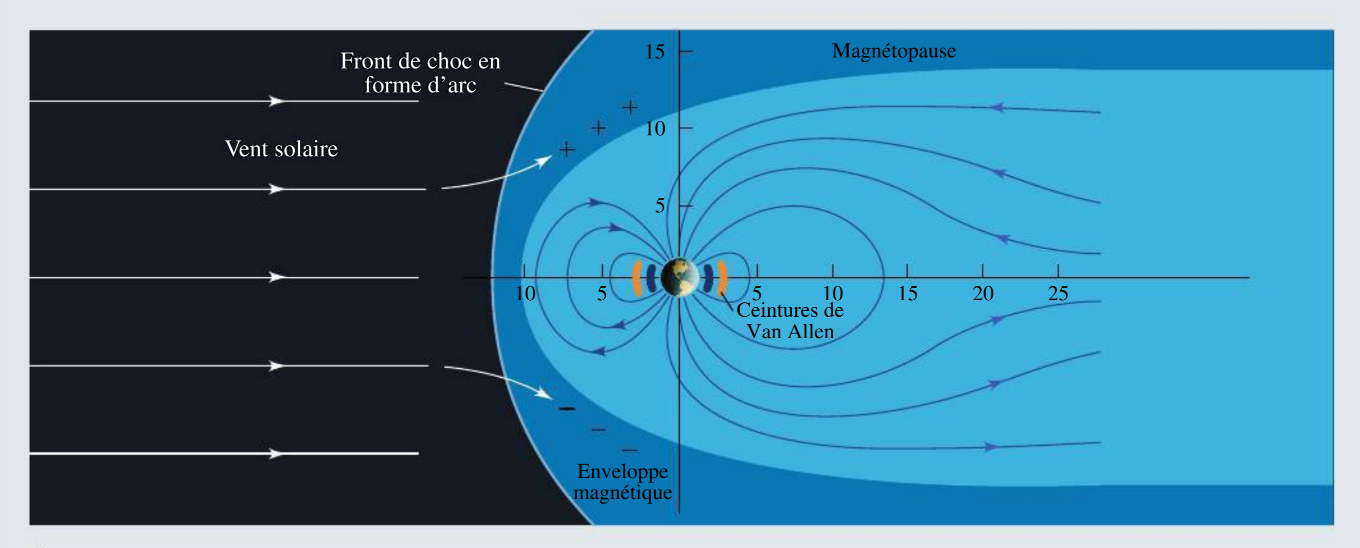
Les observations faites par satellite nous ont permis de découvrir que le champ dipolaire terrestre comporte de nombreuses distorsions. Un flux de protons et d'électrons émis par le Soleil bombarde la Terre en permanence. Ce



vent solaire est un plasma neutre et chaud ($T \approx 5 \times 10^5$ K) dont la densité est voisine de 5 particules/cm^3. L'interaction entre le vent solaire et le champ terrestre entraîne une compression du champ du côté de la planète qui est éclairé par le Soleil. Le mécanisme en cause est le suivant. Lorsque les particules pénètrent dans le champ terrestre, elles sont déviées d'un côté ou de l'autre (figure 9.56). Les champs magnétiques créés par les particules sont opposés au champ terrestre d'un côté de la trajectoire et sont de même sens de l'autre côté. L'effet net confine le champ terrestre dans la *magnétosphère*. La frontière entre le vent solaire et le champ est appelée *magnétopause*. À son extrémité, la magnétosphère s'étend jusqu'à plus de deux millions de kilomètres du côté non éclairé. Soulignons que les lignes du champ sont parallèles et de sens opposés de chaque côté du plan de symétrie.

La vitesse du vent solaire (400 km/s) par rapport à la Terre est supérieure à celle des ondes sonores qui peuvent s'y propager. Le vent est donc supersonique et il forme un front de choc en forme d'arc de près de 10 km de large lorsqu'il rencontre le champ terrestre. Entre la magnétopause et ce front se trouve une *enveloppe magnétique* (dont l'épaisseur est d'environ quatre fois le rayon de la Terre) dans laquelle l'intensité du champ vaut à peu près 25×10^{-9} T.

Après avoir confirmé l'existence des inversions du champ magnétique terrestre, on suggéra qu'elles coïncidaient avec des périodes de bouleversements importants. Lorsque le champ dipolaire s'annule, les particules cosmiques *ne sont plus déviées ni capturées par le champ*. Elles peuvent alors frapper la Terre et provoquer des mutations radicales chez tous les organismes vivants. On dispose de preuves statistiques selon lesquelles l'extinction de certaines espèces coïncide avec des inversions du champ, mais cette question reste controversée. Les rayons cosmiques, par exemple, interagissent fortement avec l'atmosphère, ce qui signifie que tous les effets observés à la surface sont, au mieux, associés avec des particules secondaires produites par désintégration ou par des collisions. Il existe peut-être aussi une corrélation entre la température de la Terre et les variations d'intensité du champ au cours des 10 000 dernières années. Si ces corrélations s'étendent à des dizaines de millions d'années, il se peut qu'elles jouent un rôle dans les corrélations entre l'évolution de la vie et les inversions du champ.



▲ **Figure 9.56**

Le champ magnétique terrestre observé à grande échelle est très différent de celui d'un dipôle.
La déformation est créée par le « vent solaire », qui est un flux de particules chargées émanant du Soleil.



RÉSUMÉ

Le module du champ magnétique à une distance R d'un fil infini parcouru par un courant I est

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \qquad (9.1)$$

Les lignes de champ sont circulaires et le sens du champ est donné par la règle de la main droite.

Le module de la force magnétique par unité de longueur entre deux conducteurs parallèles parcourus par les courants I_1 et I_2 et séparés d'une distance d est

$$\frac{F_B}{\ell} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \tag{9.2}$$

La force est attractive si les courants vont dans le même sens.

Selon la loi de Biot-Savart, le module du champ magnétique $d\vec{\mathbf{B}}$ produit par un élément de courant $I\,d\ell$ est donné par

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\,d\ell\,\sin\theta}{r^2} \tag{9.6}$$

où r est la distance entre l'élément de courant et le point où on calcule le champ et θ est l'angle entre la direction du courant et le segment allant de l'élément de courant au point où on calcule le champ. Le sens de $d\vec{\mathbf{B}}$ est donné par la règle de la main droite.

Le module du champ magnétique au centre d'une boucle de fil de rayon a parcourue par un courant I est

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2a} \tag{9.11a}$$

Le module du champ magnétique sur l'axe d'un long solénoïde (infini) est

$$B = \mu_0 nI \tag{9.13}$$

où $n = N/\ell$ est le nombre de spires par unité de longueur.

Selon le théorème d'Ampère, l'intégrale de la quantité $\vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$ sur un parcours fermé est fonction du courant traversant la surface délimitée par le parcours :

$$\oint \vec{\mathbf{B}}\cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0 \Sigma I \tag{9.15}$$

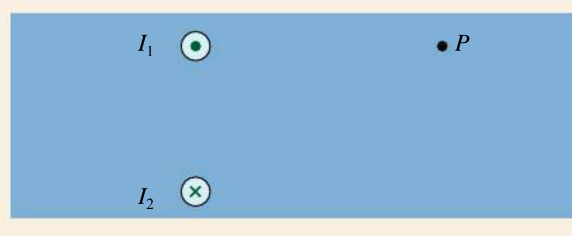
Soulignons que $\vec{\mathbf{B}}$ comprend souvent des contributions provenant de courants *non* compris dans la boucle. On peut utiliser ce théorème pour déterminer $\vec{\mathbf{B}}$ si la géométrie de la distribution de courant permet de choisir un parcours sur lequel l'intégrale est facile à calculer.

TERMES IMPORTANTS

aimant permanent (p. 375)
boucle (p. 367)
constante de perméabilité du vide (p. 357)
électroaimant (p. 375)
élément de courant (p. 359)
loi de Biot-Savart (p. 360)
solénoïde (p. 372)
spire (p. 369)
théorème d'Ampère (p. 379)

RÉVISION

R1. Les deux longs fils de la figure 9.57 portent des courants I_1 et I_2, avec $I_1 > I_2$. (a) Dessinez les flèches représentant le champ magnétique produit par chacun des fils au point P. (b) Identifiez la ou les régions dans le plan de la figure où le champ magnétique peut être nul. (c) Représentez la force magnétique subie par chacun des fils.



▲ **Figure 9.57**

Deux longs fils parallèles sont parcourus par des courants de sens opposés.

R2. D'après la loi de Biot-Savart,

$$dB = \frac{\mu_0 I \, d\ell \sin\theta}{4\pi r^2}$$

Donnez la signification de chacun des termes de cette expression (à l'aide d'un dessin si nécessaire).

R3. D'après l'équation 9.8*a*, le module du champ magnétique produit par un fil est donné par

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$$

(a) Donnez la signification de chacun des termes de cette expression (à l'aide d'un dessin si nécessaire). (b) Montrez (à l'aide d'un dessin si nécessaire) que cette expression permet de retrouver l'équation 9.1 pour un fil infini. (c) Répondez aux deux mêmes questions pour l'équation 9.8*b* donnée par

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left[\frac{x_2}{(x_2^2 + R^2)^{1/2}} - \frac{x_1}{(x_1^2 + R^2)^{1/2}}\right]$$

R4. D'après l'équation 9.9, le module du champ magnétique le long de l'axe d'une boucle de courant est donné par

$$B = \frac{\mu_0 NI \sin^3\alpha}{2a}$$

Donnez la signification de chacun des termes de cette expression (à l'aide d'un dessin si nécessaire).

R5. D'après l'équation 9.12, le module du champ magnétique le long de l'axe d'un solénoïde est donné par

$$B = \tfrac{1}{2}\mu_0 nI(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$$

Donnez la signification de chacun des termes de cette expression (à l'aide d'un dessin si nécessaire).

R6. Écrivez l'expression du théorème d'Ampère et expliquez la signification de chacun de ses termes.

QUESTIONS

Q1. Soit deux longs conducteurs rectilignes, perpendiculaires l'un à l'autre et parcourus par des courants. Décrivez la force magnétique que chacun exerce sur l'autre.

Q2. On suspend un poids à un ressort pour éviter que les spires adjacentes du ressort ne se touchent. Qu'arrive-t-il lorsqu'on fait passer un courant dans le ressort ?

Q3. Un long fil conducteur rectiligne est parcouru par un courant selon l'axe des y positifs. Quelle est l'orientation de la force exercée sur une charge q positive située, à un instant donné, sur l'axe des x positifs, et qui se déplace : (a) le long de l'axe des x positifs, en s'éloignant du conducteur ; (b) parallèlement à l'axe des y positifs ; (c) parallèlement à l'axe des z négatifs ?

Q4. Dessinez les lignes du champ magnétique associé à deux longs fils conducteurs rectilignes parallèles dans un plan perpendiculaire aux conducteurs. Les courants circulent dans le même sens.

Q5. Dessinez les lignes du champ magnétique associé à deux longs fils conducteurs rectilignes parallèles dans un plan perpendiculaire aux conducteurs. Les courants circulent dans des sens opposés.

Q6. Un tube métallique est parcouru par un courant dans le sens de sa longueur. Que pouvez-vous dire du champ magnétique à l'intérieur de la cavité du tube, si la section transversale est (a) circulaire ; (b) carrée ?

Q7. Si l'on tient compte uniquement de la symétrie, quelles sont les configurations possibles pour les lignes du champ magnétique associé à un fil conducteur rectiligne infini ?

Q8. Si l'on tient compte uniquement de la symétrie, quelles sont les configurations possibles pour les lignes de champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde infini ?

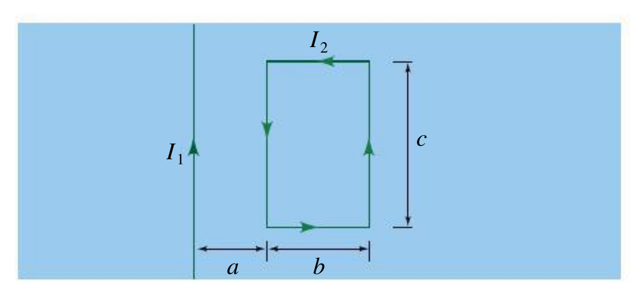
Q9. Quelles sont les dimensions de la quantité $1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$? Quelle est sa valeur numérique ?

Q10. Trois fils conducteurs sont parcourus par des courants dont les sens sont représentés à la figure 9.61. Écrivez le théorème d'Ampère pour une boucle entourant les trois fils. Indiquez le sens (horaire ou antihoraire) dans lequel l'intégration doit être effectuée.

Q11. On fabrique un solénoïde très long en bobinant un seul brin de fil conducteur. Est-il possible que le champ magnétique soit nul partout à l'extérieur du solénoïde ? (*Indice* : Les spires ne peuvent pas être parfaitement perpendiculaires à l'axe.)

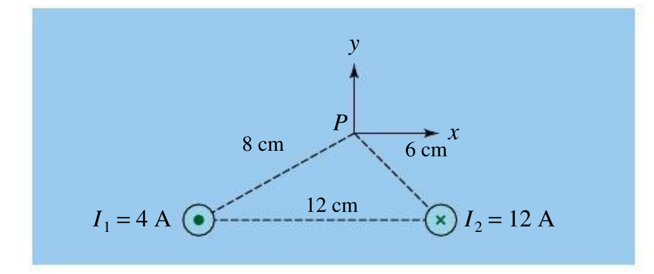
9.1 et 9.2 Champ magnétique produit par un long fil conducteur rectiligne ; force entre deux fils

E1. MonLab (II) Soit un long fil conducteur rectiligne et un cadre rectangulaire situés dans le même plan (figure 9.58). Les dimensions et les courants sont indiqués sur la figure. (a) Déterminez la force magnétique résultante agissant sur le cadre. (Remarquez que les forces qui s'exercent sur les portions horizontales du cadre s'annulent par symétrie.) (b) On suppose que $I_1 = I_2 = 1$ A, $b = 10$ cm et $c = 25$ cm. Initialement, la distance a est de 5 cm et le cadre est immobile. Quelle vitesse, en module, aura le cadre en $a = 25$ cm si sa masse est de 100 g ? On suppose qu'aucune autre force n'agit.



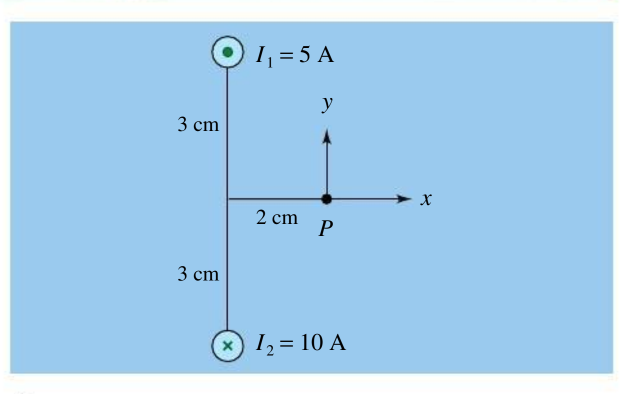
▲ **Figure 9.58**
Exercice 1.

E2. (II) Soit deux longs fils conducteurs rectilignes parcourus par des courants dont les intensités et les orientations sont représentées à la figure 9.59. (a) Quel est le champ magnétique résultant au point P ? (b) En quel point le champ résultant est-il nul ? (c) Quel est, par unité de longueur, le module de la force magnétique qu'exerce chacun des fils sur l'autre ?



▲ **Figure 9.59**
Exercice 2.

E3. (I) Soit deux longs fils conducteurs rectilignes parcourus par des courants dont les orientations sont indiquées à la figure 9.60. (a) Déterminez le champ magnétique résultant au point P. (b) Quelle serait la force magnétique qui s'exerce sur 1 m d'un troisième fil conducteur parcouru par un courant de 3 A sortant de la page et placé en P ?



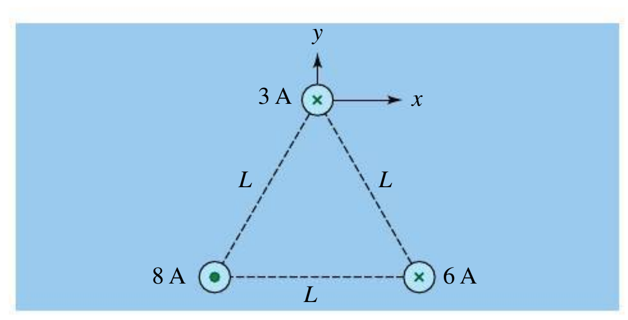
▲ **Figure 9.60**
Exercice 3.

E4. (I) Un long fil rectiligne vertical est parcouru par un courant de 20 A orienté vers le haut. En quel point son champ annule-t-il le champ magnétique terrestre qui est horizontal, orienté vers le nord et de module 0,5 G ?

E5. (I) Un éclair équivaut à un courant de 5×10^3 A d'une durée de 1 ms. Évaluez le module du champ magnétique à une distance de 2 m perpendiculairement à l'éclair.

E6. (I) Trois longs fils conducteurs rectilignes passent par les sommets d'un triangle équilatéral dont les côtés ont pour longueur $L = 6$ cm. Ils sont parallèles et sont parcourus par les courants indiqués sur la figure 9.61. Quelle est, par unité de longueur, la force magnétique qui s'exerce sur le fil conducteur du haut ?

E7. MonLab (I) Une ligne de courant continu située à 20 m au-dessus du sol transporte un courant de 600 A orienté vers le nord. Si la composante horizontale du champ magnétique terrestre est égale à 0,5 G et orientée plein nord, quelle est l'orientation de l'aiguille d'une boussole placée au sol juste en dessous de la ligne ?

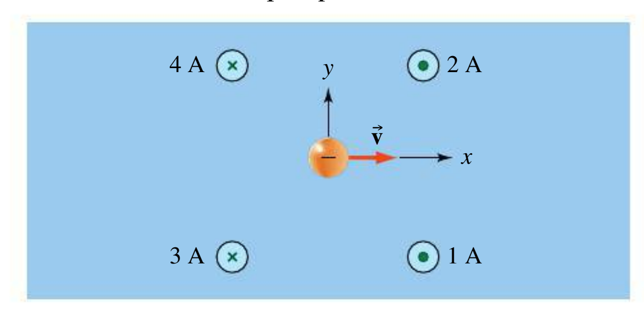


▲ **Figure 9.61**
Question 10 et exercice 6.

E8. (I) Un long fil conducteur rectiligne transporte un courant de 15 A. Le fil coïncide avec un axe des y et le courant coule dans la direction positive de cet axe. Quelle est la force magnétique qui s'exerce sur un

électron situé à un instant donné en $x = 6$ cm, sur l'axe des x, et se déplaçant à la vitesse de 10^6 m/s selon les orientations suivantes : (a) le long de l'axe des x positifs en s'éloignant du fil ; (b) parallèlement à l'axe des y positifs ; (c) parallèlement à l'axe des z positifs ?

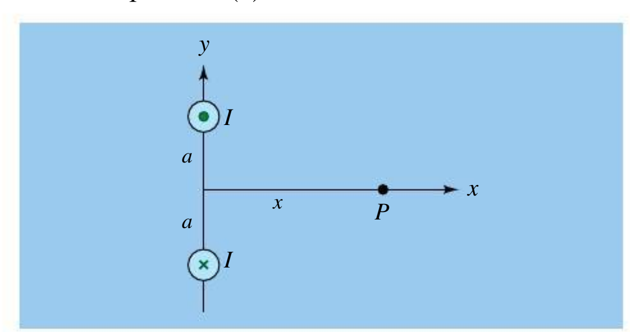
E9. MonLab (II) Soit quatre longs fils conducteurs parallèles passant par les sommets d'un carré de 15 cm d'arête et parcourus par les courants indiqués à la figure 9.62. Déterminez : (a) le champ magnétique résultant au centre du carré ; (b) la force magnétique qui s'exerce sur un électron se déplaçant à la vitesse de $4 \times 10^6\vec{\mathbf{i}}$ m/s lorsqu'il passe au centre.



▲ **Figure 9.62**
Exercice 9.

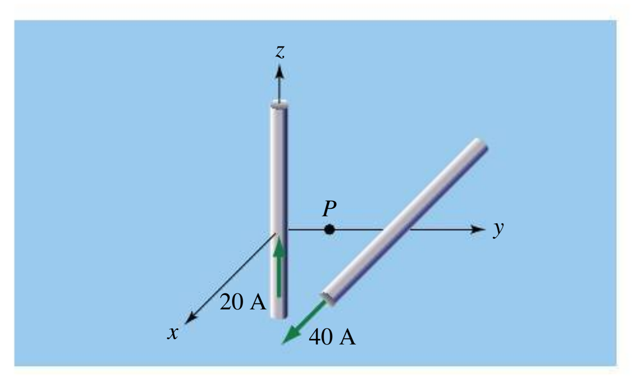
E10. (II) Deux longs fils conducteurs parallèles à l'axe des z passent par les points $x = 0$, $y = \pm a$. (a) Déterminez le module du champ magnétique résultant au point $(x, 0)$ dans le plan xy, sachant que les fils conducteurs sont parcourus par des courants égaux et de sens opposés (figure 9.63). (b) En quel point B est-il égal à 20 % de sa valeur en $x = 0$? (c) Donnez une valeur raisonnable à I et à a, et tracez le graphe de $B(x)$ pour x allant de 0 à $3a$. Vérifiez la réponse trouvée en (b).

E11. (II) (a) Reprenez la question (a) de l'exercice E10 pour des courants de même sens. (b) En quel point B est-il maximal ? (c) Donnez une valeur raisonnable à I et à a, et tracez le graphe de $B(x)$ pour x allant de 0 à $3a$. La courbe obtenue confirme-t-elle le résultat de la question (b) ?



▲ **Figure 9.63**
Exercice 10.

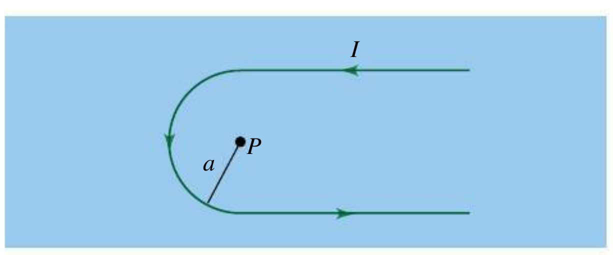
E12. (II) Deux fils conducteurs rectilignes infinis sont respectivement parallèles à l'axe des x et à l'axe des z (figure 9.64). L'un des fils est situé sur l'axe des z et l'autre est situé en $y = 10$ cm. Déterminez le champ magnétique résultant au point P, sur l'axe des y, à mi-chemin entre les deux fils. Les intensités et sens des courants sont indiqués sur la figure.



▲ **Figure 9.64**
Exercice 12.

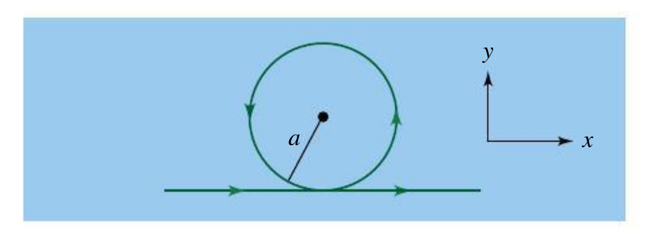
9.3 Loi de Biot-Savart

E13. (I) On a recourbé un fil conducteur rectiligne infini parcouru par un courant pour lui donner la forme représentée à la figure 9.65. La partie courbe est un demi-cercle de rayon a. Quel est le module du champ magnétique au point P ?



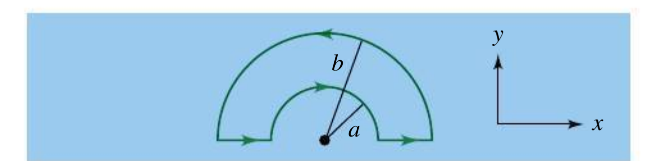
▲ **Figure 9.65**
Exercice 13.

E14. (I) Une partie d'un fil conducteur long et flexible parcouru par un courant est en forme de boucle circulaire, alors que le reste du fil demeure rectiligne (figure 9.66). Quel est le champ magnétique au centre de la boucle ?



▲ **Figure 9.66**
Exercice 14.

E15. MonLab (I) Soit une boucle de courant constituée de deux demi-cercles concentriques reliés par des sections radiales (figure 9.67). Quel est le champ magnétique au centre des demi-cercles ?

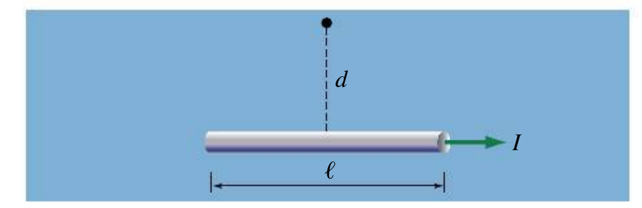


▲ **Figure 9.67**

Exercice 15.

E16. MonLab (II) Un fil conducteur rectiligne de longueur ℓ est parcouru par un courant I (figure 9.68). Montrez que le module du champ magnétique sur la médiatrice, à une distance d du milieu du fil, est

$$B = \frac{\mu_0 I \ell}{2\pi d(\ell^2 + 4d^2)^{1/2}}$$



▲ **Figure 9.68**

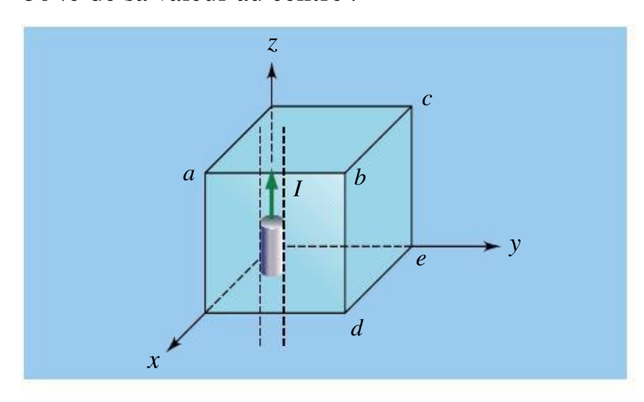
Exercice 16.

E17. (II) Un cadre carré de côté ℓ est parcouru par un courant I. Montrez que le module du champ magnétique au centre est

$$B = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi \ell}$$

E18. (II) Considérons le champ magnétique infinitésimal $d\vec{\mathbf{B}}$ créé par un petit segment de fil conducteur parcouru par un courant de 10 A selon l'axe des z. Le segment, considéré comme infinitésimal, de longueur $d\ell$ = 1 mm, est situé à l'origine (figure 9.69). Quel est le champ aux points a, b, c, d et e, les sommets d'un cube de 2 cm d'arête ?

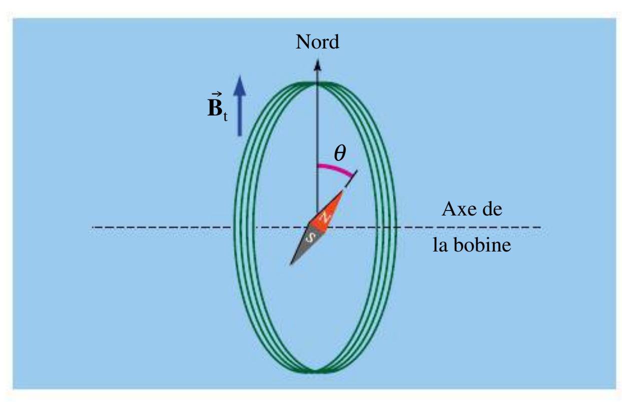
E19. (II) (a) Utilisez l'équation 9.9 pour tracer la courbe du champ magnétique en fonction de la distance au centre d'une boucle circulaire pour un point situé sur l'axe. On donne $\mu_0 I/2a$ = 1 G. (b) En quel point, en fonction de a, le module du champ est-il égal à 50 % de sa valeur au centre ?



▲ **Figure 9.69**

Exercice 18.

E20. (I) Un galvanomètre mobile est constitué d'une grande bobine circulaire comportant N spires jointives de rayon R. Son plan est vertical et parallèle à la composante horizontale du champ magnétique terrestre $\vec{\mathbf{B}}_t$ (figure 9.70). Lorsque la bobine est parcourue par un courant, une petite aiguille aimantée située au centre dévie d'un angle θ par rapport à la direction du champ magnétique terrestre. Trouvez l'expression du courant circulant dans la bobine en fonction de θ.

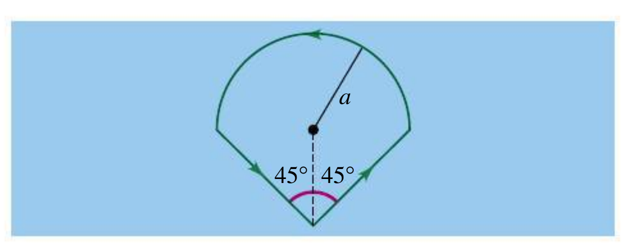


▲ **Figure 9.70**

Exercice 20.

E21. (I) Quelle serait l'intensité du courant circulant dans une boucle circulaire de rayon 4 cm pour que le champ magnétique au centre ait le même module que le champ terrestre, soit 0,8 G ?

E22. MonLab (II) Soit deux fils conducteurs rectilignes perpendiculaires reliant les extrémités d'une boucle demi-circulaire de rayon a (figure 9.71). Si le courant est I, quel est le module du champ magnétique résultant au centre de la section circulaire ?

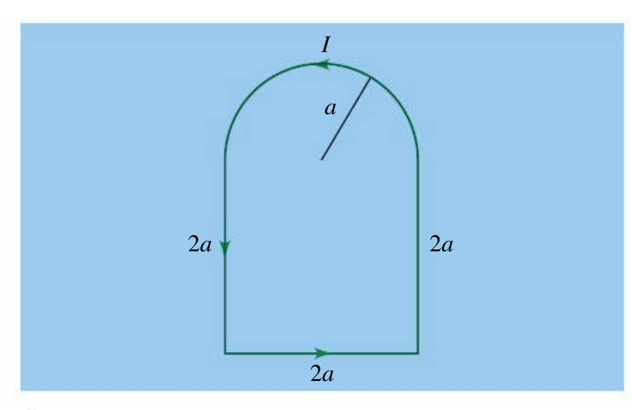


▲ **Figure 9.71**

Exercice 22.

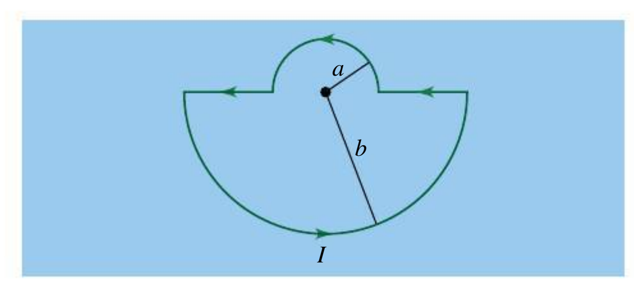
E23. MonLab (II) Les extrémités d'une boucle demi-circulaire parcourue par un courant I sont reliées à trois fils conducteurs formant les côtés d'un carré (figure 9.72). Quel est le module du champ magnétique résultant au centre de la section circulaire ?

E24. (I) Deux boucles demi-circulaires de rayons a et b ont un centre commun et leurs extrémités sont reliées par des fils conducteurs rectilignes (figure 9.73). (a) Quel est le module du champ magnétique résultant au centre ? (b) Quel est le module du moment dipolaire magnétique de la boucle ? On donne a = 6 cm, b = 18 cm et I = 4,5 A.



▲ **Figure 9.72**

Exercice 23.



▲ **Figure 9.73**

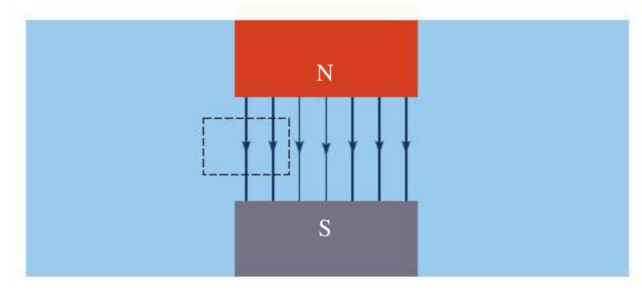
Exercice 24.

E25. (I) Combien faut-il de spires de fil de cuivre isolé pour constituer un solénoïde de longueur 25 cm et de rayon 2 cm si le courant est égal à 15 A et que le module du champ magnétique selon l'axe est de 0,02 T (on néglige les effets de bords).

E26. (I) On enroule un fil de cuivre de 1 mm de rayon de manière à former un solénoïde de 10 cm de rayon. Le solénoïde comporte 60 spires qui se touchent. Les extrémités du fil, dont la résistivité est égale à $1{,}7 \times 10^{-8}$ Ω·m, sont reliées à une pile de 1,5 V. Quel est le module du champ magnétique au centre du solénoïde ?

9.4 Théorème d'Ampère

E27. (I) Utilisez le théorème d'Ampère pour démontrer que les lignes du champ magnétique associé à un aimant ne peuvent s'arrêter brusquement à la frontière de la région entre les deux pôles (figure 9.74).

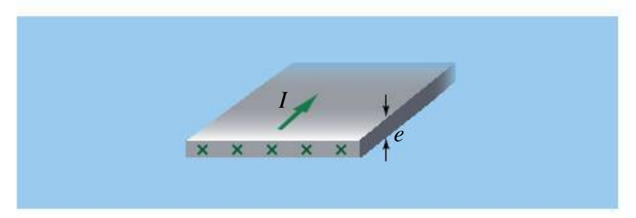


▲ **Figure 9.74**

Exercice 27.

E28. (II) Un tube métallique a un rayon interne *a* et un rayon externe *b*. Il est parcouru par un courant *I* uniformément distribué sur sa section transversale. Utilisez le théorème d'Ampère pour déterminer le module du champ magnétique en tout point.

E29. (II) Une plaque métallique de très grandes dimensions et d'épaisseur *e* (figure 9.75) transporte un courant de densité uniforme $\vec{\mathbf{J}}$. (a) Utilisez la symétrie du problème et la règle de la main droite pour déterminer l'orientation du champ magnétique au-dessus et en dessous de la plaque. (b) Déterminez le module du champ magnétique à une distance *a* de la plaque.



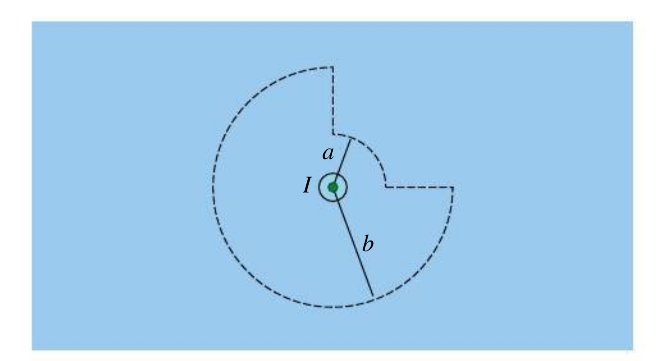
▲ **Figure 9.75**

Exercice 29.

E30. MonLab (I) Un tore de 240 spires a une section transversale carrée (2 cm × 2 cm) et un rayon interne de 3,6 cm. Le courant vaut 6 A. Utilisez le théorème d'Ampère pour déterminer le module du champ magnétique à l'intérieur du tore, (a) à proximité du rayon interne ; (b) à proximité du rayon externe.

E31. MonLab (I) Un long fil rectiligne de rayon 2 mm transporte un courant de 12 A uniformément distribué sur sa section transversale. Utilisez le théorème d'Ampère pour déterminer en quels points, à l'intérieur et à l'extérieur du fil, le module du champ magnétique est égal à 25 % de sa valeur à la surface du fil.

E32. (II) Utilisez l'équation 9.1 donnant le module du champ magnétique créé par un fil infini pour démontrer que le théorème d'Ampère est valable pour la boucle représentée en pointillé à la figure 9.76. Les sections circulaires sont reliées par des lignes radiales.



▲ **Figure 9.76**

Exercice 32.

9.1 Champ magnétique créé par un long fil conducteur rectiligne

E33. (I) Deux fils conducteurs infinis sont parallèles à l'axe des y. Le premier est parcouru par un courant $I_1 = 6$ A dans la direction $+y$ et est situé à $x = 0$. Le second porte un courant I_2 et est situé à $x = 8$ cm. Pour quelle valeur de I_2 le champ magnétique résultant est-il nul en (a) $x = 6$ cm ; (b) $x = 10$ cm ?

E34. (II) Cinq longs fils conducteurs parallèles, parcourus par des courants, sont disposés à une distance égale les uns des autres, comme à la figure 9.77. Pour quelle valeur de I_1 et de I_2 la force magnétique résultante est-elle nulle sur les trois autres fils ?

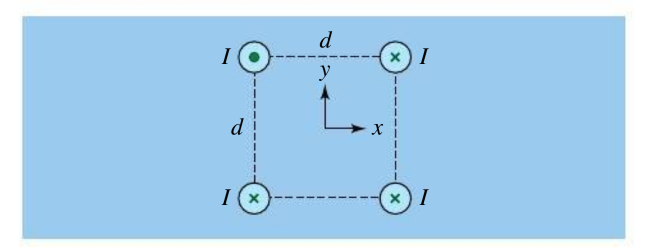


▲ **Figure 9.77**
Exercices 34 et 35.

E35. (II) Cinq longs fils conducteurs parallèles, parcourus par des courants, sont disposés à une distance égale les uns des autres, comme à la figure 9.77. Pour quelle valeur de I_2 la force magnétique résultante est-elle nulle sur I_1 ?

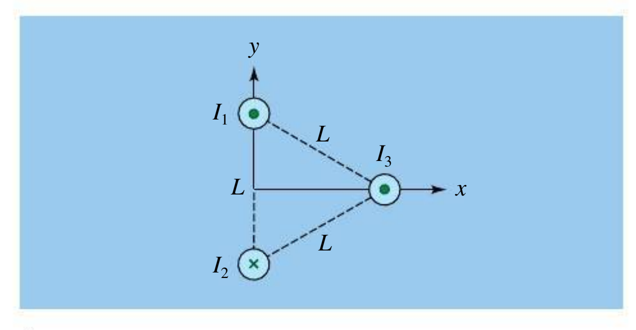
E36. (I) Deux fils conducteurs infinis sont superposés aux axes des x et des y et transportent des courants de même valeur I dans le sens positif de chacun de ces deux axes. Trouvez le champ magnétique résultant à $z = d$ sur l'axe des z.

E37. (I) Quatre longs fils conducteurs parallèles sont placés aux coins d'un carré d'arête $d = 5{,}0$ cm, comme à la figure 9.78. Ils transportent le même courant, $I = 8{,}0$ A, selon les sens indiqués dans la figure. Quelle est la force magnétique résultante par unité de longueur sur le fil placé au coin supérieur droit ?



▲ **Figure 9.78**
Exercice 37.

E38. (II) Trois longs fils conducteurs parallèles sont placés aux extrémités d'un triangle équilatéral de côté $L = 20$ cm, comme à la figure 9.79. On prend $I_1 = I_3 = 5{,}0$ A et $I_2 = 8{,}0$ A. (a) Quel est le champ magnétique résultant associé aux courants I_1 et I_2 à la position du fil I_3 ? (b) Quelle est la force magnétique par unité de longueur sur le fil I_3 ?

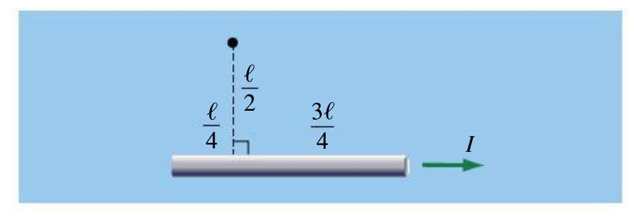


▲ **Figure 9.79**
Exercice 38.

9.3 Loi de Biot-Savart

E39. (I) Un solénoïde supraconducteur de 16 cm de long est parcouru par un courant de 800 A. S'il est constitué de 40 tours de fils, quel est le module du champ magnétique au centre ? On néglige les effets associés aux extrémités.

E40. (II) Utilisez l'équation 9.8*a* ou 9.8*b* pour calculer le module du champ magnétique d'un fil de longueur $\ell = 0{,}15$ m à une distance perpendiculaire $\ell/2$ comme à la figure 9.80. Prenez $I = 20$ A. Recommencez ensuite en utilisant directement la loi de Biot-Savart (équation 9.6).



▲ **Figure 9.80**
Exercice 40.

E41. (I) Pour étudier l'effet du champ magnétique terrestre sur les abeilles, on utilise un solénoïde de 1000 spires pour annuler le champ résultant dans une région de l'espace. La longueur du solénoïde et le courant sont ajustables. Si le champ magnétique terrestre est de 1 G à cet endroit, quel rapport courant/longueur doit-on utiliser ?

9.4 Théorème d'Ampère

E42. (II) Montrez que l'expression décrivant le module du champ magnétique d'une bobine toroïdale parcourue par un courant se ramène à celle d'un très long solénoïde si son rayon est beaucoup plus grand que le diamètre de son aire de section.

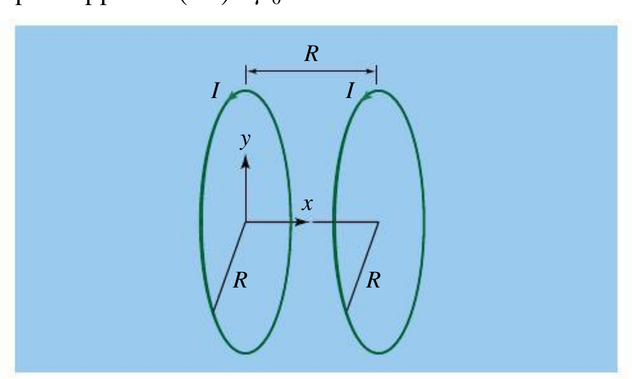
PROBLÈMES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

P1. (I) Une particule de masse m et de charge q décrit une orbite circulaire normale à un champ magnétique externe de module B. Montrez que la charge crée au centre de son orbite un champ magnétique de module

$$\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q^2 B}{mR}$$

P2. (II) Les bobines de Helmholtz sont deux grandes bobines circulaires plates comportant N spires de rayon R. Les centres des bobines sont distants de R (figure 9.81). (a) Déterminez le module du champ magnétique résultant sur la droite joignant les centres, en fonction de x, la distance par rapport au centre d'une des bobines, et de I, le courant identique qui les parcourt dans le même sens. (b) Montrez qu'en $x = R/2$, $B = (4/5)^{3/2}\mu_0 NI/R$. (c) Montrez que le champ au point décrit en (b) est pratiquement uniforme. (*Indice*: Montrez que dB/dx et d^2B/dx^2 sont tous deux nuls pour $x = R/2$.) (d) Donnez une valeur raisonnable à N, à I et à R, puis tracez le graphe de $B(x)$ pour x allant de $x = 0$ à $x = R$. Le graphe confirme-t-il l'affirmation faite en (c) ? (e) Déterminez l'intervalle, autour de $x = R/2$, sur lequel B conserve une valeur ne variant pas de plus de 5 % par rapport à $(4/5)^{3/2}\mu_0 NI/R$.



▲ **Figure 9.81**

Problème 2.

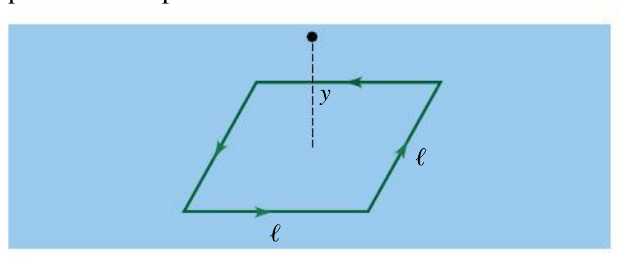
P3. (I) Un disque non conducteur de rayon R porte une densité surfacique de charge σ positive et tourne autour de son axe central à la vitesse angulaire ω, en radians par seconde. (a) Quel est le courant dI circulant dans un anneau élémentaire de largeur dr ? (b) Quel est le module du champ magnétique au centre de cet anneau ? (c) Montrez que le module du champ magnétique total au centre du disque est

$$B = \tfrac{1}{2}\mu_0\sigma\omega R$$

P4. (II) (a) Soit un fil conducteur ayant la forme d'un carré d'arête ℓ et parcouru par un courant I (figure 9.82). Montrez que le module du champ magnétique à une distance y du centre du carré dans une direction normale à son plan est égal à

$$B = \frac{\mu_0 I\ell^2}{2\pi(y^2 + \ell^2/4)(y^2 + \ell^2/2)^{1/2}}$$

(b) Montrez que lorsque $y \gg \ell$, cette expression se réduit à celle du module du champ magnétique que produit un dipôle.

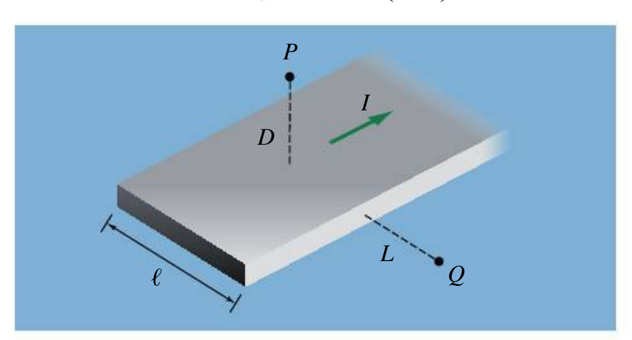


▲ **Figure 9.82**

Problème 4.

P5. (I) Une plaquette métallique mince de longueur infinie et de largeur ℓ est parcourue par un courant I (figure 9.83). En divisant la plaquette en bandes infinitésimales et en utilisant le résultat donnant le champ créé par un fil infini, montrez que le module du champ magnétique au point P est

$$B_P = \frac{\mu_0 I}{\pi\ell}\arctan\left(\frac{\ell}{2D}\right)$$



▲ **Figure 9.83**

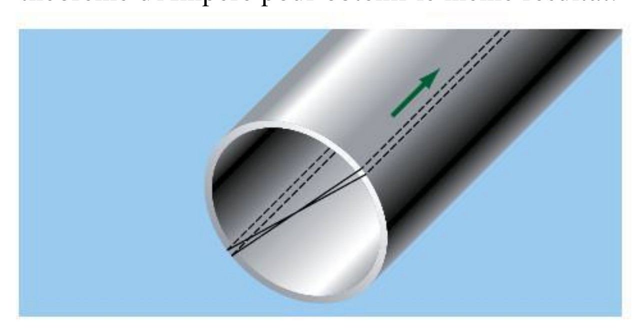
Problèmes 5 et 6.

P6. (II) Une plaquette métallique mince de longueur infinie et de largeur ℓ est parcourue par un courant I (figure 9.83). Déterminez le module du champ magnétique au point Q à la distance L du bord de la plaquette. (*Indice*: Divisez la plaquette en bandes infinitésimales et utilisez le résultat donnant le champ créé par un fil infini.)

P7.  (I) Un solénoïde de 2 cm de rayon est parcouru par un courant I. Une de ses extrémités est à $x = 0$ et l'autre à $x = 20$ cm. L'axe du solénoïde et l'axe des x coïncident. (a) En vous servant de l'équation 9.12, établissez une expression mathématique donnant, en fonction de x, le module du champ magnétique le long de l'axe du solénoïde. (b) Donnez une valeur

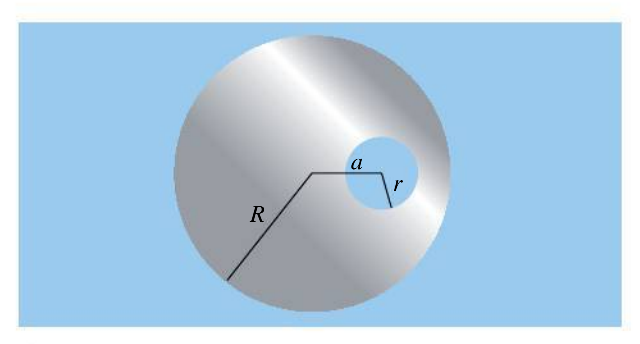
raisonnable à I et à n afin de tracer le graphe de l'expression mathématique trouvée en (a) sur un intervalle englobant la longueur du solénoïde, et comparez-le avec celui de la figure 9.24 (p. 373). (c) À quel endroit, à l'intérieur du solénoïde, la valeur réelle du module du champ s'éloigne-t-elle de 10 % de la valeur calculée avec l'équation 9.13 ? (d) Reprenez la question (c) pour un solénoïde de même longueur mais possédant un rayon de 0,5 cm.

P8. (II) (a) Utilisez la loi de Biot-Savart pour un fil infini afin de démontrer que le champ magnétique en tout point à l'intérieur d'un tube parcouru par un courant est nul. (*Indice* : Montrez que les contributions dues aux éléments interceptés par la paire de lignes de la figure 9.84 s'annulent mutuellement.) (b) Utilisez le théorème d'Ampère pour obtenir le même résultat.



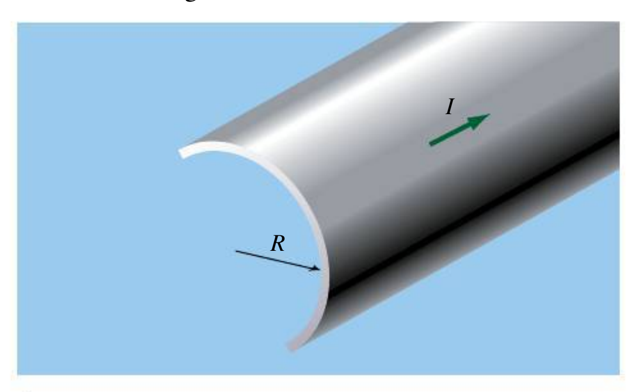
▲ **Figure 9.84**
Problème 8.

P9. (II) Soit un long fil conducteur plein et rectiligne de rayon R dans lequel a été pratiquée une cavité de rayon r sur toute la longueur. Comme le montre la figure 9.85, les centres du conducteur et de la cavité sont distants de a. Le courant est uniformément distribué dans tout le reste du conducteur. (a) Montrez que le champ magnétique dans la cavité est uniforme. (b) Quel est son module ? (*Indice* : Utilisez le principe de superposition. Ajoutez le champ créé par un fil conducteur plein de rayon R avec celui d'un fil de rayon r transportant un courant de sens opposé.)



▲ **Figure 9.85**
Problème 9.

P10. (II) Un courant I est uniformément distribué dans une moitié d'un tube cylindrique de rayon R (figure 9.86). Quel est le module du champ magnétique en un point situé sur l'axe du cylindre ? On suppose le cylindre infiniment long.



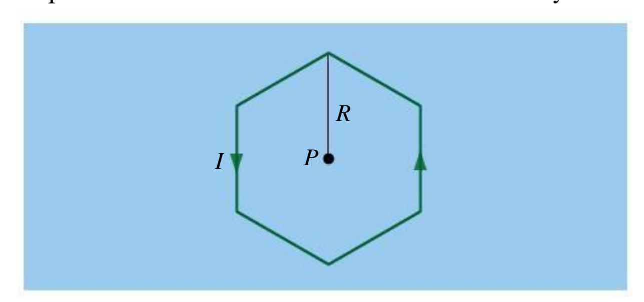
▲ **Figure 9.86**
Problème 10.

P11. (II) En un point éloigné ($z \gg a$) du centre d'une boucle à une spire parcourue par un courant, le long de l'axe de la boucle, montrez que l'équation 9.9 se réduit à

$$B = \frac{2k'\mu}{z^3}$$

où $k' = \mu_0/4\pi$ et $\mu = I(\pi a^2)$.

P12. (II) On joint six segments de fil de manière à obtenir la forme hexagonale de la figure 9.87. (a) En utilisant l'équation 9.8*a* ou 9.8*b*, trouvez une expression donnant le module du champ magnétique au point P, situé au centre de la forme, et dépendant explicitement du nombre de côtés n de celle-ci, de l'intensité I du courant parcourant les segments de fil et de la distance R indiquée dans la figure. (b) Montrez que, si $n \to \infty$, l'expression obtenue en (a) revient à l'expression donnant le module du champ magnétique au centre d'une boucle de courant de rayon R.



▲ **Figure 9.87**
Problème 12.

P13. (I) En première approximation, on peut représenter le passage d'un potentiel d'action dans une fibre musculaire comme une charge de q qui voyage à la vitesse v le long de la fibre. (a) Quel est le module du champ magnétique que détecte alors, en fonction du temps, une sonde immobile située à la distance d de la fibre ? (b) Prenez des valeurs raisonnables pour q, v et d, puis tracez un graphique de la réponse obtenue en (a).

CHAPITRE 10

L'INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE



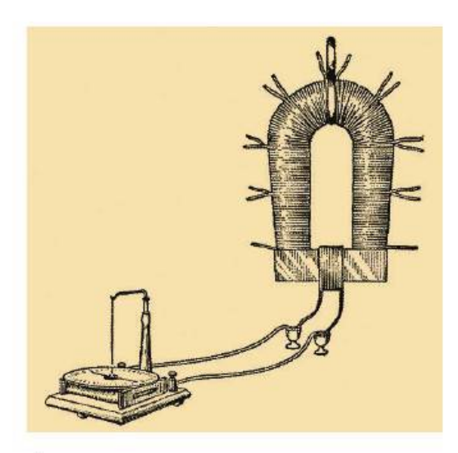
SOMMAIRE



Ces éoliennes de la Gaspésie produisent une f.é.m. grâce au phénomène de l'induction électromagnétique. La boîte qu'on distingue derrière l'hélice est un alternateur qui mesure plusieurs mètres de long: il contient de grandes bobines de fil qui tournent dans un champ magnétique. Dans ce chapitre, nous verrons pourquoi, dans une telle situation, un courant se met à circuler par induction dans les bobines.

Le lien entre l'électricité et le magnétisme fut mis en évidence en 1820 à la suite de deux observations: celle de Œrsted selon laquelle un courant électrique produit un effet magnétique et celle effectuée peu après selon laquelle un barreau de fer devient aimanté s'il est placé à l'intérieur d'un solénoïde parcouru par un courant. Après ces expériences montrant qu'un courant électrique peut produire un champ magnétique, plusieurs tentèrent d'observer le phénomène inverse: un courant électrique produit par un champ magnétique. Dès 1821, Michael Faraday écrivit dans ses notes qu'il devrait essayer de «convertir le magnétisme en électricité».

En août 1830, lors de courtes vacances, le physicien américain Joseph Henry (1797-1878) eut l'idée de placer une tige de métal entre les pôles d'un électroaimant et d'enrouler une bobine de fil isolé autour de la tige (figure 10.1). Il relia les bornes de la bobine à un galvanomètre. À l'instant où le courant se mit à circuler dans l'électroaimant, il observa une déviation momentanée de l'aiguille du galvanomètre. Pourtant, il n'y avait aucune connexion électrique entre la bobine et les fils de l'électroaimant. Il avait ainsi découvert qu'un courant est



▲ **Figure 10.1**
L'appareil avec lequel Joseph Henry réussit à « convertir le magnétisme en électricité ».



▲ **Figure 10.2**
Michael Faraday (1791-1867).

induit (généré) dans la bobine lorsque le champ magnétique qui la traverse *varie*. Tout en sachant très bien qu'il avait réussi à « convertir le magnétisme en électricité », Henry ne put, à cause de ses fonctions d'enseignant, poursuivre ses travaux dans ce domaine et ses résultats ne furent donc pas publiés immédiatement. Un an plus tard, Michael Faraday (figure 10.2) fit indépendamment la même découverte en réalisant essentiellement la même expérience (voir l'aperçu historique de la section 10.3).

On appelle **induction électromagnétique** la production d'effets électriques à partir de champs magnétiques*. Ce phénomène permet notamment de faire circuler un courant dans un circuit fermé qui ne comporte aucune pile. En d'autres termes, le phénomène d'induction joue le même rôle qu'une pile : il est responsable de la production d'une f.é.m. dans ce circuit, appelée **f.é.m. induite**.

Après avoir survolé le phénomène (section 10.1), nous commencerons par étudier la loi de Faraday et la loi de Lenz, qui permettent de calculer la f.é.m. induite, mais pas d'expliquer par quel mécanisme elle apparaît (sections 10.2 et 10.3). Nous nous attarderons ensuite aux causes physiques de la f.é.m. induite, ce qui nécessitera d'inventer *une nouvelle façon de produire un champ électrique, en l'absence de charges sources* (sections 10.5 et 10.6). Comme nous le verrons au chapitre 13, cette nouvelle façon de produire des champs permet aussi le fonctionnement du modèle de l'onde électromagnétique, utilisé pour expliquer la lumière, les signaux de radio, les rayons X, etc.

10.1 L'INDUCTION ÉLECTROMAGNÉTIQUE

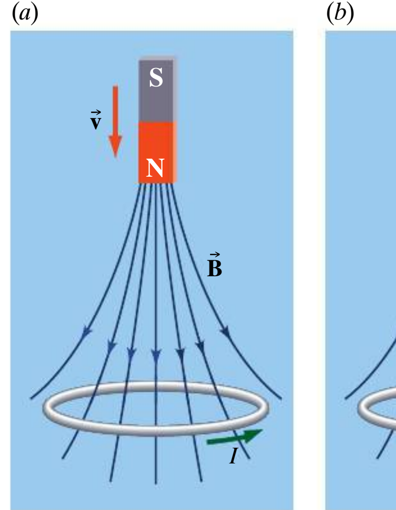
Pour que l'induction électromagnétique se produise et qu'apparaisse une f.é.m. induite, la présence d'un champ magnétique est essentielle, mais cela ne suffit pas en soi. En effet, l'induction ne se produit que dans deux circonstances : 1) si le circuit est immobile, le champ magnétique *doit varier dans le temps* (c'est le cas de l'expérience de Henry évoquée plus haut) ou 2) si le champ magnétique est constant dans le temps, le circuit ou une de ses parties *doit se déplacer dans l'espace* en croisant les lignes de champ magnétique.

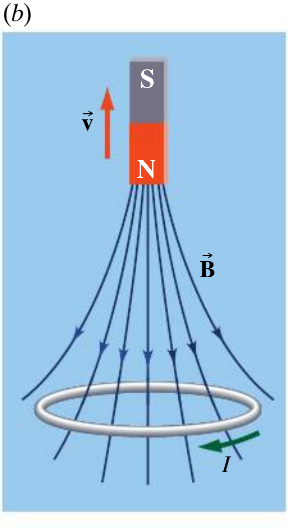
Dans les quatre sous-sections qui suivent, nous décrivons diverses expériences où on tente d'induire un courant dans un circuit formé d'une simple boucle circulaire. La première sous-section correspond au cas (1), où le circuit est immobile, alors que les trois autres correspondent au cas (2), où le circuit est en mouvement.

(i) Circuit immobile, champ magnétique variable dans le temps

La figure 10.3 illustre une boucle conductrice *immobile*. Quand l'aimant ne bouge pas, aucune induction ne se produit. Par contre, si on déplace l'aimant, par exemple en l'approchant de la boucle, on fait varier dans le temps (augmenter) le module du champ magnétique *là où la boucle est située*. Une f.é.m. est induite dans la boucle, car on observe qu'un courant y circule. Si c'est le pôle nord que l'on approche de la boucle (figure 10.3*a*), ce courant circule dans le sens antihoraire, vu de l'aimant. Lorsqu'on éloigne le pôle nord (figure 10.3*b*), le module du champ magnétique dans lequel baigne la boucle diminue et on

* Il ne faut pas confondre l'induction électromagnétique et l'induction d'une séparation de charge dont nous avons parlé plusieurs fois dans les chapitres 1 à 5 (voir la section 1.3, notamment). Le terme *induction* utilisé aux deux endroits veut seulement dire que les deux phénomènes se produisent sans contact. Ils n'ont rien d'autre en commun.

(*a*) 

(*b*) 

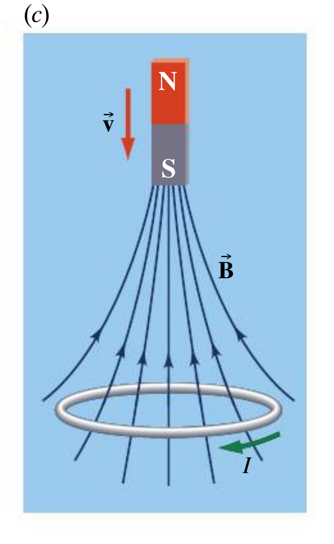
(*c*) 

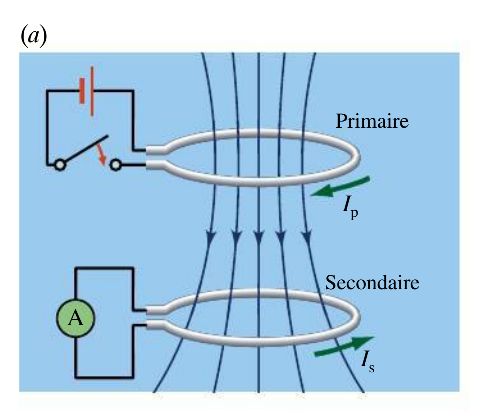
Figure 10.3

Lorsqu'un barreau aimanté se déplace par rapport à une boucle de fil conducteur immobile, un courant induit circule dans la boucle.

observe alors que le courant circule dans le sens horaire. Si l'on intervertit le pôle nord et le pôle sud, puis qu'on répète les deux essais précédents (figure 10.3*c*), les courants s'inversent. Ici, l'intensité et le sens du courant induit dépendent de la vitesse de l'aimant.

Considérons maintenant une deuxième façon de faire varier dans le temps le champ magnétique dans lequel est plongée une boucle immobile, sans que le mouvement d'un aimant ne soit nécessaire. À la figure 10.4*a*, il y a deux boucles immobiles, celle du haut ayant pour rôle de produire le champ magnétique dans lequel est plongée celle du bas. La boucle «primaire» est donc reliée en série à une pile et à un interrupteur, alors que la boucle «secondaire» n'est reliée qu'à un ampèremètre. Lorsqu'on ferme l'interrupteur dans le circuit primaire, la pile fait circuler un courant dans la boucle primaire. Comme le champ magnétique que produit cette boucle est proportionnel au courant (voir la section 9.3), le module du champ magnétique dans lequel est plongée la boucle secondaire passe rapidement d'une valeur nulle à une valeur stable, un peu comme si on avait brusquement approché un aimant. Pendant le court intervalle de temps que dure ce changement, on observe *brièvement* l'ampèremètre mesurer un courant dans le circuit secondaire. Tant que le courant primaire reste constant, le champ magnétique dans lequel baigne la boucle secondaire est constant et il n'y a plus de courant induit. Si on ouvre l'interrupteur, le champ magnétique dans lequel est plongée la boucle secondaire disparaît brusquement et on observe à nouveau que l'ampèremètre décèle brièvement un courant, mais dans le sens opposé.

C'est essentiellement cette expérience qu'a réalisée Faraday, en enroulant les bobines primaire et secondaire autour d'un anneau de fer (figure 10.4*b*). Si on

(*a*) 

(*b*) 

Figure 10.4

(*a*) Si le courant dans la boucle primaire varie, un courant induit apparaît dans la boucle secondaire. (*b*) Pour améliorer le couplage magnétique entre les circuits, Faraday bobina les enroulements primaire et secondaire sur un anneau circulaire en fer.

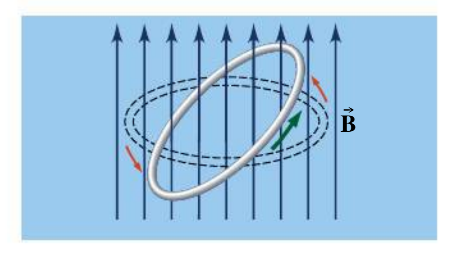
remplace la pile du circuit primaire par une source de tension variable, on peut produire un courant induit qui dure plus longtemps. Par exemple, si on augmente graduellement le courant primaire, le champ magnétique produit par la boucle primaire augmente graduellement et un courant induit presque constant circule dans la boucle secondaire tant que dure cette variation.

▲ **Figure 10.5**

Le plan de la boucle est perpendiculaire aux lignes du champ. On observe un courant induit lorsque l'aire de la boucle varie.

(ii) Champ constant, aire du circuit variable

Considérons maintenant un circuit (boucle conductrice) plongé dans un champ magnétique uniforme et constant dans le temps. Pour que l'induction se produise, il doit y avoir un mouvement du circuit. À la figure 10.5, une boucle circulaire de fil conducteur flexible est placée de telle sorte que son plan soit perpendiculaire à un champ magnétique uniforme constant dans le temps. Si l'on tire sur des points diamétralement opposés de la boucle, l'aire délimitée par la boucle se trouve réduite et un courant induit circule dans la boucle.



▲ **Figure 10.6**

Un courant induit apparaît lorsqu'une boucle tourne dans un champ extérieur.

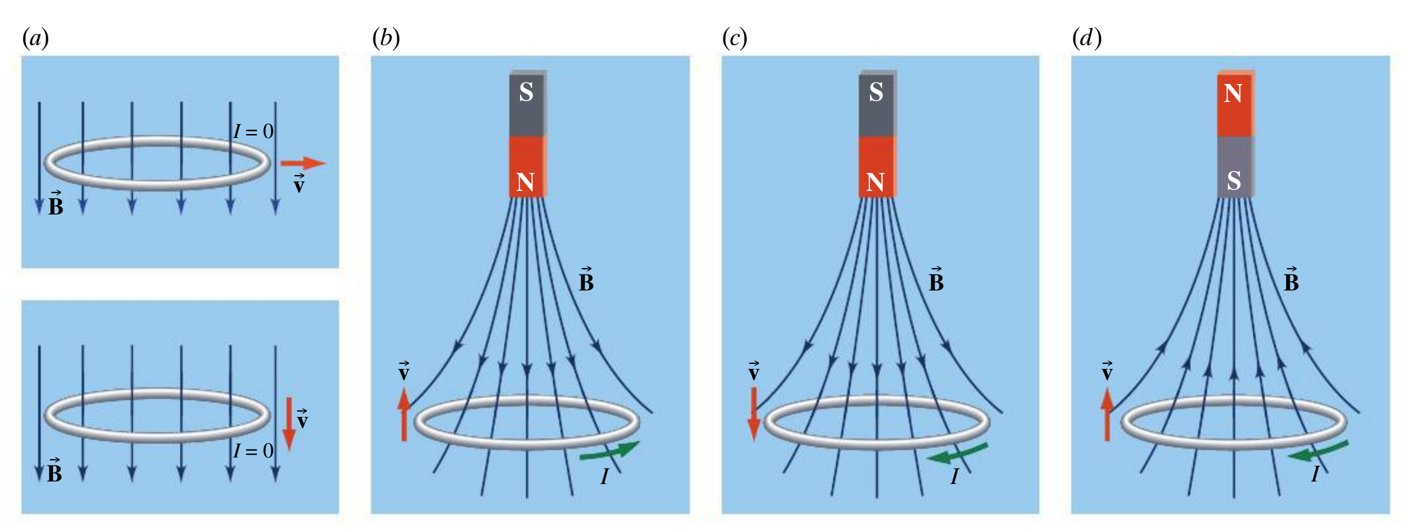
(iii) Champ constant, orientation du circuit variable

Il y a d'autres façons de déplacer le circuit pour qu'une induction électromagnétique se produise. Supposons cette fois que le champ magnétique uniforme et l'aire de la boucle restent tous deux constants dans le temps. Si l'on fait tourner le plan de la boucle par rapport à la direction du champ (figure 10.6), un courant induit circule dans la boucle tant que dure la rotation.

(iv) Mouvement du circuit dans un champ non uniforme

Supposons cette fois que la boucle conductrice qui se déplace conserve une aire constante et qu'elle subit un mouvement de translation sans rotation. Si ce déplacement se produit dans un champ magnétique uniforme, peu importe dans quelle direction, on n'observe *aucun* courant induit (figure 10.7*a*). Par contre, si on déplace la boucle dans un champ magnétique non uniforme, comme celui produit par un aimant, un courant est induit dans la boucle (figures 10.7*b*, 10.7*c* et 10.7*d*).

Si on compare la figure 10.7*b* avec la figure 10.3*a*, on note que le courant induit est dans le même sens. La comparaison tient aussi entre les figures 10.7*c* et



▲ **Figure 10.7**

Lorsqu'une boucle conductrice se déplace dans un champ uniforme sans variation de son orientation par rapport à celle du champ, aucun courant n'est induit. C'est ce qu'on voit en (*a*). Toutefois, si ce mouvement se fait dans un champ non uniforme comme celui d'un aimant, un courant est induit, comme on le voit en (*b*), en (*c*) ou en (*d*). De plus, le sens et l'intensité du courant ne dépendent que de la vitesse *relative* de l'aimant et de la boucle. (Comparez avec la figure 10.3.)

10.3*b*, ainsi qu'entre les figures 10.7*d* et 10.3*c*. L'intensité et le sens du courant induit ne dépendent donc que de la vitesse *relative* de la boucle et de l'aimant. À la section 10.5, nous verrons que, du point de vue de l'expérimentateur, la cause physique (force exercée sur les charges) permettant d'expliquer le courant induit est différente selon que c'est le circuit ou l'aimant qui bouge par rapport à l'expérimentateur. Malgré tout, l'effet est exactement le même. Ainsi, pour prédire l'apparition d'une f.é.m. induite (sans élaborer sur sa cause physique), nous utiliserons *une seule* équation valable dans les deux cas. Cette *loi de Faraday* sera présentée qualitativement à la section suivante, puis l'équation correspondante sera donnée à la section 10.3.

10.2 LE FLUX MAGNÉTIQUE

Comme le montre l'absence de courant à la figure 10.7*a*, ce ne sont pas tous les mouvements du circuit qui permettent de produire une f.é.m. induite. En les comparant, on réalise toutefois que *toutes* les expériences de la section précédente ont un point commun : chaque fois qu'il y a un courant induit, *le nombre de lignes de champ qui traversent la surface délimitée par le circuit conducteur varie dans le temps*. À la figure 10.3 ou 10.4*a*, ce changement se faisait en raison d'une augmentation ou d'une diminution du champ magnétique lui-même, alors qu'à la figure 10.5, 10.6, 10.7*b*, 10.7*c* ou 10.7*d*, il se produisait en raison du mouvement du circuit dans l'espace. Vérifiez qu'à la figure 10.7*a*, où il n'y avait aucun courant induit, le mouvement du conducteur *ne change pas* le nombre de lignes qui traversent la surface de la boucle conductrice.

L'idée selon laquelle la f.é.m. induite est proportionnelle à la variation du nombre de lignes de champ est une forme qualitative de la *loi de Faraday*, que nous obtiendrons sous forme d'équation à la section suivante. Pour exprimer d'une façon quantitative cette idée de « nombre de lignes de champ », on doit utiliser le concept de **flux magnétique**, Φ_B, qui est défini de la même manière que le flux électrique Φ_E (voir la section 3.1). Ainsi, dans le cas d'une surface plane d'aire A plongée dans un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ uniforme (figure 10.8), le flux magnétique traversant la surface est défini par

Flux magnétique dans un champ uniforme

$$\Phi_B = BA\cos\theta = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}} \qquad (10.1)$$

où $\vec{\mathbf{A}}$ est orienté perpendiculairement au plan de la surface qu'il représente et possède un module égal à l'aire de cette surface. En d'autres termes, θ est l'angle entre le champ $\vec{\mathbf{B}}$ et la *perpendiculaire* à la surface A.

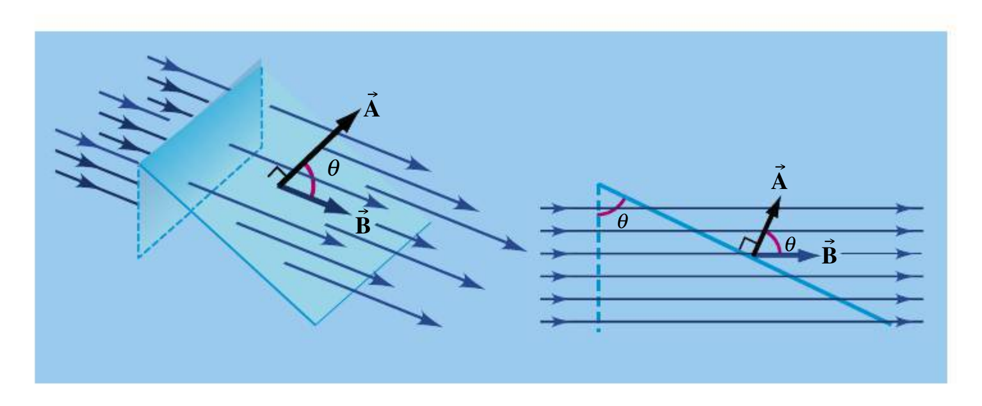


Figure 10.8
Le flux magnétique à travers une surface plane dans un champ uniforme dépend de la projection de l'aire perpendiculaire aux lignes de champ.

L'unité SI de flux magnétique est le **weber** (Wb). D'après l'équation 10.1, on constate que

$$1 \text{ T} = 1 \text{ Wb/m}^2$$

Si le champ n'est pas uniforme ou si la surface n'est pas plane, on subdivise la surface en petits éléments infinitésimaux sur chacun desquels l'équation 10.1 est valable, on calcule le flux $d\Phi_B = \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = B\, dA \cos\theta$ qui traverse l'un de ces éléments de surface $d\vec{\mathbf{A}}$ et on additionne (intègre) pour obtenir le flux total. Ce calcul correspond à l'intégrale de surface suivante :

Flux magnétique

$$\Phi_B = \int d\Phi_B = \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \qquad (10.2)$$

Si on compare cette intégrale à celle de l'équation 3.3 (théorème de Gauss), on note l'absence de cercle sur le symbole d'intégration. Cela indique que, contrairement au flux électrique, nous ne calculerons jamais le flux magnétique traversant une surface *fermée*. Dans les figures 10.3 à 10.7, c'est le flux au travers d'une surface *plane* qui nous intéresse.

Enfin, soulignons que l'orientation du vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ est pour le moment ambiguë, car il y a deux sens possibles qui lui permettent d'être perpendiculaire à la surface. Dans cette section, on choisira le sens qui donne un flux positif ; à la section suivante, nous verrons une convention qui fixe le sens de $\vec{\mathbf{A}}$ et, donc, le signe du flux.

Exemple 10.1

Un cadre carré dont chaque côté mesure 20 cm pivote autour de l'axe des *y*. Il est orienté comme le montre la figure 10.9*a*. Le champ extérieur est $\vec{\mathbf{B}} = 0{,}5\vec{\mathbf{i}}$ T. Quelle est la variation du flux magnétique si l'angle α passe de 20° à 50° ?

Solution

Pour ce genre de situation, il est souvent utile de refaire le schéma sous une autre perspective telle, par exemple, la vue d'en haut représentée à la figure 10.9*b*. De cette façon, tous les vecteurs sont parallèles au plan de la page et la boucle lui est perpendiculaire. Cela évite les ambiguïtés de la figure 10.9*a*.

Puisque le champ est uniforme, le flux est

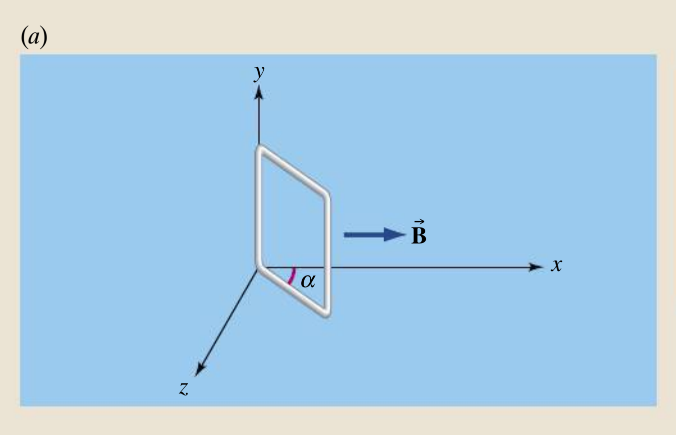
$$\Phi_B = BA \cos\theta$$

avec $\theta = 90° - \alpha$.

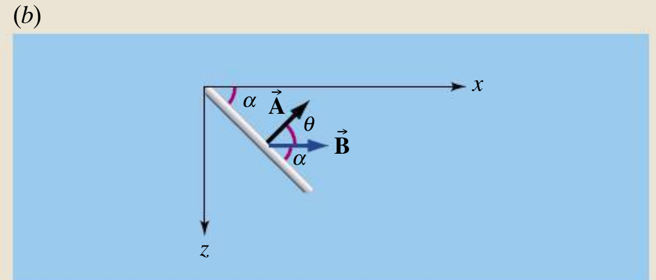
Lorsque $\alpha = 20°$, $\theta = 70°$ et

$$\Phi_i = BA\cos\theta = (0{,}5 \text{ T})(0{,}2 \text{ m})^2 \cos 70° = 6{,}8 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 10.9**
Le flux à travers le cadre change lorsque l'orientation du cadre change.

Lorsque α = 50°, θ = 40° et

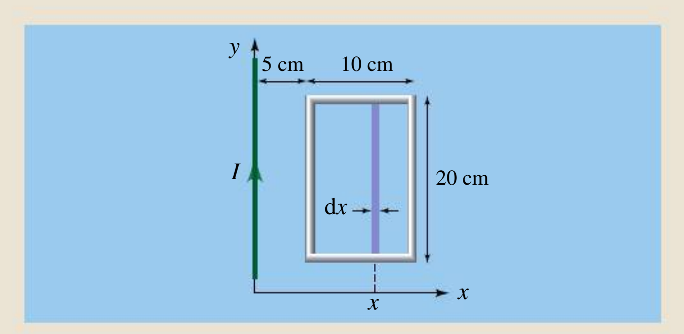
$$\Phi_f = BA \cos \theta = (0,5 \text{ T})(0,2 \text{ m})^2 \cos 40° = 1,53 \times 10^{-2} \text{ Wb}$$

La variation est donc

$$\Delta\Phi = \Phi_f - \Phi_i = 8,5 \times 10^{-3} \text{ Wb}$$

Exemple 10.2

Un cadre conducteur rectangulaire de 10 cm par 20 cm est placé à 5 cm d'un long fil conducteur rectiligne dans lequel circule un courant I (figure 10.10). (a) Calculer, en fonction de I, le flux magnétique qui traverse le cadre. (b) Quelle est la variation de flux si le courant passe de 10 A à 2 A ?



▲ **Figure 10.10**

Le champ magnétique produit par le fil rectiligne n'est pas uniforme. Pour calculer le flux traversant le cadre, il faut donc intégrer.

Solution

(a) Le courant dans le fil conducteur rectiligne produit un champ magnétique dont le module est donné par l'équation 9.1 ($B = \mu_0 I/2\pi R$). Ce champ n'est donc *pas* uniforme et il faut utiliser l'équation 10.2 pour calculer le flux. ■

Le champ a la même valeur pour tous les points situés à la même distance du fil. On subdivise donc l'aire du cadre rectangulaire en éléments de surface qui ont la forme de bandes rectangulaires verticales de largeur infinitésimale dx et de longueur 20 cm. L'un de ces éléments de surface est illustré en mauve à la figure 10.10. Le champ en chaque point de cet élément a le même module donné par

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi|x|} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

où $|x|$ est égal à R, la distance entre l'élément de surface et le fil. Ce champ étant perpendiculaire au plan du cadre rectangulaire, le flux qui traverse un élément de surface est donc

$$d\Phi_B = B\, dA \cos\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dA \cos 0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} 0,20\, dx$$

Dans cette équation, x peut prendre toutes les valeurs entre 5 cm et 15 cm. Pour obtenir le flux total, on intègre donc entre ces bornes :

$$\Phi_B = \int d\Phi_B = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 0,20 \int_{0,05}^{0,15} \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 0,20 \ln x \Big|_{0,05}^{0,15} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} 0,20 \ln 3$$

Après substitution des valeurs numériques, on obtient $\Phi_B = (0,4 \times 10^{-7})(\ln 3)I = (4,39 \times 10^{-8})I$, où Φ_B est en webers et I est en ampères.

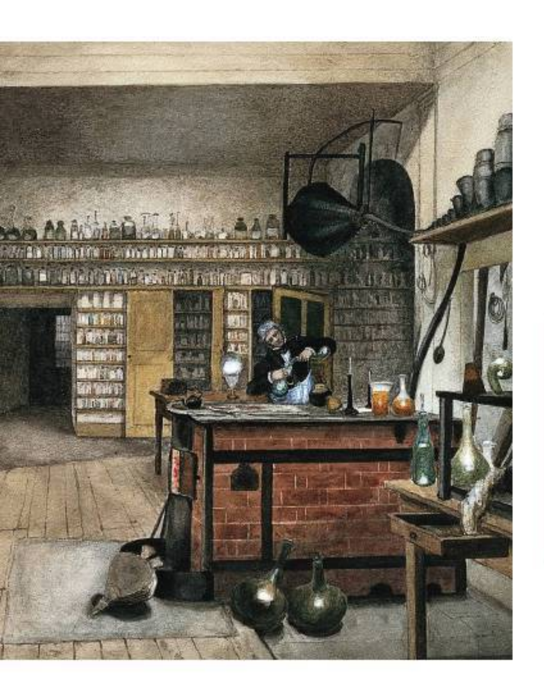
(b) Quand le courant est de 10 A, le flux initial est $\Phi_i = 4,39 \times 10^{-7}$ Wb. Le flux final, quand le courant est de 2 A, est $\Phi_f = 8,79 \times 10^{-8}$ Wb. La variation est donc

$$\Delta\Phi = \Phi_f - \Phi_i = -3,52 \times 10^{-7} \text{ Wb}$$

10.3 LA LOI DE FARADAY ET LA LOI DE LENZ

La production d'un courant dans n'importe quel circuit nécessite une source d'énergie, c'est-à-dire une f.é.m. Au début de la section précédente, nous avons déduit qu'un courant (donc une f.é.m.) était induit dans un circuit lorsque le nombre de lignes de champ traversant ce circuit changeait avec le temps. Faraday avait fait ce constat et l'avait poussé plus loin : il énonça que la f.é.m. induite est *proportionnelle au taux de variation* du nombre de lignes de champ. En fonction du flux magnétique, on peut exprimer cet énoncé comme

$$\mathscr{E} \propto \left|\frac{d\Phi_B}{dt}\right|$$



Faraday au travail dans son laboratoire à l'Institut Royal.

Pour que cette relation de proportionnalité devienne une équation, il faut ajouter un facteur de proportionnalité approprié qui dépend du système d'unités utilisé. Dans le système SI, les unités sont ajustées de façon à ce que cette constante vaille exactement 1. On obtient donc l'équation suivante, qui est une version incomplète de la loi de Faraday, où il ne manque que les signes :

$$\mathscr{E} = \left|\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}\right| \tag{10.3a}$$

Relation entre la f.é.m. induite dans un circuit et le flux magnétique

En valeur absolue, la f.é.m. induite dans un circuit fermé est égale à la dérivée par rapport au temps du flux magnétique traversant la surface délimitée par le circuit.

Notons que la f.é.m. induite n'est pas confinée en un point particulier (comme c'est le cas quand elle est produite par une pile, par exemple). Elle est plutôt distribuée sur l'ensemble de la boucle.

Dans les cas où le champ est uniforme, le flux est donné par l'équation 10.1. D'après la règle de dérivation d'un produit de fonction (voir l'annexe C), la dérivée de cette équation donne

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} A \cos\theta + B\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\cos\theta - BA\sin\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} \tag{10.3b}$$

Dans cette équation, trois termes contribuent au taux de variation du flux : ils représentent respectivement les contributions de la variation dans le temps du module du champ B*, de l'aire A et de l'angle θ. Dans chacune des expériences de la section 10.1, un seul de ces termes est non nul : par exemple, à la figure 10.5 (p. 410), $\mathrm{d}A/\mathrm{d}t$ est non nul, et à la figure 10.6 (p. 410), $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ est non nul. Dans tous les autres cas, ce qui change est la valeur de B là où la boucle conductrice est située. Notons que cette variation $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$ peut être due à la variation du champ lui-même (voir les figures 10.3 et 10.4*a*, p. 409) ou encore à un mouvement de translation de la boucle vers un endroit où le module du champ est différent (voir la figure 10.7, p. 410). Cela montre l'équivalence de ces deux situations.

On remarque aussi que le signe négatif devant le troisième terme signifie qu'une *augmentation* de θ, tel que défini à la figure 10.8, p. 411, entraîne une *diminution* du flux (pour θ entre 0° et 90°).

Si le champ n'est pas uniforme ou si la surface n'est pas plane, comme aux figures 10.3 (p. 409) et 10.7 (p. 410), le flux doit être calculé au moyen de l'équation 10.2, qui comporte une intégrale. Dans ce contexte, la loi de Faraday qui stipule que la f.é.m. induite s'obtient par la dérivée du flux peut sembler paradoxale : en effet, la dérivée de l'intégrale d'une fonction est égale à la fonction elle-même ! Il n'y a toutefois pas d'erreur ici, car la dérivée et l'intégrale ne font pas intervenir les mêmes variables. Le flux est une intégrale sur l'*espace,* tandis que la dérivée est effectuée par rapport au *temps*. En général, lorsqu'on utilise l'équation 10.2, on a affaire à un champ magnétique qui n'est pas uniforme dans l'espace. Dans ce cas, on fait l'intégrale en premier, puis on effectue la dérivée

* En effet, cette équation étant valable pour un champ *uniforme*, *B* a la même valeur en chaque point de la surface du circuit. Cependant, il peut changer *dans le temps*.

du résultat en fonction du temps. Par exemple, dans l'exemple 10.2, on a obtenu par intégration que le flux qui traverse le cadre rectangulaire est $\Phi_B = (4{,}39 \times 10^{-8})I$. Par conséquent, la dérivée du flux par rapport au temps serait $\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t = (4{,}39 \times 10^{-8})\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$, ce qui montre bien que la dérivée n'annule pas l'effet de l'intégrale.

La loi de Lenz

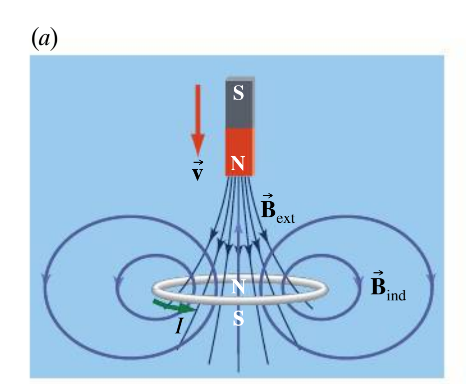
L'équation 10.3*a* nous renseigne sur la grandeur de la f.é.m. induite, mais pas sur sa polarité, laquelle détermine dans quel sens circule le courant induit. Nous allons maintenant présenter une règle simple, proposée en 1834 par le physicien russe Heinrich Friedrich Lenz (1804-1865), qui permet de déterminer cette polarité.

À la figure 10.11*a*, le barreau aimanté produit le champ $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}$. Pendant que le pôle nord de ce barreau s'approche de la boucle, $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}$ augmente dans le plan de la boucle, donc un courant induit circule dans la boucle. Ce courant induit, comme tout courant, produit à son tour un champ magnétique, $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ind}}$ (voir la section 9.3). En somme, la boucle où circule le courant induit se comporte comme un petit aimant.

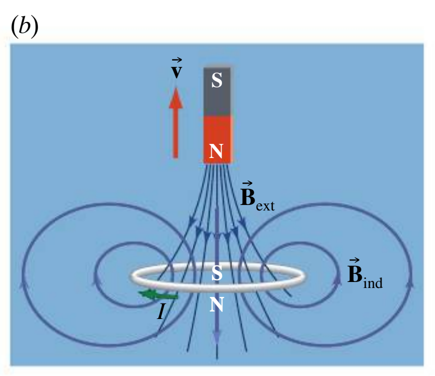
L'énoncé initial de la règle formulée par Lenz est la suivante : *la force magnétique exercée sur le barreau aimanté par le champ provenant du courant induit est toujours orientée de façon à nuire au mouvement relatif qui l'a produite.*

À la figure 10.11*a*, le barreau aimanté s'approche de la boucle. Pour nuire à ce mouvement, c'est-à-dire repousser le barreau, la boucle doit devenir un « aimant induit » orienté dans le sens opposé au barreau aimanté (les pôles nord doivent se faire face). Le courant induit circule donc dans le sens antihoraire, vu du barreau aimanté. À l'inverse, si on éloigne le barreau aimanté (figure 10.11*b*), il est attiré par la boucle. Pour ce faire, l'« aimant induit » doit être orienté dans le même sens que le barreau (la face supérieure de la boucle doit se comporter comme un pôle sud). Le courant induit circule donc dans le sens horaire, vu du barreau aimanté.

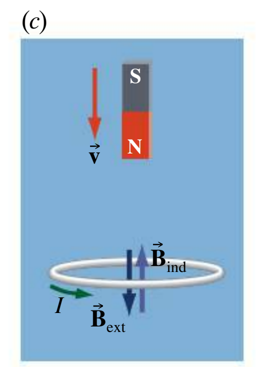
(*a*)



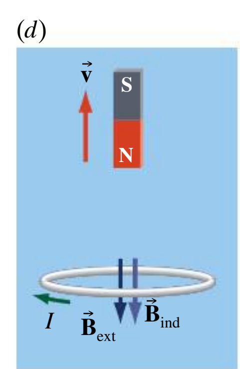
(*b*)



(*c*)



(*d*)



▼ **Figure 10.11**

(*a*) Quand on approche le barreau aimanté, la boucle devient un aimant induit qui repousse le barreau. (*b*) Quand on éloigne le barreau aimanté, l'aimant induit l'attire. (*c*) Lorsque le flux à travers la boucle augmente, le flux correspondant au champ magnétique induit s'oppose à cette augmentation. (*d*) Lorsque le flux à travers la boucle diminue, le flux correspondant au champ magnétique du courant induit essaie de maintenir le flux traversant la boucle. Note : Les figures (*c*) et (*d*) ne montrent que le champ magnétique sur l'axe du barreau aimanté et de la boucle.

Bien que pratique, l'énoncé initial de Lenz ne s'applique qu'aux cas où il y a mouvement relatif. Il n'aurait aucune utilité pour déterminer le sens du courant induit à la figure 10.4*a* (p. 409), par exemple. Environ trente ans plus tard, J. C. Maxwell donna un énoncé plus général de la **loi de Lenz** :

Loi de Lenz

L'effet de la f.é.m. induite est tel qu'il s'oppose à la *variation de flux* qui produit cette f.é.m. induite.

Pour comprendre comment la f.é.m. induite peut avoir un impact sur le flux Φ_B qui apparaît dans l'équation 10.3*a*, il suffit de saisir que ce flux est celui du champ *résultant* $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}} + \vec{\mathbf{B}}_{\text{ind}}$. Si $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ind}}$ est orienté dans le même sens que $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}$, son apparition augmente le flux ; sinon, elle le diminue.

Dans l'ensemble de ce chapitre, nous étudions des situations où $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ind}}$ est négligeable par rapport à $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}$, de sorte qu'on puisse calculer le flux résultant Φ_B en ignorant $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ind}}$. Il n'en demeure pas moins que $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ind}}$ doit être orienté de manière à pouvoir nuire, bien que de façon négligeable, à la variation de Φ_B. Il est donc essentiel de déterminer le sens de $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ind}}$, même si ce champ est négligeable, pour appliquer la loi de Lenz.

Nous allons maintenant réexaminer la figure 10.11 pour montrer que la loi de Lenz telle que reformulée est équivalente à l'énoncé initial. La figure 10.11*c* est une simplification de la figure 10.11*a* où nous n'avons illustré que les champs sur l'axe de la boucle afin de mieux visualiser leurs flux. Au fur et à mesure que l'aimant s'approche, $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}$ augmente au centre de la boucle, donc le flux traversant la boucle augmente. Cette variation du flux fait apparaître une f.é.m. induite qui fera circuler un courant induit, lequel produira $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ind}}$. Pour nuire à l'augmentation (variation) du flux *résultant*, $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ind}}$ doit être opposé à $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}$. Le courant induit doit donc circuler dans le sens antihoraire, vu de l'aimant, comme nous l'avions déjà déduit. À la figure 10.11*d*, qui simplifie la figure 10.11*b*, on éloigne l'aimant. Cette fois, comme $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}$ diminue, le flux traversant la boucle diminue. Pour que son apparition nuise à la diminution (variation) du flux résultant, $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ind}}$ doit être *dans le même sens* que $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}$. En effet, le champ $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ind}}$ ne s'oppose pas au champ $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}$, mais bel et bien à la *variation* de son flux : puisque le flux diminue, $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ind}}$ doit au contraire *renforcer* $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ext}}$ pour nuire à la diminution de flux.

En 1851, Hermann Ludwig von Helmholtz (1821-1894) fit remarquer que la loi de Lenz n'était qu'une conséquence de la conservation de l'énergie. Pour le comprendre, considérons la figure 10.11*a*. Si le champ magnétique du courant induit venait renforcer le champ extérieur, ce champ supplémentaire entraînerait une augmentation du courant induit. Le courant plus intense créerait alors un champ induit plus grand, qui à son tour produirait un courant induit plus intense, et ainsi de suite. Il est évident que cette escalade n'est pas possible sur le plan énergétique. Un agent extérieur (ici, la main qui manipule l'aimant) doit fournir l'énergie nécessaire pour créer la f.é.m. induite.

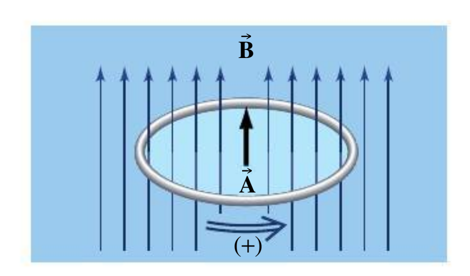
On note aussi que la loi de Lenz est exclusivement empirique : elle correspond aux résultats des expériences, mais n'élucide pas leurs causes physiques. Même avec l'interprétation qu'en fait Helmholtz, on peut seulement prédire le sens approprié du courant induit en éliminant un des deux sens, impossible sur le plan énergétique, mais on n'explique pas plus *pourquoi* un courant circule dans le sens observé. Nous reviendrons sur les causes physiques du courant induit (la force qui déplace les charges) à la section 10.5.

Conventions de signes

Nous allons maintenant fusionner la loi de Lenz et l'équation 10.3*a* en une seule équation. Mais pour que cette simplification soit possible, il y aura un prix à payer : la f.é.m. et le flux magnétique, qui étaient des grandeurs positives jusqu'à la section précédente, auront maintenant un signe.

Le premier signe permet d'exprimer la polarité de la f.é.m. induite. Pour ce faire, nous définissons la *convention de signe* suivante : si un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ est initialement présent, on utilise notre main droite avec le pouce

orienté dans le sens de $\vec{\mathbf{B}}$ et le sens dans lequel nos doigts peuvent s'enrouler naturellement donne le sens du courant que produirait une *f.é.m. positive*, comme à la figure 10.12.

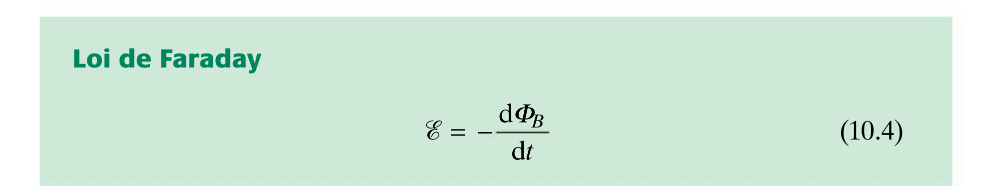


▲ **Figure 10.12**

Le vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ et le sens positif de la f.é.m. sont déterminés par la règle de la main droite, le pouce étant pointé selon l'orientation du champ extérieur.

Il faut aussi décider du signe du flux dans l'équation 10.3*a*. Pour ce faire, nous définissons une seconde convention fixant le sens du vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ dans le calcul du flux. Nous choisissons l'orientation du vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ de façon à ce que le flux initial traversant la surface délimitée par la boucle soit positif. À la figure 10.12, où un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ est initialement présent, cela revient à choisir $\vec{\mathbf{A}}$ vers le haut plutôt que vers le bas.

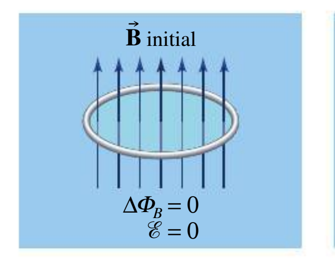
Sur la base de ces deux conventions, la figure 10.13 nous montre que le signe de la f.é.m. est toujours opposé au signe de la variation de flux $\Delta\Phi_B$. On peut incorporer cette caractéristique dans la loi de Faraday en y faisant figurer un signe négatif. L'énoncé moderne de la **loi de Faraday** donnant la f.é.m. produite par induction électromagnétique est donc

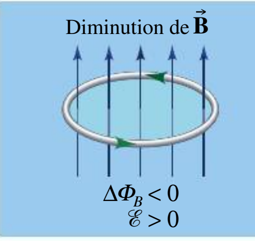


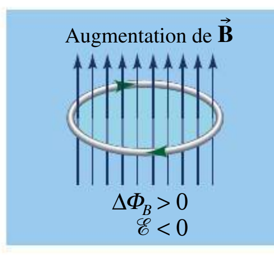
Loi de Faraday

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \qquad (10.4)$$

Tout comme la loi de Lenz, cette équation, fondée sur les observations expérimentales de Faraday, permet de prédire la f.é.m. induite, mais n'en explique pas les causes physiques (voir la section 10.5).







◀ **Figure 10.13**

Le signe de la f.é.m. induite est toujours opposé à celui de la variation de flux.

Supposons que la boucle soit remplacée par une bobine comportant N spires. Si le flux traversant chaque spire est le même, chacune des spires est le siège de la même f.é.m. induite. (Cela n'est rigoureusement valable que si les spires sont parfaitement confondues ou alors plongées dans un champ uniforme.) Comme toutes ces f.é.m. sont de même sens, elles sont en série. La f.é.m. induite totale dans la bobine de N spires est donc

Loi de Faraday appliquée à *N* spires traversées par un flux magnétique identique

$$\mathscr{E} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \qquad (10.5)$$

où Φ_B est le flux traversant *chaque* spire.

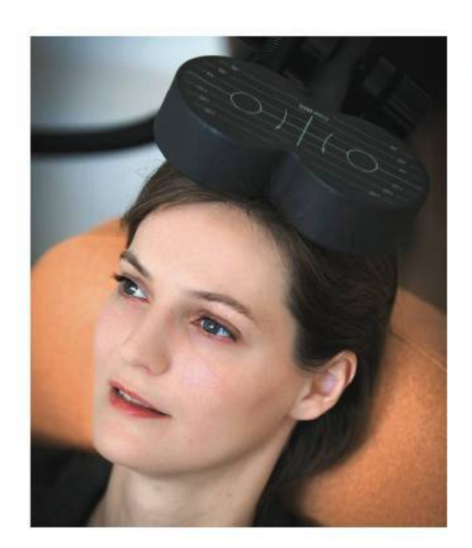
La production d'une f.é.m. induite dans une boucle permet souvent de transformer de l'énergie mécanique en énergie électrique, puis en énergie thermique. Par exemple, dans le cas représenté à la figure 10.11 (p. 415), un apport d'énergie mécanique externe est nécessaire pour déplacer l'aimant contre la force

d'attraction ou de répulsion de la boucle. Par l'entremise de la f.é.m. induite, cette énergie engendre un courant dans la boucle : la boucle s'échauffe, et l'énergie se transforme finalement en chaleur.

Dans l'ensemble de ce chapitre, nous considérerons que $\vec{\mathbf{B}} \approx \vec{\mathbf{B}}_{ext}$ pour calculer le flux dans les équations 10.4 et 10.5. Le chapitre suivant portera sur les cas où $\vec{\mathbf{B}}_{ind}$ n'est pas négligé.

L'induction électromagnétique possède de nombreuses applications biomédicales, en particulier la *stimulation magnétique transcrânienne* (SMT), un outil qui permet de diagnostiquer des troubles neurologiques. On place le patient sous une petite bobine de fil dans laquelle on fait circuler une brève impulsion de courant, ce qui produit un champ magnétique variable (figure 10.14). Il en résulte des courants électriques dans une zone ciblée du cortex cérébral, lesquels excitent localement les neurones. Par exemple, une stimulation du cortex moteur entraîne normalement un mouvement des muscles contrôlés par cette zone du cortex. L'absence d'une réponse permet de déceler un fonctionnement anormal dû aux lésions causées par un accident ou une maladie.

La SMT, si elle est employée de façon répétée, peut aussi servir au traitement de plusieurs troubles neurologiques ou psychiatriques. En stimulant toujours une même zone, on peut induire des adaptations qui modifient durablement l'activité de la zone affectée. Enfin, la SMT est aussi utilisée comme outil de recherche, par exemple pour simuler des lésions temporaires : en choisissant avec soin la fréquence de stimulation et son intensité, on peut empêcher tout un groupe de neurones de répondre à l'excitation normale. Les impacts de cette « lésion » temporaire peuvent ainsi être observés directement.

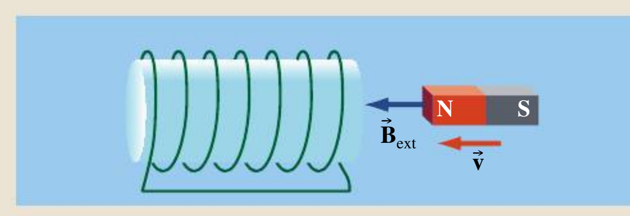


▲ **Figure 10.14**

La stimulation magnétique transcrânienne utilise la production d'une f.é.m. induite pour exciter ou inhiber une zone ciblée du cortex cérébral.

Exemple 10.3

On rapproche d'une bobine le pôle nord d'un aimant (figure 10.15). (a) Dans quel sens est le courant induit dans la portion horizontale de fil, sous la bobine ? (b) Dans quel sens est la force magnétique résultante qui s'exerce sur la bobine ?



▲ **Figure 10.15**

On rapproche d'une bobine le pôle nord d'un aimant.
Note : La figure ne montre que le champ magnétique existant sur l'axe du barreau aimanté.

Solution

(a) Le champ $\vec{\mathbf{B}}_{ext}$ de l'aimant à l'intérieur de la bobine est orienté vers la gauche, car les lignes de champ magnétique sortent par le pôle nord de l'aimant. Le flux magnétique qui traverse la bobine est donc orienté vers la gauche, et il augmente puisque l'aimant se rapproche.

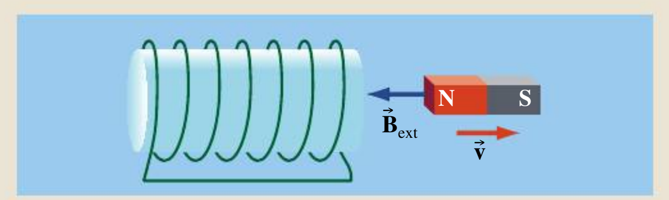
Par la loi de Lenz, la bobine induira, sur son axe, un champ magnétique orienté vers la droite qui s'oppose à l'augmentation du flux vers la gauche. ■

Par la règle de la main droite avec le pouce vers la droite (voir l'énoncé de cette règle à la p. 367 de la section 9.3), on trouve que le courant induit dans la bobine circule dans le sens antihoraire, vu de l'aimant. En suivant le fil, on en déduit qu'il circule *vers la droite* dans la portion horizontale de fil, sous la bobine.

(b) Puisque la bobine produit un champ magnétique sur son axe vers la droite, on peut déterminer les pôles induits pour la bobine : nord à droite et sud à gauche. Leurs pôles nord se faisant face, la bobine et l'aimant se repoussent : la bobine subit donc une force *vers la gauche*. L'énoncé initial de Lenz aurait aussi permis de déduire la même chose. ■

Exemple 10.4

Répondre aux mêmes questions qu'à l'exemple précédent, mais en considérant cette fois que l'on *éloigne* de la bobine le pôle nord de l'aimant (figure 10.16).



▲ **Figure 10.16**

On éloigne d'une bobine le pôle nord d'un aimant.
Note : La figure ne montre que le champ magnétique existant sur l'axe du barreau aimanté.

Solution

(a) Le champ $\vec{B}_{ext}$ de l'aimant à l'intérieur de la bobine est orienté vers la gauche, car les lignes de champ magnétique sortent par le pôle nord de l'aimant. Le flux magnétique qui traverse la bobine est donc orienté vers la gauche, et il diminue puisque l'aimant s'éloigne.

Par la loi de Lenz, la bobine induira, sur son axe, un champ magnétique qui s'oppose à la diminution du flux ; il est donc orienté vers la gauche, afin de renforcer le flux. ■

Par la règle de la main droite avec le pouce vers la gauche, on trouve que le courant induit dans la bobine circule dans le sens horaire, vu de l'aimant. En suivant le fil, on en déduit qu'il circule *vers la gauche* dans la portion horizontale de fil, sous la bobine.

(b) Puisque la bobine produit un champ magnétique sur son axe vers la gauche, on peut déterminer les pôles induits pour la bobine : nord à gauche et sud à droite. Le pôle nord de l'aimant fait face au pôle sud de la bobine, de sorte que l'aimant et la bobine s'attirent. La bobine subit donc une force *vers la droite*. L'énoncé initial de Lenz aurait permis de déduire la même chose. ■

Exemple 10.5

Considérer à nouveau les deux exemples de la section 10.2. (a) Dans le cas décrit à l'exemple 10.1 (voir la figure 10.9, p. 412), quel est le sens du courant induit dans la partie du cadre qui est confondue avec l'axe des y ? (b) Dans le cas de l'exemple 10.2 (voir la figure 10.10, p. 413), le courant induit dans le cadre circule-t-il dans le sens horaire ou antihoraire sur la figure ?

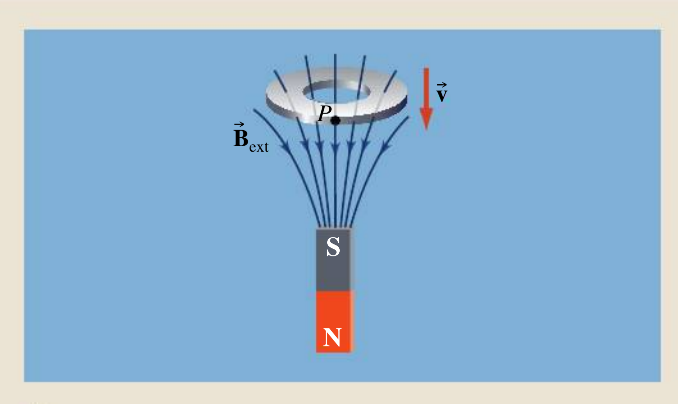
Solution

(a) Le flux magnétique traversant le cadre augmente. Le flux dû au champ magnétique *induit* $\vec{B}_{ind}$ doit s'opposer à cette augmentation. Ici, $\vec{B}_{ind}$ n'est pas parallèle au champ extérieur : au centre du cadre, sa direction est perpendiculaire au plan de la boucle. Pour s'opposer à la croissance du flux, il doit être en sens inverse par rapport à $\vec{A}$ sur la figure 10.9 (p. 412). D'après la règle de la main droite, le courant induit dans le cadre est orienté vers *le bas* le long de l'axe des y.

(b) Le cadre est plongé dans le champ magnétique $\vec{B}_{ext}$ que produit le fil. Selon la règle de la main droite, ce champ est perpendiculaire à la page et entrant dans la page partout à la droite du fil, là où le cadre est situé. Le courant dans le fil rectiligne diminue, donc le champ magnétique $\vec{B}_{ext}$ qu'il produit diminue lui aussi, ce qui entraîne la diminution du flux qui traverse le cadre. Le flux dû à $\vec{B}_{ind}$ doit nuire à cette diminution, donc *renforcer* le flux produit par le fil rectiligne. Pour ce faire, $\vec{B}_{ind}$ doit lui aussi avoir une composante entrant dans la page. La règle de la main droite nous apprend donc que le courant induit circule dans le sens horaire dans le cadre.

Exemple 10.6

On laisse tomber un anneau conducteur sous l'effet de la gravité au-dessus du pôle sud d'un aimant (figure 10.17). (a) Dans quel sens est le courant induit au point P de l'anneau ? (b) Dans quel sens est la force magnétique résultante qui s'exerce sur l'anneau ?



▲ **Figure 10.17**

Un anneau conducteur tombe sous l'effet de la gravité au-dessus du pôle sud d'un aimant.

Solution

(a) Le champ $\vec{\mathbf{B}}_{ext}$ de l'aimant traversant l'anneau est orienté vers le bas, car les lignes de champ magnétique pénètrent dans l'aimant par son pôle sud. Le flux magnétique qui traverse l'anneau est orienté vers le bas, et il augmente puisque l'anneau, en tombant, se rapproche de l'aimant et baigne donc dans un champ de plus en plus intense.

Par la loi de Lenz, l'anneau induira, sur son axe, un champ magnétique orienté vers le haut qui s'oppose à l'augmentation du flux vers le bas. ■

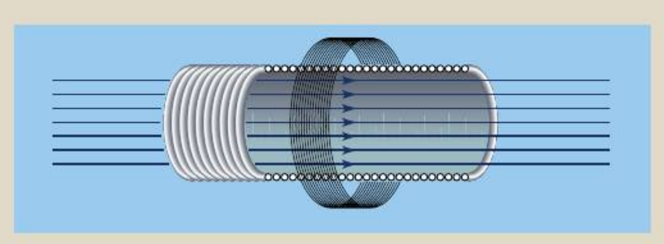
Par la règle de la main droite avec le pouce vers le haut, on trouve un sens de courant induit dans l'anneau qui correspond à un courant *vers la droite* au point *P*.

(b) Puisque l'anneau produit un champ magnétique sur son axe vers le haut, on peut déterminer les pôles induits pour l'anneau : nord en haut et sud en bas. Leurs pôles sud se faisant face, l'anneau et l'aimant se repoussent, et l'anneau subit donc une force magnétique vers le haut. L'énoncé initial de Lenz aurait permis de déduire la même chose.

L'anneau tombe donc moins vite que sous l'effet de la gravitation seule. On peut aussi dire qu'une partie du travail fait par la gravité sur l'anneau sert à faire circuler le courant induit. Ainsi, il est normal que l'anneau gagne moins d'énergie cinétique que dans le cas de la chute libre. ■

Exemple 10.7

Un très long solénoïde comporte 10 spires/cm et a un rayon de 2 cm. Une bobine circulaire plane de rayon 4 cm et comportant 15 spires est placée autour du solénoïde, son plan étant perpendiculaire à l'axe du solénoïde (figure 10.18). (a) Si le courant dans le solénoïde chute régulièrement de 3 A à 2 A en 0,05 s, quelle est la f.é.m. induite dans la bobine ? (b) Dans quel sens circule le courant induit dans la bobine, si on regarde celle-ci depuis le côté droit ?



▲ **Figure 10.18**

Une bobine entourant un long solénoïde parcouru par un courant variable. La bobine est le siège d'une f.é.m. induite bien que les lignes du champ magnétique soient confinées à l'intérieur du solénoïde.

Solution

(a) D'après l'équation 9.13, le module du champ magnétique à l'intérieur d'un long solénoïde est $B_1 = \mu_0 nI$. De plus, le champ magnétique est $B_2 = 0$ à l'extérieur du solénoïde.

Ici, on ne peut pas utiliser l'équation 10.1 directement. En effet, le champ n'est pas uniforme sur l'ensemble de la surface de la bobine (un disque de 4 cm de rayon), son module étant non nul seulement sur la partie de cette surface qui intercepte le solénoïde (un disque de 2 cm de rayon). Il faut donc subdiviser la surface de la bobine en deux parties : l'une, de surface A_1, qui est située dans le solénoïde (traversée par le champ B_1), et l'autre, de surface A_2, située hors du solénoïde (traversée par le champ B_2). ■

Le flux traversant la bobine est donc

$$\Phi_B = B_1A_1 + B_2A_2 = B_1A_1 + 0 = B_1A_1$$

où A_1 est l'aire de la section du solénoïde. Comme le courant chute *régulièrement*, le champ magnétique aussi. On peut ainsi écrire que $d\Phi_B/dt = \Delta\Phi_B/\Delta t$. D'après l'équation 10.5, la f.é.m. induite est donc

$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= -N\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t}\\ &= -N\mu_0 nA_1\frac{\Delta I}{\Delta t}\end{aligned}$$

En utilisant les valeurs données, $n = 1000$ spires/m, $A_1 = \pi(2 \times 10^{-2}\ \text{m})^2$ et $\Delta I/\Delta t = -20$ A/s, on trouve $\mathscr{E} = +4{,}74 \times 10^{-4}$ V.

Ce qui est particulier dans cet exemple, c'est qu'on peut se demander comment un solénoïde peut induire une f.é.m. dans une région de l'espace où son propre champ magnétique est nul. Les sections 10.5 et 10.6 apportent une explication à ce phénomène. ■

(b) Nous répondrons à cette question de deux façons: d'abord en utilisant les conventions de signes, ensuite en appliquant directement la loi de Lenz.

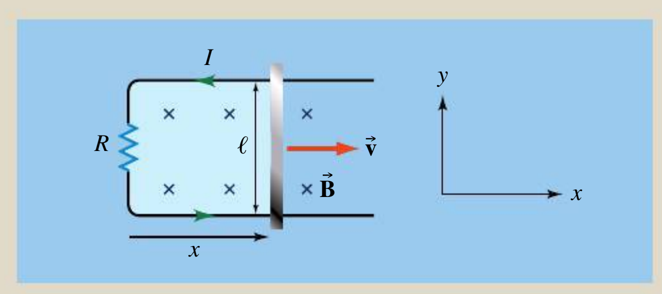
En (a), nous avons obtenu un signe positif pour $\mathscr{E}$. Cela signifie qu'en plaçant le pouce dans le sens initial du champ magnétique, le courant circule dans le sens indiqué par les doigts (voir la figure 10.12, p. 417). Vu du côté droit, le courant induit circule donc dans le sens antihoraire.

On obtient le même résultat avec la loi de Lenz en notant que le flux diminue, donc que le champ magnétique induit est orienté dans le même sens que celui du solénoïde, puis en appliquant la règle de la main droite avec le pouce vers la droite.

Dans une telle situation où il n'y a aucun mouvement relatif, on note qu'aucune force n'est exercée sur la bobine. La seule façon d'appliquer la loi de Lenz est d'utiliser la variation de flux, l'énoncé initial de Lenz étant inutilisable. ■

Exemple 10.8

Une tige métallique de longueur ℓ glisse avec une vitesse constante $\vec{\mathbf{v}}$ sur des rails conducteurs qui se terminent par une résistance R. Le champ magnétique extérieur $\vec{\mathbf{B}}$ est constant et uniforme, orienté perpendiculairement au plan des rails (figure 10.19). Déterminer: (a) l'intensité et le sens du courant circulant dans la résistance; (b) la puissance dissipée dans la résistance; (c) la puissance mécanique nécessaire pour tirer la tige.



▲ **Figure 10.19**

Lorsqu'une tige se déplace sur des rails conducteurs, on observe un courant induit dans la direction indiquée.

Solution

(a) À l'instant illustré, la tige est située à une distance x de l'extrémité des rails. L'orientation positive du vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ est orienté vers l'intérieur de la page, de sorte que le flux traversant la surface délimitée par la tige et les rails est $\Phi_B = BA = B\ell x$. Le flux augmente parce que l'aire augmente. Sa dérivée est $\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t = B\ell\ \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$. Or, $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v_x$, la composante selon x de la vitesse de la tige. Selon l'équation 10.4, la f.é.m. induite est

$$\mathscr{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = -B\ell v \qquad \text{(i)}$$

où on a tenu compte qu'ici $v_x = v$, le module de la vitesse. D'après la loi des mailles, $\Delta V_R = |\mathscr{E}|$. Selon la loi d'Ohm, le courant induit a pour intensité

$$I = \frac{\Delta V_R}{R} = \frac{|\mathscr{E}|}{R} = \frac{B\ell v}{R} \qquad \text{(ii)}$$

On peut obtenir le sens du courant induit grâce à la loi de Lenz: en apparaissant, le champ magnétique induit doit s'opposer à l'accroissement du flux, ce qui signifie qu'il est opposé au champ externe. D'après la règle de la main droite appliquée avec le pouce hors de la page, on déduit que le courant induit dans le circuit circule dans le sens antihoraire.

On arrive à la même conclusion en utilisant les conventions de signes: si on place le pouce de la main droite selon l'orientation du vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ (vers l'intérieur de la page), les doigts s'enroulent dans le sens horaire, qui correspondrait à une valeur positive de $\mathscr{E}$. Puisque $\mathscr{E}$ dans l'équation (i) est négatif, le courant induit circule dans le sens antihoraire.

(b) La puissance électrique dissipée dans la résistance est

$$P_{\text{élec}} = RI^2 = \frac{(B\ell v)^2}{R} \qquad \text{(iii)}$$

(c) À cause du courant induit qui la traverse, la tige est soumise à une force $\vec{\mathbf{F}}_B = I\vec{\boldsymbol{\ell}} \times \vec{\mathbf{B}}$ (équation 8.4*a*), qui est due au champ extérieur. D'après la règle de la main droite, la force $\vec{\mathbf{F}}_B$ sur la tige est orientée vers la gauche. On pouvait aussi déduire cela d'après l'énoncé initial de Lenz: la force doit nuire au mouvement, donc être dans le sens opposé à celui de $\vec{\mathbf{v}}$. Pour que la vitesse de la tige reste constante, la somme des forces qu'elle

subit doit être nulle (par la première loi de Newton). Il doit donc y avoir un agent extérieur qui exerce une force de même module et d'orientation opposée $\vec{\mathbf{F}}_{ext} = I\ell B\vec{\mathbf{i}}$. La puissance mécanique fournie par l'agent extérieur est

$$P_{méca} = \vec{\mathbf{F}}_{ext} \cdot \vec{\mathbf{v}} = I\ell Bv = \frac{(B\ell v)^2}{R} \qquad \text{(iv)}$$

où nous avons substitué l'équation (ii) pour obtenir le dernier membre.

En comparant les expressions (iii) et (iv), on constate que l'énergie mécanique fournie par l'agent extérieur est entièrement convertie en énergie électrique, puis en énergie thermique. Cette correspondance parfaite peut sembler troublante puisque nous n'avons pas tenu compte de $\vec{\mathbf{B}}_{ind}$ dans le calcul de Φ_B. La question Q16 du chapitre 11 y reviendra. ■

Exemple 10.9

Un barreau métallique se déplace vers la gauche à la vitesse $\vec{\mathbf{v}} = -2\vec{\mathbf{i}}$ cm/s sur un rail en forme de U (figure 10.20*a*). À l'instant $t = 0$, le champ extérieur $\vec{\mathbf{B}}$, de module 0,2 T et sortant de la page, augmente à raison de 0,1 T/s. On donne $\ell = 5$ cm et $x = 5$ cm à $t = 0$. Trouver la f.é.m. induite à l'instant $t = 0$ et le sens du courant induit.

Solution

Dans cet exemple, il y a deux contributions à la variation de flux : la variation de l'aire et celle du champ. Toutefois, le champ étant uniforme, on peut utiliser l'équation 10.1 pour calculer le flux magnétique. Le vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ pointe vers l'extérieur de la page, de sorte que le flux est $\Phi_B = BA = B\ell x$ et $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v_x$ est négatif. Par conséquent,

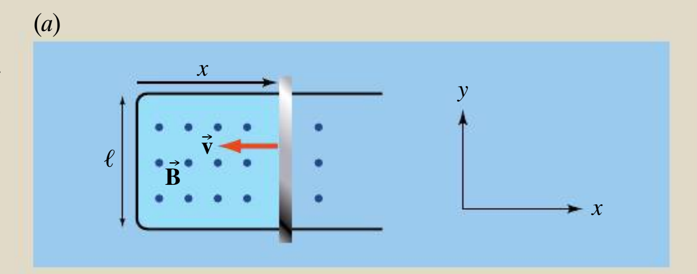
$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} &= B\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}A \\ &= B\ell\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}A \\ &= B\ell v_x + \frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}A \\ &= (0{,}2\ \mathrm{T})(0{,}05\ \mathrm{m})(-0{,}02\ \mathrm{m/s}) + (0{,}1\ \mathrm{T/s})(0{,}0025\ \mathrm{m}^2) \\ &= +5{,}00 \times 10^{-5}\ \mathrm{V}\end{aligned}$$

D'après l'équation 10.4, on a donc $\mathscr{E} = -\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t = -5{,}00 \times 10^{-5}$ V.

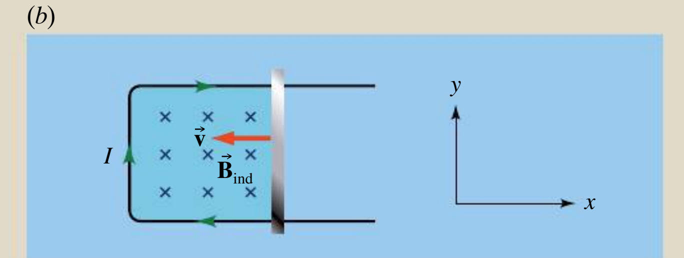
Le sens du courant induit peut être obtenu par la loi de Lenz. La variation d'aire fait diminuer le flux et la variation du champ le fait augmenter, mais au total le flux augmente (on le voit, car $\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t$ est positif). Le flux du champ magnétique induit doit nuire à cette augmentation, donc être dirigé vers la page (figure 10.20*b*). Par la règle de la main droite, le courant induit circule donc dans le sens *horaire*.

On obtient la même chose grâce aux conventions de signes : puisque le vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ pointe hors de la page, le sens positif est antihoraire. Mais $\mathscr{E}$ est négatif, donc fait circuler le courant dans le sens *horaire*. ■

(*a*)



(*b*)

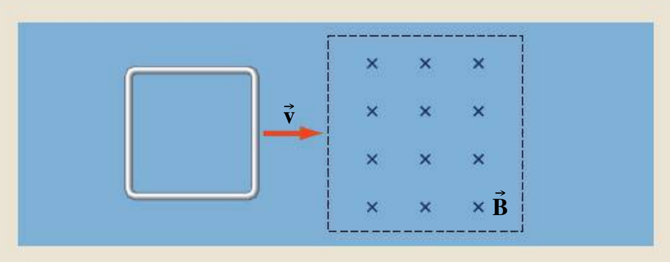


▲ **Figure 10.20**

(*a*) Le courant induit est produit à la fois par le mouvement du barreau et par la variation du module du champ magnétique extérieur. (*b*) Comme le flux à travers le circuit fermé augmente, le champ magnétique du courant induit est de sens opposé au champ extérieur.

Exemple 10.10

Un cadre rectangulaire se déplace à vitesse constante perpendiculairement à un champ magnétique uniforme (figure 10.21). Tracer les graphiques représentant, en fonction du temps, le flux traversant le cadre et la f.é.m. induite dans le cadre, entre l'instant où celui-ci pénètre dans le champ et l'instant où il en sort. Pour tracer ces graphiques, on utilise les conventions de signes habituelles.



▲ **Figure 10.21**
Un cadre rectangulaire se déplace à vitesse constante perpendiculairement à un champ magnétique uniforme. Le champ est nul à l'extérieur de la zone délimitée par la ligne en pointillé.

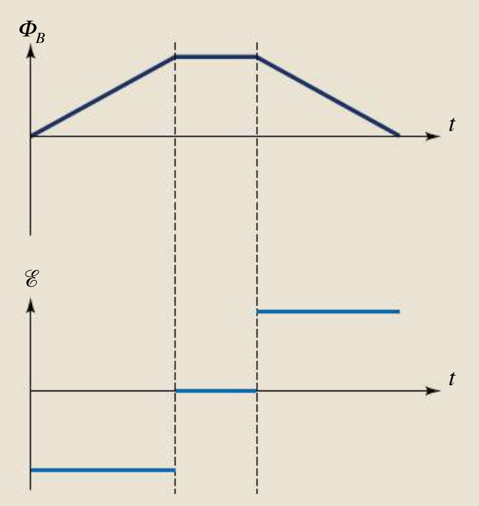
Solution

Selon les conventions de signes, un flux rentrant dans la page est ici positif et une f.é.m. qui produit un courant induit dans le sens horaire est ici positive.

Lorsque le cadre commence à pénétrer le champ, à $t = 0$, le flux est $\Phi_B = B\ell x = B\ell vt$. Le flux augmente linéairement avec le temps. La f.é.m. induite, $\mathscr{E} = -\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t = -B\ell v$, est constante. C'est la première portion des graphiques qu'on voit à la figure 10.22.

Lorsque le cadre est complètement dans le champ, le flux est constant même si le cadre est toujours en mouvement et la f.é.m. est nulle. C'est la deuxième portion des graphiques. ■

À sa sortie du champ, le flux décroît linéairement avec le temps et le sens de la f.é.m. induite est opposé au sens initial. C'est la troisième portion des graphiques.



▲ **Figure 10.22**
Comme le cadre se déplace à vitesse constante, le flux varie linéairement avec le temps et la f.é.m. induite prend des valeurs constantes. Si le cadre est tout entier dans le champ, le flux est constant et la f.é.m. est donc nulle.

APERÇU HISTORIQUE

La découverte de l'induction électromagnétique

Au XVIIIe siècle, on se servait des bouteilles de Leyde pour chauffer des fils conducteurs et pour provoquer des transformations chimiques dans les solutions ioniques. C'étaient autant d'applications illustrant la conversion de l'électricité en chaleur ou en énergie chimique. On savait bien sûr qu'un apport de chaleur pouvait déclencher une réaction chimique et qu'une réaction chimique pouvait produire de la chaleur. La pile de Volta et les autres piles avaient déjà prouvé que les transformations chimiques pouvaient produire de l'électricité. En 1822, Thomas Johann Seebeck (1770-1831) découvrit qu'on pouvait produire un courant électrique en appliquant de la chaleur à la jonction de deux métaux. De tels indices renforçaient de nombreux scientifiques dans leur conviction que toutes les «forces de la nature» étaient reliées entre elles. C'est cette idée qui avait encouragé Œrsted à chercher un lien entre l'électricité et le magnétisme. Peu de temps après, François Arago (1786-1853) montra qu'un barreau de fer devenait aimanté lorsqu'on le plaçait à l'intérieur d'un solénoïde parcouru par un courant. Après avoir constaté que l'électricité (le courant) produisait un effet magnétique dans un barreau de fer, il était tout naturel de chercher à mettre en évidence l'effet inverse : un courant électrique qui serait produit par le magnétisme.

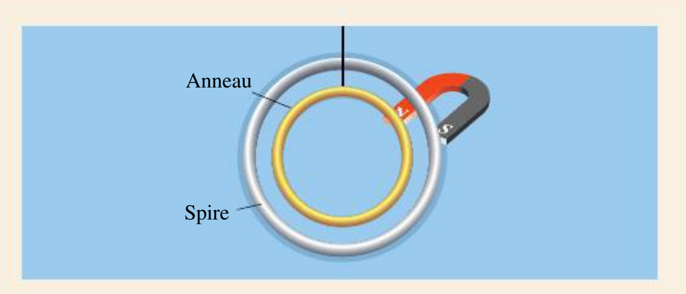
Mais la croyance métaphysique en une «unité des forces de la nature» n'était pas la seule motivation des chercheurs travaillant sur l'induction des courants. On savait qu'un objet chargé pouvait induire des charges dans un conducteur voisin et qu'un barreau aimanté pouvait induire une aimantation temporaire dans un clou en fer. Plusieurs scientifiques se demandaient donc si un courant électrique pouvait induire un courant dans un conducteur voisin. L'histoire de la découverte de l'induction électromagnétique est particulièrement intéressante parce que l'effet avait été observé sous différentes formes sans être reconnu. Et même lorsqu'il fut reconnu, la découverte ne fut pas rendue publique.



En 1821, Ampère montra qu'un solénoïde parcouru par un courant se comporte comme un barreau aimanté et que deux fils conducteurs traversés par des courants exercent des forces magnétiques l'un sur l'autre. Il en conclut que tous les effets magnétiques étaient dus à des courants électriques et il élabora une théorie du magnétisme à partir d'éléments de courant en interaction par l'intermédiaire de forces centrales. Mais la nature exacte des courants dans un aimant n'était pas connue : peut-être s'agissait-il de courants « moléculaires » microscopiques ou de courants macroscopiques décrivant des trajectoires circulaires autour de l'axe de l'aimant.

Contrairement à Ampère, dont l'approche était sophistiquée sur le plan mathématique, Faraday se fia à son intuition pour élaborer des modèles physiques. Il avait été particulièrement frappé par la nature « circulaire » des lignes de forces autour d'un fil conducteur parcouru par un courant. En septembre 1821, il fit une brillante démonstration de cette caractéristique et inventa par la même occasion le moteur électrique (voir l'aperçu historique de la section 8.4). Peu impressionné par les forces centrales de la théorie d'Ampère ou par l'idée d'un magnétisme exclusivement produit par des courants, Faraday réalisa quelques expériences subtiles dans le but de réfuter ces idées. Par exemple, il montra que les « pôles » d'un solénoïde parcouru par un courant n'étaient pas exactement au même endroit que dans un barreau aimanté. Ampère fut alors obligé d'abandonner la notion de courant macroscopique. Pour essayer de sauver sa théorie, il proposa une explication hâtive des expériences de Faraday en faisant intervenir les courants microscopiques. Mais les milieux scientifiques n'apprécièrent pas beaucoup la façon dont Ampère modifia si facilement sa théorie pour l'adapter aux nouveaux résultats expérimentaux.

En 1822, Ampère refit une expérience qui avait échoué afin d'éclaircir cette question sur la nature des courants. Il suspendit un anneau de cuivre à l'intérieur d'une bobine comportant un grand nombre de spires et plaça les pôles d'un aimant de part et d'autre d'un point de la circonférence (figure 10.23). Lorsqu'on faisait circuler le courant dans la bobine, l'anneau tournait d'un certain angle. Lorsqu'on arrêtait le courant, l'anneau revenait à sa position initiale*. Il conclut que l'anneau de cuivre, non magnétique, avait acquis une « aimantation temporaire » à cause de courants induits microscopiques continus. Il ne chercha pas à déterminer le sens de ces courants.



▲ **Figure 10.23**

Un anneau de cuivre suspendu dans le plan d'une spire. Ampère observa que le passage d'un courant dans la spire faisait tourner l'anneau.

Le disque d'Arago

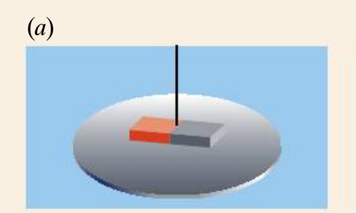
Une autre découverte très intéressante eut lieu en 1824. François Arago, un collègue d'Ampère, s'aperçut que les oscillations d'un barreau aimanté suspendu étaient amorties en présence d'une feuille conductrice. L'année suivante, il démontra qu'un aimant tournant rapidement sur lui-même pouvait faire entrer en rotation un disque de cuivre et, à l'inverse, qu'un disque tournant rapidement sur lui-même pouvait faire tourner une aiguille aimantée. Arago suspendit un électroaimant au-dessus d'un disque tournant et observa sa déviation. Pour Ampère, cela venait simplement confirmer sa théorie selon laquelle les courants étaient la source ultime du magnétisme.

Les travaux d'Arago furent poursuivis à Londres par Charles Babbage (1792-1871) et John Herschel (1792-1871). Ils suspendirent un aimant au-dessus de disques tournant sur eux-mêmes, fabriqués de différents métaux (figure 10.24*a*), et ils s'aperçurent que la déviation de l'aimant dépendait du métal. Par exemple, elle était plus grande pour un disque en cuivre que pour un disque en plomb (la conductivité du cuivre est supérieure à celle du plomb). Aucune déviation n'était observée avec les disques non métalliques. Baggage et Herschel expliquèrent le phénomène en supposant que le disque avait acquis un magnétisme induit temporaire. Ils découpèrent ensuite des fentes radiales (figure 10.24*b*) et virent la déviation diminuer au fur et à mesure que le nombre des fentes augmentait. Ils expliquèrent ce phénomène par la réduction de l'aimantation due à l'insertion des intervalles d'air. L'énigme du disque d'Arago n'était pas résolue et l'intérêt qu'il suscitait s'estompa peu à peu.

La relation entre la déviation de l'aimant suspendu et la conductivité laissait supposer l'existence de courants induits dans les disques. Cette idée était renforcée par le fait que les fentes interrompaient la circulation de ces courants. De plus, le courant induit dans le solénoïde suspendu d'Arago était suffisamment intense pour le faire tourner ! Dans un article où il mentionne sa propre expérience de 1822 et celles de Baggage et Herschel,

* Un courant induit macroscopique circule dans l'anneau lorsqu'on fait circuler le courant. L'anneau aurait dû immédiatement revenir à sa position d'équilibre lorsque le courant induit s'annulait, mais le moment de force de rappel du système de suspension n'était probablement pas suffisant. Le compte rendu de cette expérience ne dit pas avec précision ce qui a exactement été observé.

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 10.24**

(*a*) Un aimant suspendu au-dessus d'un disque tournant rapidement sur lui-même subit un moment de force. La valeur du moment de force dépend de la conductivité du disque, mais ce lien n'a pas été établi à l'époque. (*b*) L'effet sur l'aimant disparaît lorsqu'on découpe des fentes radiales dans le disque (les fentes réduisent considérablement les circuits des courants induits).

Ampère parle explicitement de «petits courants électriques». Autrement dit, il avait parfaitement déduit qu'il s'agissait de courants induits.

Malgré toutes les observations qu'il avait faites, Ampère ne les interpréta pas comme un nouveau phénomène, l'induction électromagnétique, et ce, pour deux raisons. Premièrement, il lui était très difficile d'admettre l'existence de macrocourants parce que son explication des expériences de Faraday l'avait fixé sur un modèle de microcourants. Deuxièmement, il pensait comme tout le monde qu'un courant continu devait induire un courant *continu*. Aveuglé par l'idée préconçue qu'il avait de ce qu'il aurait dû trouver et par son désir de préserver sa théorie, il ne réussit pas à tirer parti de ce qu'il avait sous les yeux, bien qu'il n'y manquât rien. Son histoire est un exemple frappant du fait que ce qu'observe un scientifique, aujourd'hui comme à l'époque, dépend beaucoup de son point de vue ou de sa théorie.

Entre-temps, Faraday avait également cherché pendant plusieurs années à mettre en évidence les courants induits. Lorsqu'il entendit parler de l'expérience d'Ampère avec l'anneau de cuivre, il chercha à la reproduire. Mais à cause d'une erreur dans la traduction en anglais, il utilisa un disque de cuivre au lieu d'un anneau et son expérience échoua, le moment d'inertie du disque étant très supérieur à celui de l'anneau. En 1828, il suspendit un anneau à l'intérieur duquel il introduisit un barreau aimanté. Il essaya ensuite de détecter les courants induits avec d'autres aimants. (Qu'aurait-il observé s'il avait rapidement introduit l'aimant dans l'anneau?) Chacune de ces expériences aurait théoriquement dû mener à la découverte de l'induction électromagnétique, mais les montages expérimentaux n'étaient pas assez sensibles.

Il convient de mentionner ici l'expérience malchanceuse de Daniel Colladon (1802-1893). En 1825, il confectionna un puissant électroaimant; puis, afin de protéger le galvanomètre contre les effets directs de l'aimant, il le mit dans la pièce voisine. Sa prudence lui porta malchance: lorsqu'il alla vérifier la déviation de l'aiguille, l'effet transitoire avait, bien sûr, déjà cessé.

En août 1830, indépendamment des travaux effectués en Europe, Joseph Henry observa la «conversion du magnétisme en électricité», mais il semble qu'il ne prit pas le temps de poursuivre jusqu'au bout ni de publier immédiatement sa découverte. Il montra une extraordinaire insouciance vis-à-vis d'une découverte de première importance. Néanmoins, il fit une nouvelle observation qui avait échappé à Faraday. C'est ce que nous verrons au chapitre suivant.

Sans avoir eu connaissance de la découverte de Henry, Faraday se remit à étudier le problème en 1831 en faisant preuve d'une créativité et d'une assurance étonnantes. Non seulement réussit-il à résoudre l'énigme du disque d'Arago, mais il parvint aussi, avec le générateur homopolaire (figure 10.25), à produire un courant induit *continu*, le résultat que tout le monde cherchait à obtenir depuis une dizaine d'années. Avant même de connaître tous les détails des travaux de Faraday, Ampère se dépêcha de publier son expérience de 1822. D'autres tentèrent également de s'attribuer la paternité de la découverte, à l'exception d'Arago, dont le disque fut la démonstration la plus spectaculaire des courants induits. Une fois l'effervescence passée, Ampère reconnut qu'il ne s'était pas aperçu du rôle essentiel joué par le facteur temps dans les phénomènes d'induction magnétique.

Les quelques expériences simples que nous avons présentées à la section 10.1 (voir les figures 10.3 à 10.7, p. 409-410) semblent directes et évidentes. Mais il ne faut pas oublier que cet exposé découle de tentatives qui s'échelonnèrent sur toute une décennie. Les esprits les plus brillants sur le plan théorique et expérimental ne purent pas ou ne voulurent pas en reconnaître le principe sous-jacent.



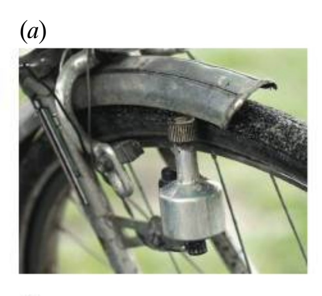
▲ **Figure 10.25**

Le générateur homopolaire de Faraday avec lequel il réussit à produire un courant induit *continu*.

10.4 LES GÉNÉRATEURS

Le **générateur** est une application importante de l'induction électromagnétique qui permet de produire de l'énergie électrique à partir d'énergie mécanique. Des générateurs de petite taille meublent notre quotidien : la dynamo d'une bicyclette ou l'alternateur d'une voiture sont des exemples (figure 10.26*a*). Les génératrices à essence sont d'autres exemples (figure 10.26*b*). De même, des générateurs de taille imposante, actionnés par des turbines larges de plusieurs mètres, sont utilisés dans les centrales d'Hydro-Québec (figure 10.26*c*).

(*a*)



(*b*)



(*c*)



▲ **Figure 10.26**

(*a*) La dynamo d'une bicyclette est un générateur dont la rotation est causée par celle de la roue et qui produit l'électricité permettant à un phare de fonctionner. (*b*) Une génératrice résidentielle utilise un moteur à essence pour faire tourner le générateur qu'elle contient. (*c*) Assemblage d'une turbine à la centrale La Grande-2. Lorsque l'eau la fait tourner, cette turbine actionne un générateur large de plusieurs mètres.

Un générateur rudimentaire est constitué d'une bobine de N spires qu'un agent extérieur fait tourner à la vitesse angulaire constante ω dans un champ magnétique extérieur. La figure 10.27 représente deux vues différentes d'une seule spire, dans le cas où le champ extérieur est uniforme. Au fur et à mesure que la bobine tourne, l'angle θ change. C'est ce qui est à l'origine de la variation du flux magnétique à travers la bobine. Le flux est donc donné par $\Phi_B = BA\cos(\theta(t))$. On exprime $\theta(t)$ à l'aide des équations de la cinématique de rotation (voir le chapitre 11 du tome 1). Si l'on choisit $\theta = 0$ à $t = 0$, alors $\theta = \omega t + \theta_0 = \omega t$ et le flux peut s'écrire

$$\Phi_B = BA\cos(\omega t)$$

La f.é.m. induite est

$$\mathscr{E} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = NAB\omega\sin(\omega t)$$

ce qui peut s'écrire sous la forme

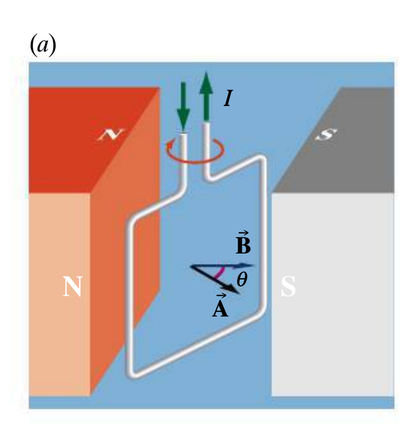
$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0\sin(\omega t) \qquad (10.6)$$



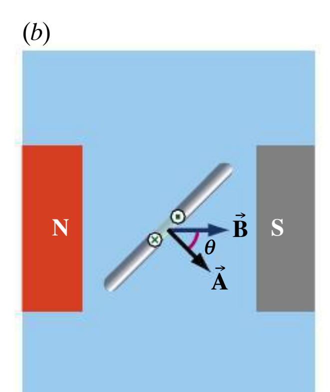
▶ **Figure 10.27**

(*a*) On observe une f.é.m. induite lorsqu'une spire tourne dans un champ magnétique. (*b*) La spire en rotation vue du haut. (*c*) Le courant induit alimente un circuit extérieur par l'intermédiaire de contacts à balais qui glissent sur deux bagues collectrices.

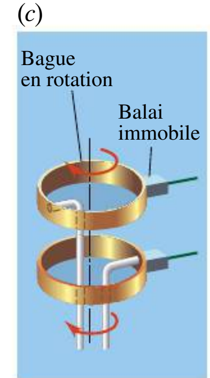
(*a*)



(*b*)



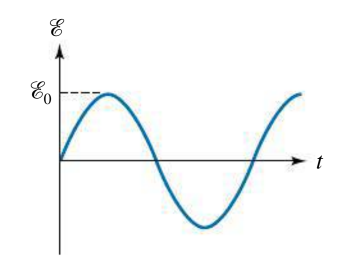
(*c*)



Au cours de la rotation de la bobine, la f.é.m. varie de façon sinusoïdale : son signe change par *alternance*, et son *amplitude*, ou valeur maximale, est

$$\mathscr{E}_0 = NAB\omega \qquad (10.7)$$

comme on le voit à la figure 10.28. Soulignons que la valeur maximale de la f.é.m. correspond à l'instant où le flux traversant la bobine est nul. En effet, c'est à ce moment que le flux *varie* le plus rapidement.



▲ **Figure 10.28**
La f.é.m. alternative sinusoïdale produite par une bobine tournant dans un champ magnétique uniforme.

Afin que le générateur puisse alimenter un circuit externe (comme le ferait une pile), il faut communiquer la f.é.m. induite dans la spire en rotation à un circuit qui n'est pas en rotation. Pour ce faire, on utilise deux bagues collectrices (figure 10.27*c*) qui tournent avec la spire, sur lesquels glissent des balais immobiles. Dans le circuit branché aux balais, on observe un courant alternatif (c.a.) qui change de sens périodiquement. Comme les générateurs sont une source d'électricité plus commune que les piles, les courants alternatifs sont très importants dans la vie quotidienne. Le chapitre 12 est consacré à l'étude des circuits à courant alternatif (c.a.), tout comme le chapitre 7 a porté sur les circuits à courant continu (c.c.).

Exemple 10.11

Une bobine carrée comportant 25 spires a des côtés de 50 cm de long. Elle tourne à 120 tr/min dans un champ magnétique uniforme de module 400 G. À $t = 0$, le plan de la bobine est normal aux lignes du champ. Déterminer : (a) l'amplitude de la f.é.m. induite ; (b) la f.é.m. induite à $t = 1/24$ s.

Solution

Nous devons d'abord convertir la vitesse angulaire en radians par seconde et le champ magnétique en teslas. La vitesse de 120 tr/min correspond à $\omega = 4\pi$ rad/s et $B = 4 \times 10^{-2}$ T.

(a) D'après l'équation 10.7,

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_0 &= NAB\omega \\ &= (25)(0{,}5\ \text{m})^2(4 \times 10^{-2}\ \text{T})(4\pi\ \text{rad/s}) = 3{,}14\ \text{V}\end{aligned}$$

(b) On dit qu'à $t = 0$, la bobine est normale aux lignes de champ, ce qui signifie que l'angle initial entre le vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ et le champ est nul. Ainsi, $\theta = \omega t + \theta_0 = \omega t$ et la f.é.m. en fonction du temps est donc donnée directement par l'équation 10.6, d'où

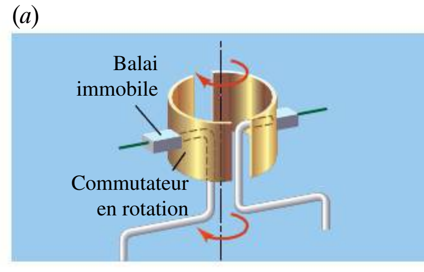
$$\begin{aligned}\mathscr{E} &= \mathscr{E}_0 \sin(\omega t) \\ &= (3{,}14\ \text{V})\sin(4\pi/24) = 1{,}57\ \text{V}\end{aligned}$$

Le redressement

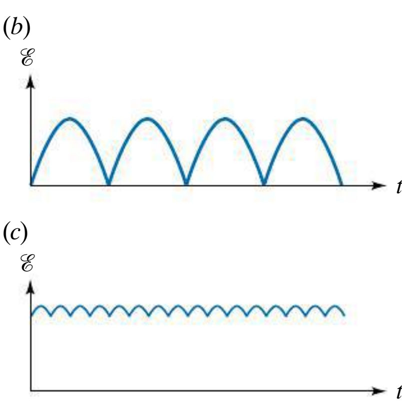
Historiquement, le courant alternatif (c.a.) ne se prêtait pas bien à divers types d'expériences ni à l'alimentation des moteurs à courant continu (c.c.). En 1834, William Sturgeon inventa un dispositif simple appelé **commutateur** qui empêche le courant de changer de sens ; on dit que le courant est *redressé*. Ce dispositif est constitué de deux demi-bagues (fixées à la bobine) qui assurent le contact avec des balais métalliques reliés au reste du circuit (figure 10.29*a*). Lorsque le courant dans la bobine est nul et sur le point de changer de sens, chacun des balais passe d'une demi-bague à l'autre. Le courant dans le circuit extérieur ne change donc pas de sens, même si la f.é.m. induite et l'intensité de ce courant sont loin d'être constantes (figure 10.29*b*).

Pour produire une f.é.m. aussi constante que possible, Charles Wheatstone mit à l'essai en 1841 un système de plusieurs bobines enroulées sur une forme cylindrique et caractérisées par des plans ayant différentes orientations spatiales et un commutateur à plusieurs éléments. Dans ce système, très répandu jusqu'à récemment, l'induction apparaît dans chaque bobine, mais le contact n'est établi qu'avec celle pour laquelle la f.é.m. est maximale, à cause de son orientation.

(*a*)



(*b*)



(*c*)

▲ Figure 10.29

(*a*) Grâce au commutateur à bagues sectionnées, le signe de la f.é.m. prélevée par les contacts à balais ne change pas. (*b*) La f.é.m. fournie par une seule bobine avec un commutateur. (*c*) Si l'on utilise un grand nombre de bobines, les fluctuations de la f.é.m. induite et du courant obtenu sont considérablement réduites.

La rotation de l'ensemble amène la bobine suivante dans la bonne position, ce qui maintient la f.é.m. à une valeur élevée. Cette méthode permet de réduire considérablement les fluctuations du courant de sortie (figure 10.29*c*). On peut ainsi qualifier l'appareil de générateur à courant continu (c.c.).

Dans les générateurs d'aujourd'hui, le commutateur mécanique que nous venons de décrire est souvent remplacé par un dispositif plus durable qui effectue électroniquement la même tâche, à l'aide de composantes semi-conductrices comme des diodes (voir la section 11.8 du tome 3).

Le moteur c.c. et le générateur c.c. ont évolué séparément pour aboutir à des modèles similaires (une bobine comportant plusieurs spires tournant dans un champ magnétique). Mais le fait qu'un générateur peut fonctionner comme un moteur c.c. et vice versa échappa à la plupart des ingénieurs. À l'exposition de Vienne, en 1873, deux générateurs gigantesques étaient présentés côte à côte. L'un d'eux était immobile, alors que l'autre, entraîné par un moteur à vapeur, était en train de tourner. Un ouvrier eut l'idée de raccorder la sortie du générateur en service aux bornes de l'autre générateur, qui se mit à tourner. On s'aperçut ainsi que les moteurs c.c. pouvaient être alimentés par des générateurs plutôt que par de grosses piles.

La contre-f.é.m. des moteurs

Nous avons vu, à la section 8.4, que lorsqu'un courant circule dans une bobine pivotant dans un champ magnétique, la bobine est soumise à un moment de force et se met à tourner. C'est le principe même du moteur électrique. Or, lorsque la bobine tourne dans le champ magnétique, elle est le siège d'une f.é.m. induite, semblable à celle d'un générateur. Toutefois, à la différence du cas du générateur, la fonction du moteur n'est pas de produire cette f.é.m. Au contraire, la f.é.m. induite dans un moteur est plutôt une nuisance, car elle s'oppose à la f.é.m. extérieure qui alimente le moteur. Pour cette raison, on l'appelle parfois **contre-f.é.m.** (bien qu'il ne s'agisse pas pour autant d'un phénomène différent des autres f.é.m.).

La contre-f.é.m. est proportionnelle à la vitesse angulaire ω du moteur. Lorsqu'on met le moteur en marche, la bobine est au repos et il n'y a donc pas encore de contre-f.é.m. Le courant de «démarrage» peut être assez intense parce qu'il n'est limité que par la résistance de la bobine. Au fur et à mesure que la vitesse de rotation augmente, l'augmentation de la contre-f.é.m. réduit le courant, qui, d'après la loi des mailles, est proportionnel à la différence entre la f.é.m. extérieure et la contre-f.é.m. Si le moteur n'effectue aucun travail, la vitesse angulaire augmente jusqu'à ce que l'énergie fournie soit équilibrée par les pertes de frottement et les pertes par effet Joule. À ce stade, l'intensité du courant est assez faible.

Lorsque le moteur effectue un travail mécanique, la vitesse angulaire diminue, ce qui réduit la contre-f.é.m. Il en résulte une augmentation de l'intensité du courant. La puissance additionnelle fournie par la source extérieure de f.é.m. est convertie en puissance mécanique par le moteur. Si le travail à effectuer est trop important, la contre-f.é.m. est réduite encore davantage, ce qui augmente encore l'intensité du courant et risque de faire «griller» le moteur.

Dans une maison, on observe parfois une légère baisse d'intensité de l'éclairage lorsqu'un réfrigérateur, un climatiseur, un aspirateur ou un outil électrique se met en marche. Le courant de «démarrage» du moteur que contiennent ces appareils est suffisamment intense pour qu'il y ait une chute considérable de potentiel dans l'installation électrique de la maison. La différence de potentiel aux bornes des lampes d'éclairage est momentanément inférieure à la normale.

10.5 LES ORIGINES DE LA F.É.M. INDUITE

La loi de Faraday et la loi de Lenz que nous avons utilisées jusqu'à présent permettent de déterminer la f.é.m. induite, mais n'expliquent pas sa cause physique : même si la f.é.m. induite est toujours produite quand le flux magnétique varie, cela n'explique pas quelle force fait circuler la charge dans le fil. En effet, à la section 7.1, nous avons défini la f.é.m. comme le *travail par unité de charge* nécessaire pour faire circuler la charge dans un circuit fermé : $\mathscr{E} = W_{\text{né}}/q$. (L'indice « né » signifie que ce travail n'est *pas* effectué par un mécanisme électrostatique.) Or, tout travail est effectué par une *force* (voir le chapitre 7 du tome 1 ou le rappel à la section 4.2). Pour expliquer l'induction électromagnétique, il nous reste donc à identifier la force qui est responsable de la f.é.m. induite.

Au début de la section 10.1, nous avons distingué deux cas où se produit l'induction électromagnétique dans un circuit : 1) si le circuit est immobile, le champ magnétique *doit varier dans le temps* ou 2) si le champ magnétique est constant dans le temps, le circuit ou une de ses parties *doit se déplacer dans l'espace*. Comme nous le verrons, la force qui effectue le travail associé à la f.é.m. n'est pas la même dans ces deux cas (et ce, même si la situation est identique du point de vue de l'application de la loi de Faraday). Le premier cas sera étudié plus en détail à la section suivante, et le second, à la section 10.7. Dans cette section, nous allons nous contenter d'une analyse qualitative.

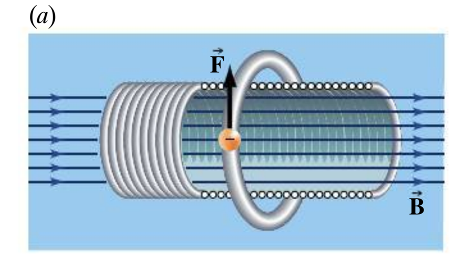
L'apparition d'une f.é.m. dans le cas où un fil conducteur se déplace dans l'espace peut être comprise à l'aide des concepts du chapitre 8 : au départ, on met le fil en mouvement, ce qui signifie qu'on met en mouvement, en bloc avec lui, tous les électrons de conduction qu'il contient. Puisqu'ils ont une vitesse, ces électrons peuvent subir une force magnétique, ce qui les fera dériver le long du fil. La force qui cause la f.é.m. induite est donc une *force magnétique*.

L'autre cas correspond clairement à une nouvelle situation physique : si le circuit est immobile comme aux figures 10.3 (p. 409) ou 10.18 (p. 420), ses électrons de conduction n'ont aucune vitesse d'ensemble et ne peuvent donc *pas* subir de force magnétique (que ce champ varie dans le temps n'y change rien). Ils pourraient subir la force exercée par un champ *électrique*, mais l'aimant de la figure 10.3 (p. 409) ou le solénoïde de la figure 10.18 (p. 420) portent une charge totale nulle et ne produisent donc aucun champ électrique « ordinaire » comme ceux que nous avons étudiés dans les situations électrostatiques des chapitres 1 à 5.

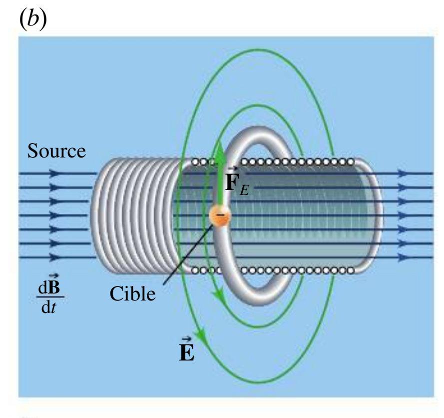
À la figure 10.30*a*, qui illustre une situation comme celle de l'exemple 10.7, on voit que l'induction peut même se produire dans une bobine qui n'est pas du tout plongée dans le champ magnétique variable, mais seulement *traversée* par ce champ ! En somme, en présence d'un champ magnétique qui varie, des électrons de conduction de la bobine subissent une force « à distance ». Cette nouvelle action « à distance » se compare à celles étudiées aux chapitres 2 et 8 et pose les mêmes problèmes conceptuels. Par exemple, quand on se met à faire varier le champ magnétique, les électrons de conduction dans la bobine ne subissent pas une force instantanément. L'existence de ce délai implique obligatoirement qu'il y ait un intermédiaire permettant au champ magnétique variable d'agir sur les électrons de conduction.

Cette situation ne peut s'expliquer que si on utilise à nouveau un modèle « en deux étapes » où une source produit un champ et une cible subit la force exercée par ce champ. La nouveauté, cette fois, est que la source de ce nouveau type de champ *est un autre champ* et non pas une charge ou une charge en mouvement : 1) la source, un champ magnétique variable, produit un **champ électrique induit** $\vec{\mathbf{E}}$; 2) le champ électrique induit produit une force $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}$ sur toute charge cible q (figure 10.30*b*).

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 10.30**

(*a*) Les électrons de conduction qui constituent le courant induit doivent subir une force pour se mettre à circuler, mais ne sont pas plongés dans le champ magnétique variable qui est responsable de l'induction. (*b*) Cela implique qu'il y ait un intermédiaire, le *champ électrique induit*, qui permette au champ magnétique variable d'agir « à distance » sur ces électrons.

Sur le plan quantitatif, l'explication que nous venons de donner équivaut à postuler que la *seule* force que peut subir une charge est celle, donnée par l'équation 8.14, exercée par les champs électrique et magnétique, soit

$$\vec{\mathbf{F}} = q(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) \qquad (10.8)$$

cette équation demeurant valable quel que soit le mécanisme qui produit les champs électrique et magnétique. En d'autres termes, on suppose qu'il n'existe pas d'autres champs agissant sur des charges que les champs électrique et magnétique. Le travail que cette force effectue sur une charge q qui se déplace autour du circuit fermé est donné par

$$W_{\text{né}} = \oint \vec{\mathbf{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} = q\oint (\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} \qquad (10.9)$$

En substituant ce résultat dans la définition de la f.é.m., soit $\mathscr{E} = W_{\text{né}}/q$, on obtient

$$\mathscr{E} = \oint (\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} \qquad (10.10)$$

Cette dernière équation contient deux termes, chacun d'eux correspondant à l'une des deux causes possibles de la f.é.m. induite. Le premier terme fait intervenir le champ électrique induit. À la section suivante, nous verrons d'une façon quantitative comment ce champ est produit par la variation du champ magnétique. Le second terme fait intervenir un mouvement par rapport au champ magnétique. À la section 10.7, nous étudierons cette situation plus en détail.

Notons que dans le second terme de l'équation 10.10, le conducteur en mouvement doit absolument être *plongé* dans le champ magnétique pour que ses électrons de conduction puissent subir une force magnétique. Par contre, dans le cas du premier, le conducteur doit être plongé dans le champ électrique induit, mais *pas forcément dans le champ magnétique variable* qui a induit le champ électrique en question. Cela explique une situation comme celle de la figure 10.30, où l'induction se produit dans une bobine qui n'est pas plongée dans le champ magnétique.

En somme, nous acceptons maintenant qu'un champ électrique puisse être produit par deux types de sources : une charge électrique ou un champ magnétique variable. Quelle que soit leur source, les champs électriques produisent tous le même effet sur une charge q, c'est-à-dire une force $\vec{\mathbf{F}} = q\vec{\mathbf{E}}$. C'est pourquoi, à la figure 10.30, les électrons de conduction de la bobine, qui ne peuvent pas subir de force magnétique car ils sont initialement immobiles, peuvent néanmoins subir la force exercée par un champ électrique induit.

On constate à la figure 10.30*b* une particularité du champ électrique induit : alors qu'au chapitre 2, les lignes de champ électrique débutaient aux charges sources positives et se terminaient aux charges sources négatives, les lignes d'un champ électrique induit sont fermées sur elles-mêmes, comme les lignes de champ magnétique. En effet, le champ électrique induit ne provient pas d'une charge source. Cette différence a une conséquence : un champ électrique induit ne peut pas être exprimé comme la dérivée d'un potentiel V, comme c'était le cas au chapitre 4 (voir l'équation 4.11*a*). Le potentiel électrique est une notion qui *n'est plus valable* dans une région de l'espace où il y a induction électromagnétique. En d'autres termes, le champ électrique induit n'est pas un champ conservatif.

Les champs induits dans le vide

Revenons encore à la figure 10.30. Notons que le champ magnétique variable produit un champ électrique induit *même si on retire la bobine conductrice*. En d'autres termes, un champ $\vec{\mathbf{E}}$ induit est produit en chaque point de l'espace par

un champ $\vec{\mathbf{B}}$ variable, exactement comme un champ $\vec{\mathbf{E}}$ conservatif est produit en chaque point de l'espace par une charge q ! Si on place une bobine conductrice dans le champ $\vec{\mathbf{E}}$ induit, on verra apparaître un courant induit, mais le champ $\vec{\mathbf{E}}$ induit est quand même présent en l'absence de cette bobine.

Au chapitre 13, nous verrons que les rôles peuvent aussi être inversés : un champ électrique variable peut lui aussi produire un champ, le *champ magnétique induit*. Cette capacité des champs de se produire mutuellement, même dans le vide, sera au cœur du modèle de l'onde électromagnétique que nous étudierons au chapitre 13. Ce modèle permet de représenter la lumière, les ondes radio ou les rayons X, qui voyagent dans le vide en transportant de l'énergie.

10.6 LES CHAMPS ÉLECTRIQUES INDUITS

Selon l'équation 10.10, la f.é.m. induite peut être due à un champ électrique induit ou à un mouvement dans un champ magnétique. Nous allons maintenant étudier plus en détail le premier de ces deux cas, en voyant comment on peut prédire la valeur du champ électrique induit. On considère donc un circuit qui est immobile, pour lequel l'équation 10.10 se réduit à

$$\mathscr{E} = \oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} \qquad \text{(i)}$$

Cette f.é.m. doit correspondre à celle déduite de l'expérience, c'est-à-dire celle donnée par la loi de Faraday. Puisque le circuit n'est pas en mouvement, seule la variation du champ magnétique en fonction du temps contribue à la variation du flux. Pour un champ magnétique uniforme et perpendiculaire au plan du circuit, $\Phi_B = BA$, donc $\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t = A\,\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$. La loi de Faraday donne donc

$$\mathscr{E} = -A\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(ii)}$$

En comparant les équations (i) et (ii), on peut relier le champ électrique induit et le taux de variation du champ magnétique uniforme :

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} = -A\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \qquad (10.11)$$

L'équation 10.11 s'utilise de façon très similaire au théorème d'Ampère (équation 9.15). Par exemple, la figure 10.31 représente le champ électrique induit associé au champ magnétique variable dans le temps d'un solénoïde. Puisque le champ magnétique uniforme variable est dans un solénoïde cylindrique, le champ électrique induit a la même symétrie cylindrique (voir la section 3.3). Ses lignes de champ ont donc la forme de cercles, comme à la figure 10.30. Maintenant, l'équation 10.11 permet aussi de relier le sens du champ électrique induit au signe de $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$, suivant la même convention de signe qu'à la figure 10.12 (p. 417) : avec le pouce dans le sens du champ magnétique source, les doigts s'enroulent dans le sens du parcours d'intégration à utiliser pour le membre de gauche de l'équation 10.11 si on souhaite obtenir une intégrale de ligne positive. On obtient le sens inverse ici, car $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t > 0$, donc les deux membres de l'équation 10.11 sont négatifs.

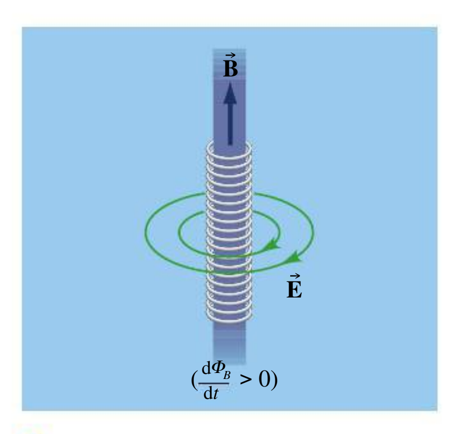


Figure 10.31
La variation du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde crée un champ électrique induit dont les lignes sont des cercles fermés.

Exemple 10.12

Le courant dans un très long solénoïde de rayon R diminue avec le temps. Déterminer le module du champ électrique induit en des points situés (a) à l'intérieur ; (b) à l'extérieur du solénoïde. Exprimer les résultats en fonction de $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$.

Solution

Pour calculer l'intégrale de l'équation 10.11, nous choisissons un parcours d'intégration qui tient compte de la symétrie cylindrique du problème. Le module du champ électrique induit sera le même en tout point d'une boucle circulaire concentrique par rapport au solénoïde. Une telle boucle est donc un parcours d'intégration approprié. Selon la convention de signe donnée à la section 10.3 (voir la figure 10.12, p. 417), on place le pouce vers la page et les doigts s'enroulent dans le sens où on obtient une intégrale de ligne positive. Ce sens *horaire* est celui voulu ici, car $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t < 0$, donc les deux membres de l'équation 10.11 sont effectivement positifs. Que la boucle soit située à l'intérieur ou à l'extérieur du solénoïde, nous avons $\vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} = E\,\mathrm{d}\ell$ puisque $\vec{\mathbf{E}}$ est parallèle à $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}}$. Pour une boucle de rayon r, l'intégrale devient

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{\ell}} = E\oint \mathrm{d}\ell = E(2\pi r)$$

Pour $r < R$, le flux traversant la boucle est $\Phi_B = BA = B(\pi r^2)$. D'après l'équation 10.11, on a donc

$$E(2\pi r) = -(\pi r^2)\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$(r < R) \qquad E = -\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(i)}$$

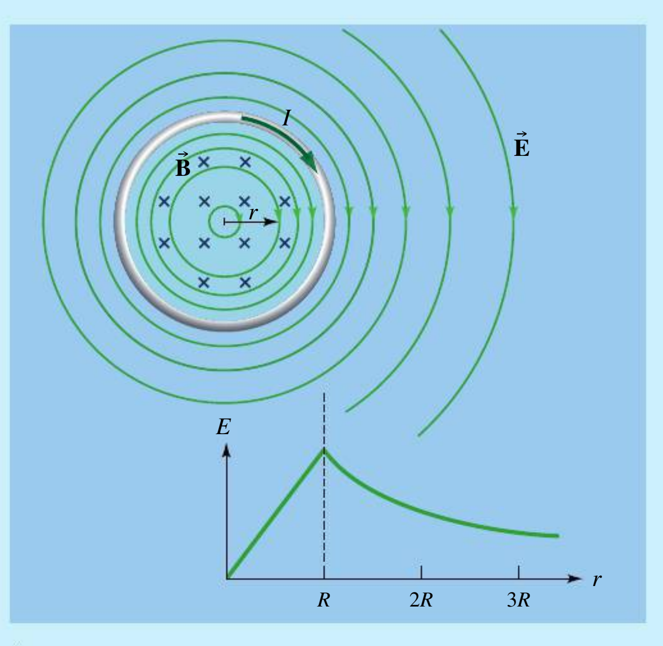
Puisque le courant diminue, $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t < 0$. À partir de l'équation 9.13, $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t = \mu_0 n(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t) < 0$, donc l'équation (i) donne bel et bien une valeur positive pour le module E du champ électrique induit. Ce module augmente linéairement avec la distance à partir du centre.

(b) Pour $r > R$, le flux traversant la boucle est $\Phi_B = B(\pi R^2)$. Donc,

$$E(2\pi r) = -(\pi R^2)\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

$$(r > R) \qquad E = -\frac{R^2}{2r}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(ii)}$$

À l'extérieur du solénoïde, le module du champ électrique induit est inversement proportionnel à la distance à partir du centre. La figure 10.32 représente la dépendance du champ en fonction de r. Vous pouvez vérifier l'orientation de $\vec{\mathbf{E}}$ en utilisant la loi de Lenz.



▲ **Figure 10.32**

La variation du champ électrique induit en fonction de la distance à partir du centre d'un long solénoïde dans lequel le courant diminue. On néglige l'épaisseur de la paroi du solénoïde.

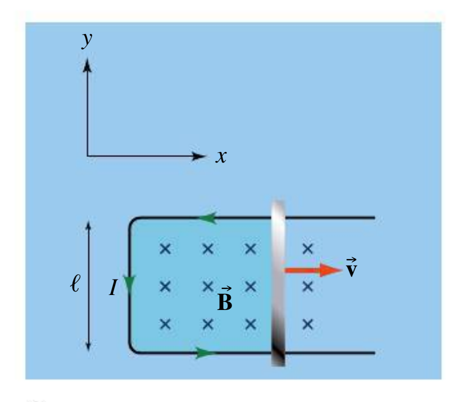
Lorsque nous avons comparé les figures 10.3 (p. 409) et 10.7 (p. 410), nous avons souligné que le courant induit qu'on observe dans la boucle conductrice ne dépend que du mouvement *relatif* de l'aimant et de la boucle. Pourtant, nous venons de voir que la f.é.m. induite est attribuée à une force différente selon que c'est la boucle ou l'aimant qui est en mouvement. L'équivalence frappante entre ces deux mouvements suggère toutefois qu'il y a anguille sous roche : au chapitre 8 du tome 3, nous allons effectivement voir que la nature d'un champ (c'est-à-dire s'il est électrique ou magnétique) dépend du référentiel de l'observateur. Par exemple, pour un observateur dans le référentiel de la boucle conductrice (imaginez une caméra et des instruments de mesure fixés sur la boucle), celle-ci est *toujours* immobile, et la situation de la figure 10.3 (p. 409) ne peut être distinguée de celle de la figure 10.7 (p. 410). Dans le référentiel de la boucle, le courant induit est donc *toujours* entièrement attribué à un champ électrique induit !

10.7 LA F.É.M. INDUITE DANS UN CONDUCTEUR EN MOUVEMENT

Selon la section 10.5, la f.é.m. induite peut être due à un champ électrique induit ou à un mouvement dans un champ magnétique. La section précédente a porté

sur le premier des deux cas et nous allons maintenant étudier plus en détail le second. Comme on considère qu'il n'y a pas de champ électrique induit, le champ magnétique est constant dans le temps et la f.é.m. induite est due exclusivement au travail qu'effectue la force magnétique* autour du circuit fermé.

Dans un premier temps, nous allons considérer la situation simple de la figure 10.33, où le circuit est formé d'une tige conductrice se déplaçant sur un rail en forme de U. Au départ, il n'y a pas de courant induit, et on met en mouvement la tige, de sorte que tous les électrons de conduction qu'elle contient se déplacent en bloc avec elle. Ces électrons peuvent donc subir une force magnétique $\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$ (vérifiez que dans le cas illustré, cette force est tangente à la tige, vers le bas sur la figure).



▲ **Figure 10.33**
Dans cette situation, le champ magnétique est constant, alors il n'y a aucun champ électrique induit. La f.é.m. induite est due exclusivement au travail que fait la force magnétique sur les charges libres que contient la tige conductrice.

Pour déterminer la f.é.m. induite, calculons le travail effectué par la force magnétique sur un électron de conduction. Le seul travail magnétique non nul est celui effectué le long de la portion de circuit qui est en mouvement. Comme le champ est perpendiculaire à la vitesse, la force magnétique sur un électron a un module $F_B = |q|vB$. Cette force étant vers le bas, les électrons se déplacent vers le bas le long de la tige. La f.é.m. est définie comme le travail par unité de charge $\mathscr{E} = W_{\text{né}}/q$ sur un circuit fermé, mais la force magnétique n'agit que sur la longueur de la tige, pas sur les électrons dans les rails immobiles. Quand un électron se déplace sur la longueur de la tige, le travail effectué est $W_{\text{né}} = \vec{\mathbf{F}}_B \cdot \vec{\mathbf{s}} = F_B\ell = qvB\ell$, donc la f.é.m. est

F.é.m. induite dans un conducteur en mouvement

$$|\mathscr{E}| = B\ell v \qquad (10.12a)$$

où la valeur absolue signifie que cette équation ne tient pas compte des conventions de signes établies à la section 10.3. Dans ce qui suit, la valeur absolue sera sous-entendue chaque fois que la f.é.m. est calculée à l'aide d'une équation autre que l'équation 10.4 ou 10.5.

On note que ce résultat est le même que celui obtenu à l'exemple 10.8 avec la loi de Faraday, sauf qu'ici le signe est absent. Ce signe n'est pas requis pour déterminer le sens du courant induit, car on peut se servir du sens de la force magnétique : puisque la force entraîne les électrons dans le sens horaire, le courant est orienté dans le sens antihoraire. On note que ce sens correspond à celui prédit par la loi de Lenz ou par les conventions de signes appliquées à l'exemple 10.8.

L'analyse que nous venons de faire n'est valable que pour des circuits qui ont une forme similaire à celle illustrée à la figure 10.33, pour laquelle le champ, la tige et la force magnétique sont tous perpendiculaires entre eux. En général, l'analyse est toutefois similaire. Par exemple, un circuit comme celui de la figure 10.5 (p. 410) peut être décomposé en une succession de portions rectilignes, orientées différemment par rapport au champ et se déplaçant à des vitesses différentes.

On peut obtenir la f.é.m. sur un tel circuit de forme quelconque en additionnant (intégrant) la somme des contributions sur chaque portion de fil successive.

* Nous verrons à la fin de cette section que le travail que fait la force magnétique pour déplacer les électrons le long de la tige est compensé par un autre travail magnétique, négatif, de telle sorte que le travail total effectué par la force magnétique *sur une charge considérée comme libre* est nul. Le rôle de la force magnétique est uniquement de « transmettre » le travail fourni par l'agent extérieur qui déplace la tige.

Cela équivaut à appliquer l'équation 10.10 en l'absence de champ électrique induit. Cette équation se réduit alors à

$$\mathscr{E} = \oint (\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}}$$

Si on calcule la f.é.m. induite sur un tronçon de fil rectiligne de longueur ℓ plongé dans un champ uniforme, on peut éviter d'intégrer. En effet, la force magnétique, en chaque point du tronçon de fil, a un même module $F_B = qvB \sin\theta$ et elle fait un même angle β avec la portion de fil, de sorte que le travail qu'elle effectue est $W_{\text{né}} = F_B \ell \cos\beta$. La f.é.m. est donc

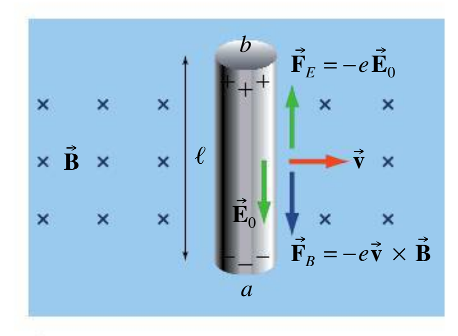
$$\mathscr{E} = B\ell v \sin\theta \cos\beta \qquad (10.12b)$$

Les exemples 10.13 et 10.14 qui suivent illustrent des cas simples d'induction électromagnétique dans un conducteur en mouvement.

Certains animaux sont capables de magnétoception, c'est-à-dire de détecter le champ magnétique terrestre. À la section 8.4, il a été question de ceux qui possèdent ce sens en raison de cristaux de magnétite (Fe_3O_4) logés dans les membranes de certains neurones, ces cristaux jouant le rôle de « boussoles microscopiques ». Mais d'autres animaux, notamment des requins et des raies, sont plutôt en mesure de détecter le champ électrique induit qui est produit lorsqu'ils se déplacent dans le champ magnétique terrestre. Ils ne sont donc capables de magnétoception que lorsqu'ils sont en mouvement. En principe, c'est comme si on promenait une tige de longueur ℓ dans le champ magnétique terrestre : la mesure de $\mathscr{E}$ donnée par l'équation 10.12b nous permettrait de déterminer les angles θ et β, donc l'orientation tridimensionnelle de la tige par rapport au champ magnétique dans lequel la tige est plongée.

La distinction entre la f.é.m. induite et la différence de potentiel

Dans le cas de la figure 10.33, on peut s'interroger sur la force qui déplace les charges dans le rail en U, là où il n'y a aucune force magnétique tangente au rail. Le mécanisme est le même que celui étudié à la section 6.1, c'est-à-dire un champ électrique *conservatif* établi le long du rail. La situation de la figure 10.33 est donc équivalente à une pile (la tige mobile) qui fournit un travail pour maintenir une différence de potentiel à ses bornes, alors que la charge dans le rail ne fait que « tomber » vers le potentiel plus faible.



▲ **Figure 10.34**

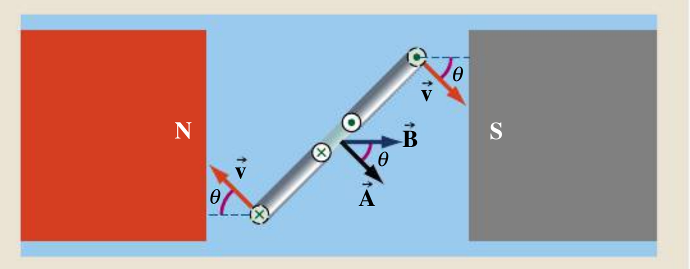
Une tige métallique se déplaçant perpendiculairement aux lignes du champ magnétique. Il y a séparation des charges et une différence de potentiel électrique s'établit.

Pour comprendre ce mécanisme, considérons ce qu'il adviendrait si on retirait le rail (figure 10.34). En l'absence de circuit fermé, le champ magnétique exerce quand même une force sur les électrons de conduction, car ils se déplacent avec la tige à la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$. Sous l'effet de cette force, ces électrons dérivent vers le bas, mais s'accumulent à l'extrémité inférieure de la tige. De même, une charge positive (correspondant au déficit d'électrons) s'accumule à l'extrémité supérieure de la tige. Les extrémités de la tige portent donc des charges égales et opposées *comme les bornes d'une pile*. Or, les charges accumulées produisent un champ électrique *conservatif* entre elles. Quand le rail est présent, ce champ s'établit notamment le long du rail et c'est lui qui exerce la force nécessaire pour faire « tomber » la charge le long du rail, comme le champ électrique décrit à la figure 6.4a (p. 215). Mais ce champ électrique conservatif s'établit aussi le long de la tige. Il exerce alors une force électrique (opposée à la force magnétique) qui a pour effet de nuire à l'accumulation de charge supplémentaire aux extrémités de la tige. Cela garantit que la quantité de charge accumulée à ces extrémités reste toujours stable, *que le rail soit présent ou non* : elle se stabilise

lorsque les électrons dans la tige subissent une force résultante nulle, c'est-à-dire quand $F_B = F_E$, soit $|q|vB = |q|E$, donc quand $E = vB$. Notons qu'alors la différence de potentiel entre les extrémités de la tige, donnée par l'équation 4.10*b*, est $\Delta V = E\ell = B\ell v$. Qu'on ajoute le rail ou non, la différence de potentiel maintenue entre les extrémités du rail est donc bel et bien de même grandeur que la f.é.m.

Exemple 10.13

Soit un générateur formé d'une bobine de N spires, d'une section carrée de côté a, qui tourne à la vitesse angulaire ω. La bobine est plongée dans un champ magnétique uniforme de module B, son axe de rotation est perpendiculaire au champ et est parallèle à deux des côtés de la bobine (voir la figure 10.27, p. 426). (a) Sans utiliser la loi de Faraday, calculer la f.é.m. produite par la force magnétique. (b) Comparer ce résultat à l'équation 10.6 obtenue avec la loi de Faraday.



▲ **Figure 10.35**

Dans un générateur, seuls les deux côtés parallèles à l'axe de rotation contribuent à la f.é.m. induite dans une spire. Leur vitesse forme avec le champ un angle θ qui change avec le temps.

Solution

(a) Toutes les spires étant reliées en série, il suffit d'obtenir la f.é.m. induite dans une spire et de multiplier par N. Pour obtenir cette f.é.m., on doit considérer séparément les quatre côtés de la spire. À la figure 10.35, l'axe de rotation est perpendiculaire à la page, de sorte qu'une spire donnée a deux côtés parallèles à la page et deux côtés, dont la section est illustrée en pointillé, qui sont perpendiculaires à la page.

Dans chacun des côtés parallèles à la page, la force magnétique que subissent les électrons de conduction n'est jamais parallèle au fil; ces deux côtés ne contribuent donc pas à la f.é.m. Dans les deux côtés perpendiculaires à la page, les électrons ont des vitesses égales et opposées indiquées sur la figure. En conséquence, quand on parcourt la spire complète, les f.é.m. induites dans ces deux côtés s'additionnent.

Les deux côtés perpendiculaires à la page sont parallèles à l'axe de rotation. Chacun d'eux effectue donc un mouvement circulaire à une vitesse de module $v = \omega r = \omega(a/2)$. L'angle θ entre cette vitesse et le champ magnétique change avec le temps. À la figure 10.35, on note qu'il est identique à l'angle $\theta = \omega t$ entre le vecteur surface $\vec{\mathbf{A}}$ et le champ $\vec{\mathbf{B}}$. La force magnétique que subit un électron de conduction est donc de module

$$F_B = |q|vB \sin\theta = |q|\omega(a/2)B \sin\omega t$$

Quand un électron se déplace le long d'un côté de longueur a, le travail effectué est $F_B a$, puisque la force magnétique est parallèle au côté de longueur a (autrement dit, on aurait $\beta = 0$ dans l'équation 10.12*b*). Le travail total effectué sur un électron qui parcourt une spire complète est le double, soit $W_{\text{né}} = 2F_B a = |q|\omega a^2 B \sin\omega t$. La f.é.m. induite dans une seule spire est donc

$$\mathscr{E}_{\text{spire}} = \omega a^2 B \sin\omega t \qquad \text{(i)}$$

Évidemment, le résultat pour un des côtés parallèles à l'axe de rotation aurait pu être obtenu directement avec l'équation 10.12*b*, avec $v = \omega(a/2)$, $\ell = a$, $\theta = \omega t$ et $\beta = 0$. On aurait ensuite multiplié par 2 (nombre de côtés), et on aurait obtenu l'équation (i). Pour obtenir la f.é.m. totale, on multiplie par N l'équation (i) :

$$\mathscr{E} = N\omega a^2 B \sin\omega t$$

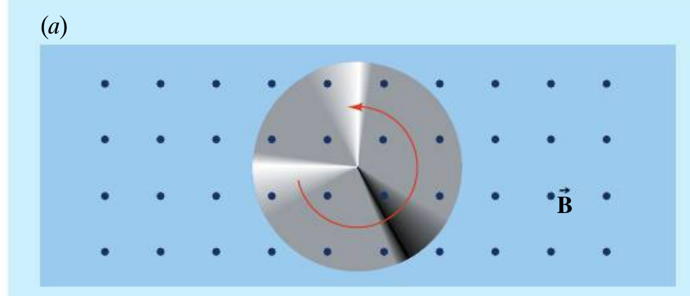
(b) Si on substitue $A = a^2$, on obtient un résultat identique à l'équation 10.6, soit

$$\mathscr{E} = N\omega AB \sin\omega t$$

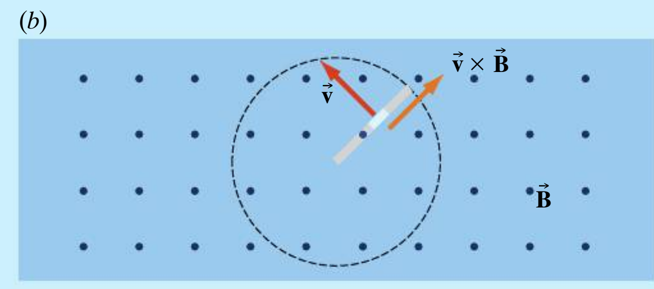
Exemple 10.14

Dans un *générateur homopolaire*, un disque conducteur de rayon R tourne à la vitesse angulaire ω. Son plan est perpendiculaire à un champ magnétique uniforme et constant $\vec{\mathbf{B}}$ (figure 10.36*a*). (a) Sans utiliser la loi de Faraday, calculer la f.é.m. produite par la force magnétique entre le centre et la circonférence du disque. (b) Comparer ce résultat à celui obtenu avec la loi de Faraday.

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 10.36**

(*a*) Dans un générateur homopolaire, un disque conducteur tourne perpendiculairement à un champ magnétique. (*b*) Pour déterminer la f.é.m. induite par le mouvement, on divise le disque en tiges élémentaires. Il suffit de calculer la f.é.m. dans une tige, car elle est égale à celle dans le disque.

Solution

Le disque peut être assimilé à une série de tiges radiales. La valeur et la polarité des f.é.m. induites sont donc les mêmes que pour une seule tige, la seule différence étant que le courant que peut produire un disque est beaucoup plus intense. Nous allons donc simplement calculer la f.é.m. dans une tige qui pivoterait par rapport à l'une de ses extrémités (figure 10.36*b*). ■

Puisque la vitesse d'un électron donné dans la tige dépend de sa position le long de la tige, nous devons intégrer pour calculer la f.é.m. Considérons un petit segment de largeur $d\vec{r}$, en bleu sur la figure 10.36*b*, situé à une distance r du centre et orienté vers l'extérieur. Le module de la vitesse du segment est $v = \omega r$.

Les électrons à l'intérieur du segment sont soumis à la force magnétique $\vec{F}_B = -e\vec{v} \times \vec{B}$, radiale et dirigée vers l'intérieur. Comme $\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{B}$, on a $|\vec{v} \times \vec{B}| = vB$, d'où

$$(\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r} = vB\,dr = \omega Br\,dr \qquad \text{(i)}$$

Cette équation donne la force par unité de charge que subit un électron se déplaçant dans la tige. Si on intègre cette force par unité de charge sur le parcours de l'électron le long de la tige, on obtient le travail par unité de charge, c'est-à-dire la f.é.m. (voir l'équation 10.10). Le parcours correspondant à la longueur de la tige, les bornes sont $r_i = 0$ et $r_f = R$, d'où

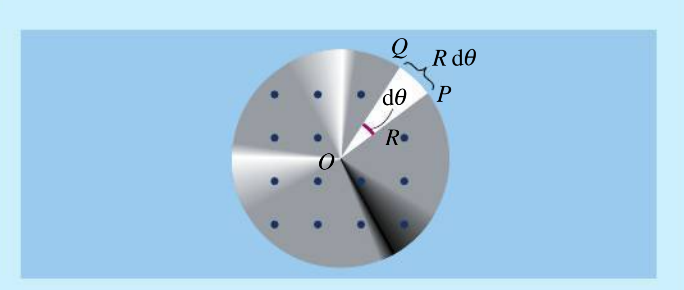
$$\mathscr{E} = \int_0^R \omega Br\,dr = \frac{1}{2}\omega BR^2 \qquad \text{(ii)}$$

Étant donné que la force sur les électrons est orientée vers l'intérieur, le centre est à un potentiel moins élevé que la circonférence. Si l'on établit des contacts sans friction à ces deux points, un courant continu constant va circuler dans une résistance externe.

(b) En appliquant la loi de Faraday, on peut se trouver dans une situation paradoxale. Puisque le flux total traversant le disque ne varie pas, on pourrait en conclure, avec l'équation $\mathscr{E} = -d\Phi_B/dt$, que la f.é.m. est nulle. Mais il n'en est pas ainsi.

Pour appliquer la loi de Faraday de façon appropriée, il faut choisir un parcours fermé approprié qui *englobe le mouvement du disque*. Dans le cas présent, le parcours est un secteur triangulaire du cercle (en blanc sur la figure 10.37). Un rayon (OP) reste fixe, tandis que l'autre (OQ) tourne avec le disque à la vitesse ω. ■

L'aire du secteur est $dA = \frac{1}{2}(R\,d\theta)R$ et le flux à travers le secteur est $d\Phi_B = B\,dA = \frac{1}{2}BR^2\,d\theta$. Le taux de variation du flux est $d\Phi_B/dt = \frac{1}{2}BR^2\,d\theta/dt = \frac{1}{2}\omega BR^2$. En ignorant les conventions de signes, on obtient donc à nouveau l'équation (ii).



▲ **Figure 10.37**

Même si le flux total à travers un disque tournant ne varie pas, on peut utiliser l'équation $\mathscr{E} = -d\Phi_B/dt$ à condition de choisir un parcours fermé englobant le mouvement du disque.

La nature du travail à l'origine de la f.é.m.

La tige en mouvement de la figure 10.33 (p. 433) agit comme une source de f.é.m. En général, une source de f.é.m. convertit une énergie de forme quelconque en énergie électrique et effectue un travail sur les charges. À la section 8.2, nous avons dit qu'une force magnétique était incapable de faire un travail sur une

particule libre, alors il est intéressant d'examiner de plus près la situation que nous venons de décrire, en calculant le travail total effectué sur un électron individuel, considéré comme libre.

Par suite du mouvement de la tige, la vitesse d'un électron donné a une composante $\vec{\mathbf{v}}$ orientée selon le mouvement de la tige et une vitesse de dérive $\vec{\mathbf{v}}_d$ le long de la tige (figure 10.38*a*). Les forces magnétiques associées à ces composantes sont l'une de module evB orientée vers le bas, l'autre de module ev_dB orientée dans le sens opposé au mouvement de la tige. La puissance ($P = \vec{\mathbf{F}}_B \cdot \vec{\mathbf{v}}$) fournie par la force magnétique et associée au mouvement horizontal est égale à $-(ev_dB)v$ et la puissance associée au mouvement de dérive est égale à $+(evB)v_d$. Bien que la force magnétique ait effectivement déplacé les électrons le long de la tige, on note que la puissance totale fournie par la force magnétique est nulle comme il se doit si on considère l'électron comme une particule libre.

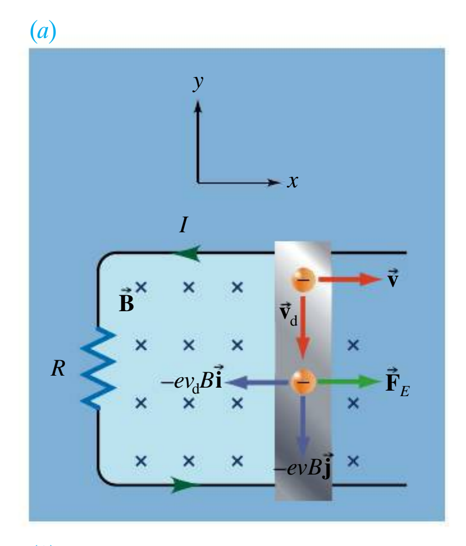
Si le travail magnétique sur un électron isolé est nul, alors quelle force fournit le travail qui correspond à la f.é.m. induite ? Laissons de côté un moment les forces sur l'électron, illustrées à la figure 10.38*a*, pour examiner les forces macroscopiques exercées sur la tige (figure 10.38*b*). Un agent extérieur exerce la force $\vec{\mathbf{F}}_{ext}$ qui maintient la tige en mouvement malgré la force magnétique $\vec{\mathbf{F}}_B = I\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{B}}$ subie par la tige, où I est le courant induit. À vitesse constante, ces deux forces ont le même module.

Mais nous avons vu, à la toute fin de la section 8.8, que d'un point de vue microscopique, la force subie par la tige n'est *pas* une force magnétique. La force magnétique n'affecte en fait que les électrons contenus par la tige, produisant un effet Hall : la force magnétique vers la gauche accumule une charge négative sur le côté gauche de la tige et une charge positive sur le côté droit. C'est donc en fait la force *électrique*, exercée par le champ électrique de Hall, qui affecte les noyaux des atomes qui constituent la tige ; les noyaux étant positifs, la force en question est effectivement vers la gauche.

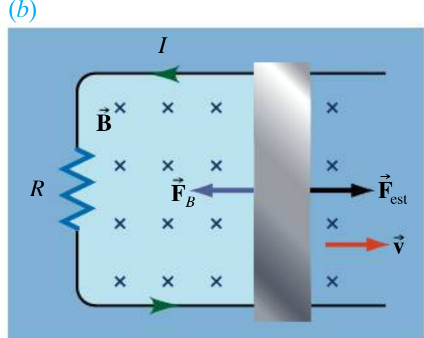
Revenons à la figure 10.38*a* : le champ électrique de Hall n'affecte pas que les noyaux d'atomes, mais aussi les électrons. Ceux-ci étant négatifs, ils subissent une force $\vec{\mathbf{F}}_E$ vers la droite (dont le module correspond à celui de la force sur la tige divisé par le nombre d'électrons).

Puisqu'elle est parallèle au mouvement des électrons (figure 10.38*a*), $\vec{\mathbf{F}}_E$ fait un travail sur eux. C'est ce travail qui correspond à la f.é.m. induite. La force magnétique fait un travail total nul, mais a pour effet de rediriger la force résultante sur les électrons. En un certain sens, le champ magnétique agit seulement comme un intermédiaire dans le transfert d'énergie de l'agent extérieur vers la tige.

(*a*)



(*b*)



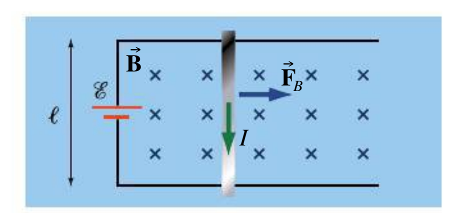
▲ **Figure 10.38**

Une tige conductrice en mouvement dans une direction normale au champ magnétique. (*a*) Modèle microscopique : la vitesse de chaque électron a une composante orientée selon le mouvement de la tige et une vitesse de dérive parallèle à la tige. La force magnétique a donc deux composantes. (*b*) Modèle macroscopique : la force « magnétique » subie par la tige est en fait une force électrique attribuable à l'effet Hall (voir la section 8.8). La force $\vec{\mathbf{F}}_E$ indiquée en (*a*) est celle que le champ électrique de Hall exerce sur les électrons.

Le moteur linéaire

Nous avons mentionné que toute génératrice peut s'inverser pour servir de moteur et vice versa. Considérons à nouveau un système fait d'une tige conductrice placée sur de longs rails conducteurs, le tout plongé dans un champ magnétique. On a vu qu'en fournissant un travail mécanique extérieur, on fait apparaître un courant induit. Mais le même système peut être employé en sens inverse : en fournissant un courant (grâce à une pile), on peut produire un travail mécanique. On obtient alors un « moteur linéaire » simple.

À la figure 10.39, la pile, la tige et les rails forment un circuit fermé, de sorte que la pile fait circuler un courant dans la tige. Le tout étant plongé dans un champ magnétique, la force magnétique accélère la tige. On pourrait penser qu'un tel montage peut propulser la tige à des vitesses très grandes (si les rails



▲ **Figure 10.39**

Un moteur linéaire composé d'une tige, d'une pile et de rails conducteurs.

sont assez longs). Toutefois, même en l'absence de frottement, la tige atteint une vitesse limite. En effet, le mouvement de la tige dans le champ magnétique produit une f.é.m. induite qui s'oppose à celle de la pile (contre-f.é.m.), et qui finit par annuler complètement son effet.

Pour simplifier l'analyse de la situation, supposons que la tige a une résistance R et que les rails ont une résistance négligeable. Ainsi, la résistance totale du circuit est constante et égale R. Au départ, lorsque la tige est immobile, la f.é.m. externe $\mathscr{E}$ produit un courant $I = \mathscr{E}/R$. La tige subit une force magnétique de module $F = I\ell B$, qui l'accélère vers la droite. Toutefois, au fur et à mesure qu'elle prend de la vitesse, la contre-f.é.m. de grandeur $\mathscr{E}' = B\ell v$ apparaît dans la tige et vient *s'opposer* à la f.é.m. externe (on peut le vérifier par la loi de Lenz ou en analysant ce qui se passe sur un électron dans la tige).

Si la force magnétique est la seule qui agit sur la tige (s'il n'y a pas de frottement ni d'autre force externe), la tige accélérera jusqu'à atteindre une vitesse limite telle que $\mathscr{E}' = \mathscr{E}$. Les deux f.é.m. s'annulent alors, le courant et la force magnétique deviennent nuls et la tige continue à une vitesse constante. S'il y a d'autres forces qui agissent sur la tige, la vitesse limite est atteinte lorsque la somme des forces qui agit sur la tige est nulle. Par la deuxième loi de Newton, $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$, l'accélération est alors nulle et la tige continue à une vitesse constante.

Exemple 10.15

Soit le moteur linéaire représenté à la figure 10.39, avec $\ell = 1$ m, $B = 0{,}5$ T, $\mathscr{E} = 10$ V. La résistance R de la tige est de 2 Ω et la résistance des fils qui composent le reste du circuit est négligeable. (a) Calculer le courant qui circule initialement dans le circuit, quand la tige est immobile, ainsi que le module de la force magnétique qui s'exerce alors sur la tige. Calculer la vitesse limite atteinte par la tige : (b) si la force magnétique est la seule à agir sur la tige ; (c) si une force de frottement de 2 N vers la gauche agit sur la tige ; (d) s'il n'y a pas de frottement et qu'une force extérieure de 2 N vers la droite agit sur la tige.

Solution

(a) Si la tige est immobile, il n'y a pas d'induction et le courant est seulement causé par la pile. Par la loi des mailles, $\Delta V_R = \mathscr{E} = 10$ V, le courant est $I = \Delta V_R/R = 5$ A et la force magnétique, $F_B = I\ell B = 2{,}5$ N. Le courant dans la tige est vers le bas et la force magnétique est vers la droite.

(b) La force magnétique calculée en (a) fait accélérer la tige vers la droite. Le mouvement de la tige fait varier le flux magnétique, donc une f.é.m. induite apparaît. Elle est de sens contraire à la f.é.m. de la pile.

La tige atteint une vitesse limite lorsque la f.é.m. induite est égale à la f.é.m. de la pile. La force magnétique devient alors nulle et l'accélération cesse. ■

Cela se produit lorsque $\mathscr{E}' = B\ell v = \mathscr{E}$, d'où $v = \mathscr{E}/\ell B = 20$ m/s.

(c) La vitesse limite est atteinte lorsque la force *résultante* devient nulle, c'est-à-dire quand la force magnétique $\vec{\mathbf{F}}_B$ contrebalance le frottement. ■

On a donc $F_B = 2$ N *vers la droite*. Par $F_B = I\ell B$, on trouve que le courant dans la tige égale $I = 4$ A *vers le bas*. (Pour produire une force magnétique vers la droite, le courant dans la tige doit être orienté vers le bas.) Le courant est moins élevé que lorsque la f.é.m. externe agit seule, car la contre-f.é.m. de la tige s'oppose à la f.é.m. de la pile. Par la loi des mailles,

$$\mathscr{E} - \mathscr{E}' = RI$$

d'où $\mathscr{E}' = \mathscr{E} - RI = 2$ V. Par $\mathscr{E}' = B\ell v$, on trouve $v = 4$ m/s.

(d) Cette fois, la vitesse limite est atteinte lorsque la force magnétique $\vec{\mathbf{F}}_B$ agit *vers la gauche* et contrebalance la force externe. ■

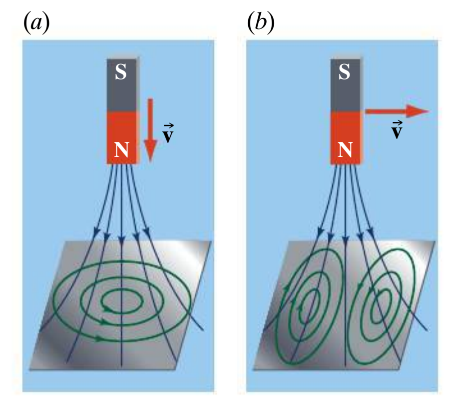
On a donc $F_B = 2$ N *vers la gauche*. Par $F_B = I\ell B$, on trouve que le courant égale $I = 4$ A *vers le haut*. (Pour produire une force magnétique vers la gauche, le courant dans la tige doit être orienté vers le haut.) Comme le courant produit dans la tige par la f.é.m. externe seule est vers le bas, on conclut que *la contre-f.é.m. de la tige est plus grande que la f.é.m. de la pile*. On peut donc écrire

$$\mathscr{E}' - \mathscr{E} = RI$$

d'où $\mathscr{E}' = \mathscr{E} + RI = 18$ V. Par $\mathscr{E}' = B\ell v$, on trouve $v = 36$ m/s.

10.8 LES COURANTS DE FOUCAULT

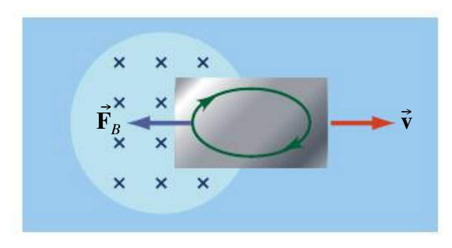
La figure 10.40*a* représente un barreau aimanté qui s'approche d'une plaque conductrice. Puisque le flux à travers un parcours quelconque sur la plaque est en train d'augmenter, des courants induits vont circuler dans le sens antihoraire (vu de l'aimant). Si l'aimant se déplace parallèlement à la plaque (figure 10.40*b*), la non-uniformité du champ signifie que les régions situées en avant de l'aimant subissent une augmentation de flux, tandis que celles qui sont situées derrière subissent une diminution du flux. Devant l'aimant, les courants circulent dans le sens antihoraire et, derrière l'aimant, ils circulent dans le sens horaire. De tels courants induits dans un matériau sont appelés **courants de Foucault** en hommage à Léon Foucault (1819-1868), qui fut l'un des premiers à observer et à étudier le phénomène.



▲ **Figure 10.40**

Lorsqu'un barreau aimanté se déplace par rapport à une plaque conductrice, des courants de Foucault sont induits dans la plaque.

À la section précédente, nous avons vu ce qui se passe lorsqu'une tige se déplace dans un champ magnétique. Si l'on remplace la tige par une plaque conductrice (figure 10.41), les courants induits sont répartis dans l'ensemble de la plaque. Si une partie seulement de la plaque est située dans le champ, les courants dans cette partie vont être soumis à une force opposée à l'orientation du mouvement. Cette force de ralentissement peut être utilisée pour amortir les oscillations d'un équilibre chimique ou du cadre d'un galvanomètre. De même, les courants de Foucault sont parfois utilisés dans les systèmes de freinage des trains (voir le sujet connexe à la fin de cette section). Une des voitures du train comporte un électroaimant placé près d'un rail. Lorsqu'on fait circuler le courant dans l'aimant, d'intenses courants de Foucault sont induits dans le rail. La force magnétique exercée sur ces courants par l'aimant est orientée vers l'avant. D'après la troisième loi de Newton, la force de réaction sur le train est orientée vers l'arrière. Les forces dues aux courants de Foucault sont également utilisées dans les indicateurs de vitesse des automobiles.



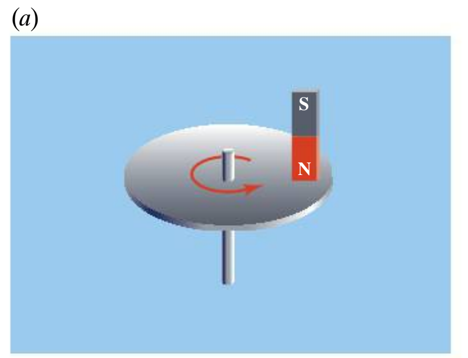
▲ **Figure 10.41**

Une plaque conductrice que l'on tire dans un plan perpendiculaire aux lignes du champ. La force magnétique résultante sur les courants de Foucault est opposée au sens du mouvement.

En circulant à l'intérieur d'un conducteur, les courants de Foucault produisent de l'énergie thermique. Cette méthode de production de chaleur est utilisée dans les fonderies et dans les procédés d'affinage pour les semi-conducteurs. Les courants de Foucault engendrés dans les casseroles en cuivre peuvent également être utilisés dans la «cuisson par induction».

La figure 10.42*a* représente un aimant suspendu au-dessus du bord d'un disque conducteur qui tourne rapidement autour d'un axe vertical. Les courants de Foucault induits dans le disque produisent une force qui a tendance à entraîner l'aimant dans le sens du mouvement de la circonférence du disque. L'aimant est également soumis à une force de répulsion. On peut mettre en évidence la force de répulsion qui provient des courants de Foucault de la manière suivante. On enroule un solénoïde autour d'un barreau de fer (pour obtenir un champ plus intense) comme le montre la figure 10.42*b*. On place un anneau de cuivre à

(*a*)



(*b*)



◀ **Figure 10.42**

(*a*) Un aimant suspendu au-dessus d'un disque métallique tournant rapidement sur lui-même induit des courants de Foucault dans le disque. Les forces magnétiques sont telles que l'aimant a tendance à être entraîné par le disque et qu'il est également repoussé. (*b*) Un barreau de fer est placé à l'intérieur d'un solénoïde (pour renforcer le champ magnétique produit par le solénoïde) et un anneau métallique est placé à l'extrémité. Si le courant circulant dans le solénoïde varie rapidement, l'anneau est éjecté.

l'extrémité du solénoïde. Lorsqu'on fait passer un courant (à variation rapide), l'anneau est repoussé (conformément à la loi de Lenz) et se trouve projeté vers le haut. Au lieu d'un anneau, on peut utiliser une plaque plane. La force de répulsion due aux courants de Foucault est utilisée dans la lévitation et la propulsion magnétiques des trains, comme le montre le sujet connexe ci-dessous.

SUJET CONNEXE

La lévitation et la propulsion magnétiques

Bien que le *train à grande vitesse* (TGV) atteignait en 2007 la vitesse record de 575 km/h, les trains qui se propulsent grâce aux frottements entre les roues et les rails ne peuvent habituellement pas dépasser 300 km/h sans perte de traction. Une autre solution pour les transports à grande vitesse consiste à employer les forces électromagnétiques à la fois pour soulever et pour propulser un train à *lévitation magnétique*. Ces trains, qui sont silencieux et peuvent atteindre des vitesses de plus de 500 km/h, sont propulsés par des *moteurs synchrones*. Avant d'aborder le fonctionnement de ces trains, voyons d'abord un autre type de moteur magnétique, le *moteur à induction*.

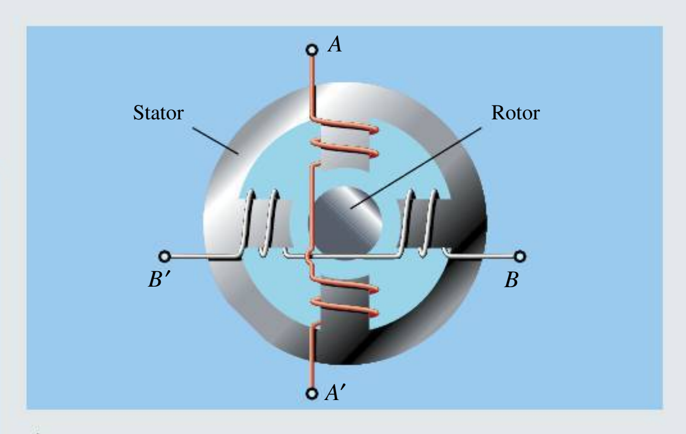
Moteur à induction

Le moteur à induction fut inventé par Nikola Tesla (1856-1943) en 1888, et fut le premier moteur pouvant fonctionner de manière satisfaisante au courant alternatif. La fonction du moteur que nous allons décrire est de faire tourner une pièce appelée *rotor*, laquelle peut ensuite être reliée à des roues. Pour avoir une idée du principe de son fonctionnement, considérons d'abord une aiguille de boussole montée sur pivot, laquelle joue le rôle du rotor. Si le pôle sud d'un barreau aimanté décrit un cercle (figure 10.43), l'aiguille est attirée vers le barreau et se met à tourner, pointant toujours son pôle nord vers le pôle sud du barreau aimanté. Tesla mit au point une méthode pour créer un champ magnétique rotatif sans faire intervenir la rotation mécanique d'un aimant, en se servant d'un *stator* comportant deux ou plusieurs paires de bobines, alimentées par des courants alternatifs. Comme le montre la figure 10.44, un stator, en général fait d'acier laminé, comporte des protubérances sur lesquelles sont enroulées les bobines. Ces bobines pointent toutes vers l'intérieur l'une de leurs extrémités, comme le faisait le pôle sud de l'aimant à la figure 10.43 ; on les appelle donc des « pôles ». On fait circuler dans les bobines AA' et BB' des courants alternatifs déphasés d'un quart de cycle (figure 10.45*a*). Ainsi, lorsque le courant dans une des paires a sa valeur maximale, le courant dans l'autre paire est nul. Dans cet exemple, qui utilise un courant à deux phases et deux paires de pôles, le champ magnétique résultant tourne une fois par cycle de courant (figure 10.45*b*). Si la fréquence des courants est de 60 Hz, le champ magnétique effectue 60 révolutions par seconde.

Le rotor central n'est pas relié électriquement au stator. Un type commun de rotor appelé « cage d'écureuil » (figure 10.46*a*) est fait de barres de cuivre parallèles reliées entre elles par des bagues aux extrémités, de façon à former un cylindre. Supposons que le rotor soit initialement au repos et que l'on fasse circuler le courant biphasé dans le stator, ce qui produit un champ

▲ **Figure 10.43**

Une aiguille de boussole suit la rotation d'un aimant.

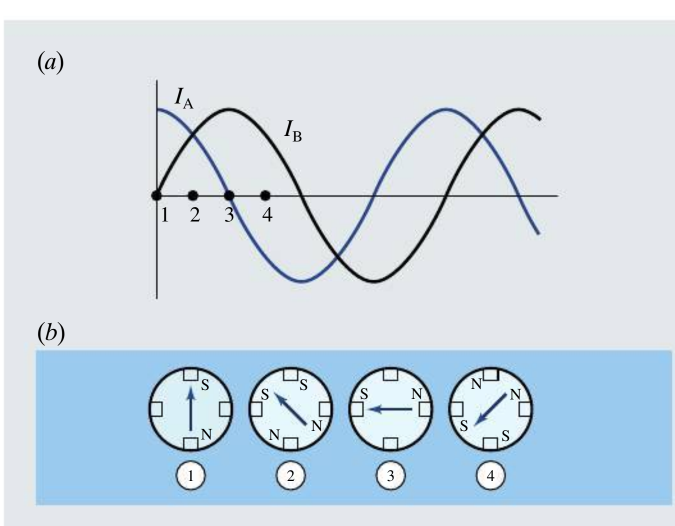


▲ **Figure 10.44**

On produit un champ magnétique tournant en faisant circuler dans deux jeux de bobines (ou plus) des courants alternatifs qui ne sont pas en phase.

(*a*)

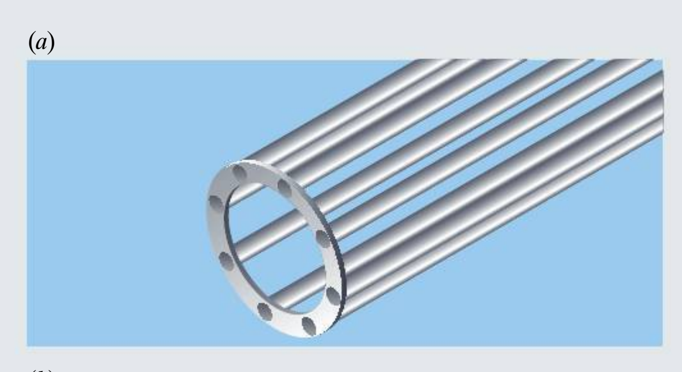
(*b*)



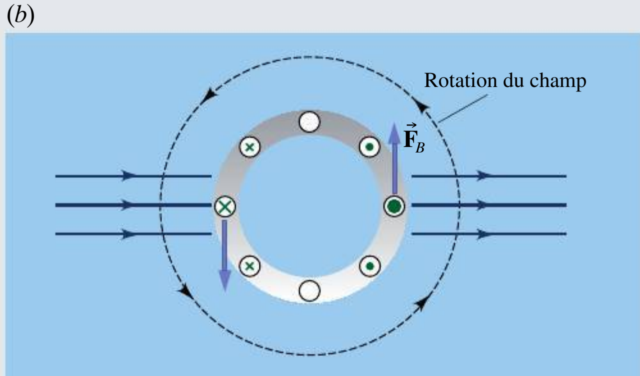
▲ **Figure 10.45**

(*a*) Deux courants déphasés de 90°. (*b*) La direction du champ magnétique à quatre instants.

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 10.46**

(*a*) Une cage d'écureuil. (*b*) Les courants induits sont soumis à des forces tel qu'indiqué.

magnétique qui tourne dans le sens antihoraire. Puisque le champ magnétique varie, un champ électrique induit apparaît, lequel produit des courants dans les barres du rotor. Pour déterminer le sens de ces courants, il est plus simple d'analyser cette situation dans un référentiel où le champ magnétique a une orientation constante et où le rotor tourne dans le sens horaire. Comme les barres du rotor se déplacent alors dans ce champ magnétique, les électrons qu'elles contiennent subissent une force magnétique $\vec{\mathbf{F}}_B = q\vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}}$, où $\vec{\mathbf{v}}$ est la vitesse d'une barre par rapport au champ.

Revenons au référentiel habituel. La figure 10.46*b* indique le sens des courants induits dans le rotor initialement immobile, la taille des points et des croix reflétant leurs intensités relatives. La figure montre aussi les deux plus intenses forces $\vec{\mathbf{F}}_B = I\vec{\mathbf{L}} \times \vec{\mathbf{B}}$ que le champ magnétique du stator exerce sur les barres. Ces forces font tourner le rotor dans le sens de rotation du champ.

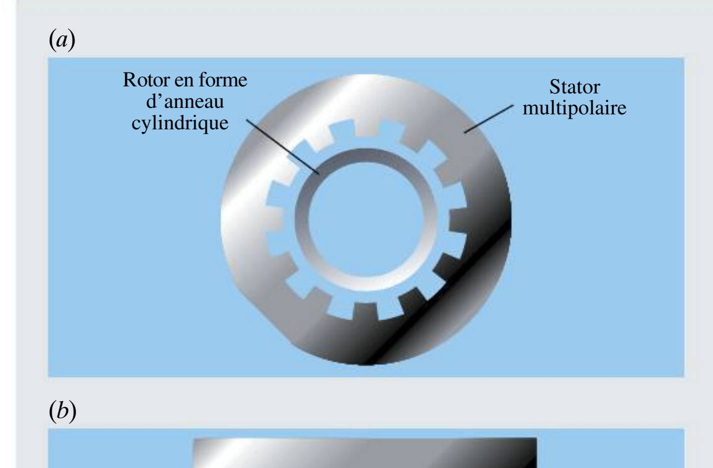
En raison de ces forces, la vitesse du rotor augmente. Mais cela signifie qu'il tourne moins vite par rapport au champ, donc que les courants induits diminuent, de même que la force. La vitesse croît jusqu'à ce qu'elle atteigne pratiquement la vitesse angulaire synchrone ω_s pour laquelle il n'y a plus de mouvement relatif entre le rotor et le champ. S'il lui suffisait de continuer à tourner en raison de son inertie, le moteur pourrait atteindre exactement la vitesse de rotation du champ magnétique. Mais dans la pratique, il doit au moins compenser les pertes dues au frottement, donc la vitesse angulaire reste légèrement inférieure à la valeur synchrone. Lorsque le rotor doit effectuer un travail, sa vitesse angulaire diminue. Les courants induits, et par conséquent le moment de force produit, augmentent.

Le moteur que nous venons de décrire, si on le relie à des roues, pourrait être utilisé dans la propulsion d'un véhicule, mais il y aurait des pertes inévitables dues au frottement dans les engrenages et les roues, alors que c'est précisément ce qu'on souhaite éviter dans un train à lévitation et à propulsion magnétiques. Le moteur à induction linéaire fut une première étape vers la résolution de ces problèmes.

Moteur à induction linéaire

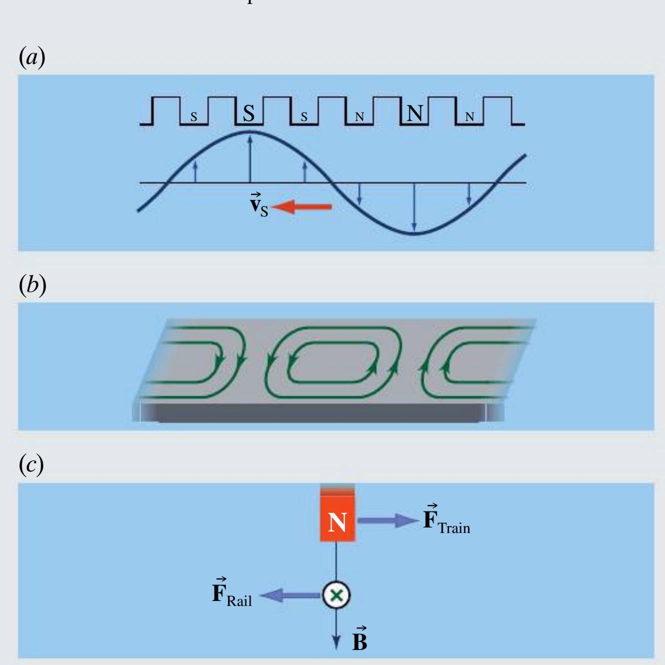
Le moteur à induction décrit précédemment fonctionne également si les barres de cuivre du rotor sont remplacées par un anneau cylindrique continu (figure 10.47*a*). Supposons que l'on coupe le long d'une ligne radiale le moteur de la figure 10.47*a* et qu'on le déroule pour obtenir la forme plate de la figure 10.47*b*. On obtient alors un *moteur à induction linéaire*, où le rotor devient une bande conductrice plate posée sur un lit de béton ; c'est le rail de réaction. Le véhicule comporte une série d'aimants autour desquels circule un courant alternatif. En première approximation, le champ magnétique a une variation sinusoïdale dans l'espace (figure 10.48*a*). En fonction du temps, le champ magnétique se propage de l'avant vers l'arrière du train, ce qui a pour effet d'entraîner le rail de réaction vers l'arrière par rapport au train. Si λ est la séparation entre des pôles où le champ magnétique est identique et f est la fréquence du courant, la vitesse du champ par rapport au train est $v_s = \lambda f$, la vitesse synchrone.

►►►



▲ **Figure 10.47**

(*a*) On peut remplacer la cage d'écureuil par une bague continue. (*b*) Dans le moteur à induction linéaire, le stator et le rotor sont « ouverts » et déroulés à plat.



▲ **Figure 10.48**

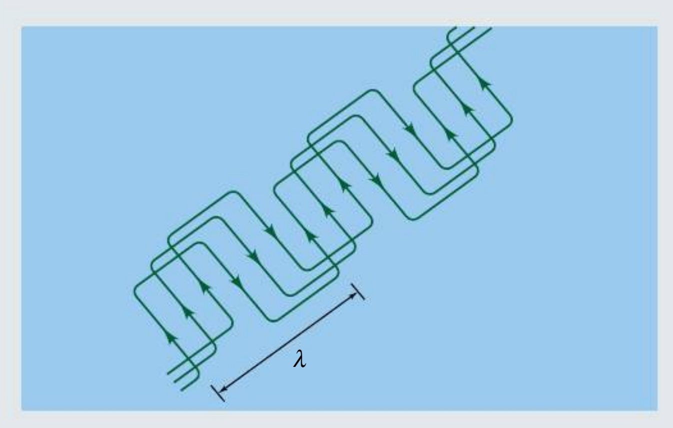
(*a*) Lorsqu'on fait varier les courants dans les électroaimants, le champ magnétique se propage de l'avant vers l'arrière. (*b*) Les courants induits dans la voie. (*c*) La force magnétique sur les courants induits est dirigée vers l'arrière. La force sur l'aimant (sur le train) est dirigée vers l'avant.

La principale différence avec le moteur rotatif réside dans le fait que c'est le rail, équivalent au rotor, qui est immobile et le train, équivalent au stator, qui bouge. En effet, les courants induits dans le rail (figure 10.48*b*) subissent, comme dans le moteur rotatif, des forces de même sens que le mouvement du champ, c'est-à-dire orientées vers l'arrière du train. D'après la troisième loi de Newton, les forces sur les aimants sont dirigées vers l'avant (figure 10.48*c*), ce qui propulse le train. Lorsque le train accélère, la vitesse relative entre le champ magnétique et le rail de réaction diminue, de sorte que la force propulsive diminue. La force propulsive serait nulle à la vitesse synchrone. Comme dans le moteur rotatif, il s'agit donc de la vitesse maximale du train.

Bien que plusieurs modèles aient déjà fonctionné, l'adoption du moteur à induction linéaire pour les transports interurbains à grande vitesse pose des problèmes. L'intervalle d'air entre le train et le rail de réaction ne mesure que 3 cm environ et ne laisse donc pas beaucoup de marge pour les mouvements de tangage et de roulis du train. De plus, une puissance électrique voisine de 5 MW doit être prélevée par un contact glissant sur un câble qui court le long du rail. Cela poserait un sérieux problème à 400 km/h.

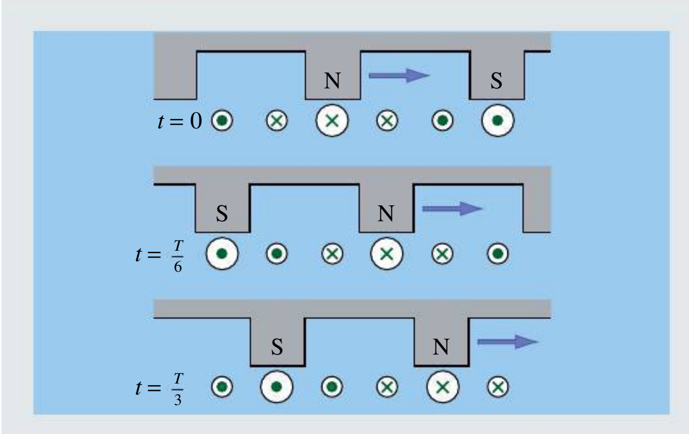
Moteur synchrone linéaire

Dans le moteur synchrone linéaire, utilisé aujourd'hui, on alimente en courant *continu* de puissants électroaimants placés sur un train. Comme le montre la figure 10.49, trois câbles enfouis dans une voie en béton sont alimentés en courant alternatif de fréquence f. L'espacement des électroaimants doit correspondre à la distance de répétition λ des courants dans la voie. Le sens du courant sous chaque électroaimant est réglé (par un choix approprié de la constante de phase), de sorte que la force sur l'aimant soit toujours dirigée vers l'avant. La figure 10.50 montre comment les courants varient dans les câbles au fur et à mesure que le train se déplace vers l'avant. La vitesse synchrone est $v_s = \lambda f$. Lorsqu'on utilise un moteur synchrone, il est nécessaire de faire correspondre la fréquence des courants à la vitesse du train. Comme c'est difficile à réaliser, on a recours à d'autres moyens, par exemple le moteur à induction linéaire, pour accroître la vitesse du train



▲ **Figure 10.49**

La configuration des fils enfouis dans une voie en béton utilisée dans le moteur synchrone linéaire.



▲ **Figure 10.50**

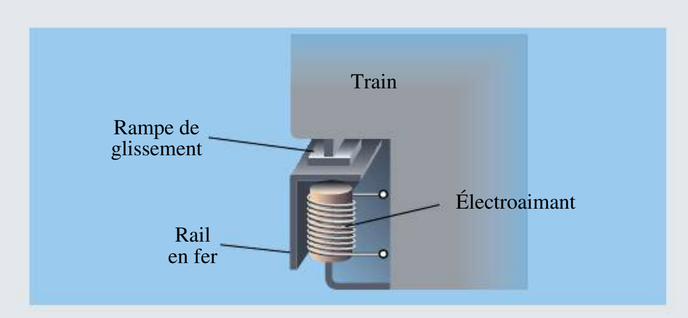
Le courant dans chaque fil est réglé de telle manière que la force sur chaque pôle soit dirigée vers l'avant.

jusqu'à v_S. À un instant quelconque, seuls de courts segments de la voie, de 5 km de long environ, doivent être raccordés aux lignes de transmission (60 Hz). On peut ralentir le train en modifiant la phase des courants.

Sur un train donné, il peut y avoir 50 aimants de section transversale 0,5 m × 1,5 m, espacés de 60 cm. Les courants circulant dans les bobines de champ magnétique, qui sont supraconductrices, peuvent atteindre 5×10^5 A. Pour une poussée de 4×10^4 N, un courant de 250 A seulement doit circuler dans la voie.

Lévitation magnétique

Il existe deux manières d'utiliser les forces magnétiques pour soutenir le poids d'un train. On peut employer l'attraction entre les électroaimants du train et un rail en fer (figure 10.51). Cette approche est foncièrement instable, car la force d'attraction augmente lorsque l'aimant se rapproche du rail. Il est donc nécessaire de prévoir un système de contre-réaction électronique pour régler le courant dans les électroaimants. L'autre approche consiste à utiliser la répulsion entre un électroaimant (supraconducteur) et les courants de Foucault qu'il induit dans un conducteur.

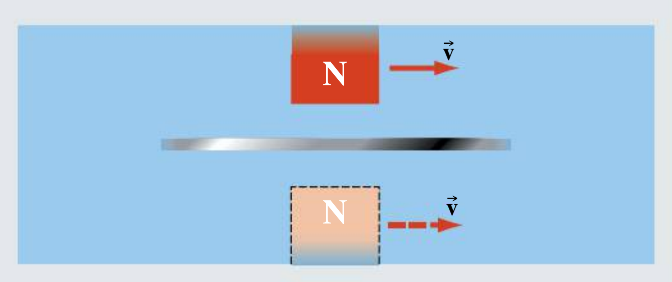


▲ **Figure 10.51**

La lévitation d'un train peut être réalisée par l'attraction entre un électroaimant et un rail en fer.

Lorsqu'un aimant se déplace par rapport à une plaque conductrice (figure 10.52), les courants de Foucault induits dans la plaque créent des forces de portée et de traînée dans l'aimant. La force de traînée provient de la dissipation de chaleur liée aux courants de Foucault (voir la section 10.8). Plus importante est la présence de forces répulsives entre l'aimant et la plaque conductrice. On peut montrer que la plaque conductrice agit comme un « miroir ». Autrement dit, on peut calculer la force répulsive exercée par les courants de Foucault en imaginant un aimant « image » situé sous la plaque.

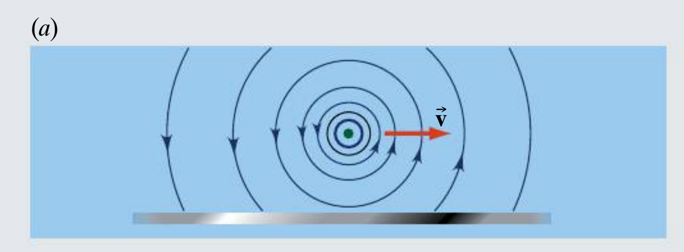
On peut observer les forces de portée et de traînée avec un montage plus simple : un long fil rectiligne parcouru par un courant, qui se déplace perpendiculairement à sa longueur, au-dessus d'une plaque métallique. Le champ magnétique du fil est représenté à la figure 10.53*a*. La figure 10.53*b* représente, à un instant donné, la composante verticale du champ devant et derrière le fil. Le mouvement du fil produit donc, en un point donné, une variation du champ dans le temps. Il en résulte un



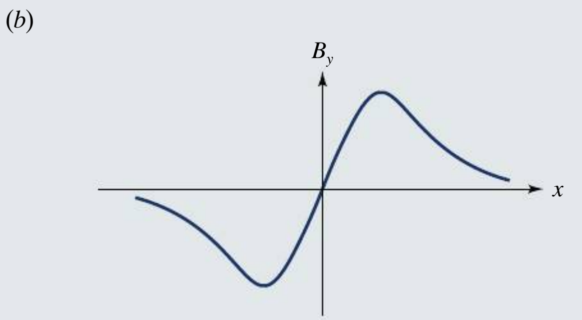
▲ **Figure 10.52**

Lorsqu'un pôle se déplace au-dessus d'une voie en métal, il subit une force de répulsion (due aux courants de Foucault) comme s'il y avait un pôle « image ».

(*a*)



(*b*)

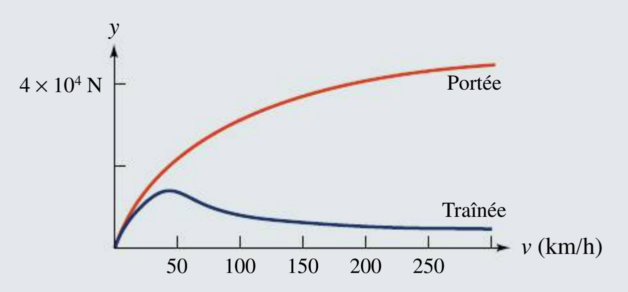


▲ **Figure 10.53**

La composante verticale du champ magnétique d'un fil isolé parcouru par un courant.



courant induit juste en dessous du fil, lequel produit une force de portée. La variation des forces de portée et de traînée avec la vitesse est identique pour un fil et pour un aimant. La figure 10.54 représente les forces pour un électroaimant supraconducteur de section transversale 0,3 m × 1 m et parcouru par un courant de 4×10^5 A. Alors que la force de portée augmente régulièrement avec la vitesse, la force de traînée atteint un maximum à une vitesse relativement faible puis décroît au fur et à mesure que la vitesse augmente. Cette caractéristique est bien sûr très utile. La traînée à grande vitesse est ainsi surtout aérodynamique. On peut réduire la traînée due aux courants de Foucault à faible vitesse en utilisant une plaque plus épaisse (3 cm environ) pour le premier kilomètre au départ d'une gare, puis en réduisant l'épaisseur à la valeur normale de 1 cm. De toute façon, des roues sont nécessaires pour supporter le train à faible vitesse. La figure 10.55 représente un train à lévitation magnétique fonctionnant actuellement en Allemagne.



▲ **Figure 10.54**

Les forces de portée et de traînée produites par un électroaimant supraconducteur.



▲ **Figure 10.55**

Un train à lévitation magnétique en Allemagne.

RÉSUMÉ



Dans un champ magnétique uniforme, le flux magnétique traversant une surface plane d'aire $\vec{\mathbf{A}}$ est donné par

$$\Phi_B = BA\cos\theta = \vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}} \qquad (10.1)$$

Si la surface n'est pas plane ou si le champ n'est pas uniforme, le flux est donné par

$$\Phi_B = \int d\Phi_B = \int \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} \qquad (10.2)$$

La loi de Faraday de l'induction électromagnétique est une relation entre la f.é.m. induite dans un circuit fermé et le taux de variation du flux traversant ce circuit :

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (10.4)$$

Le signe négatif tient compte du sens de $\mathscr{E}$, qui est donné par la loi de Lenz : l'effet de la f.é.m. induite est tel qu'il s'oppose à la variation de flux qui produit

cette f.é.m. induite. Lorsque N spires sont traversées par la même variation de flux magnétique, la loi de Faraday prend la forme :

$$\mathscr{E} = -N\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} \qquad (10.5)$$

Lorsqu'une tige conductrice de longueur ℓ se déplace dans un champ magnétique uniforme avec une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ perpendiculaire à $\vec{\mathbf{B}}$, il y apparaît une f.é.m. induite dont la grandeur est

$$\mathscr{E} = B\ell v \qquad (10.12a)$$

TERMES IMPORTANTS

champ électrique induit (p. 429)
commutateur (p. 427)
contre-f.é.m. (p. 428)
courants de Foucault (p. 439)
f.é.m. induite (p. 408)
flux magnétique (p. 411)
générateur (p. 426)
induction électromagnétique (p. 408)
loi de Faraday (p. 417)
loi de Lenz (p. 415)
weber (p. 412)

RÉVISION

R1. Décrivez les trois façons de produire une f.é.m. induite à partir d'un barreau aimanté et d'une boucle de fil flexible. Reliez chacune d'elles aux trois termes du développement mathématique de la loi de Faraday appliquée au cas d'un champ uniforme au travers d'une surface plane.

R2. Vrai ou faux ? Selon la loi de Lenz, le champ magnétique induit est toujours de sens contraire au champ magnétique extérieur.

R3. Expliquez comment on choisit le sens du vecteur $\vec{\mathbf{A}}$ dans le calcul du flux du champ magnétique.

R4. Décrivez la convention qui donne le signe de la f.é.m. induite dans la loi de Faraday.

R5. On produit une f.é.m. induite en déplaçant un barreau aimanté devant une bobine fixe. Dans quelle situation le barreau subit-il (a) une force qui l'attire vers la bobine ; (b) une force qui le repousse de la bobine ?

R6. Expliquez le principe de fonctionnement d'un générateur de courant alternatif.

R7. Comparez les deux différents phénomènes qui peuvent produire la f.é.m. induite.

R8. Quelle est la nature de la force causant le mouvement de dérive des électrons (courant induit) dans les cas suivants : (a) on déplace le conducteur dans un champ magnétique uniforme ; (b) on déplace le conducteur dans un champ magnétique non uniforme ; (c) on déplace un aimant à proximité d'un conducteur immobile.

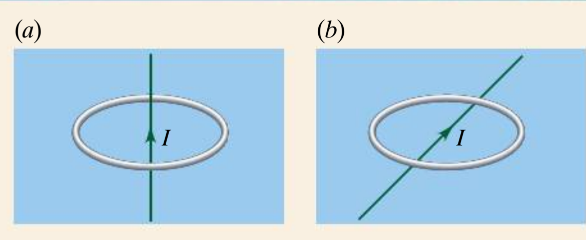
R9. Dans un moteur linéaire sans frottement, expliquez pourquoi la tige en mouvement atteint une vitesse limite.

QUESTIONS

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

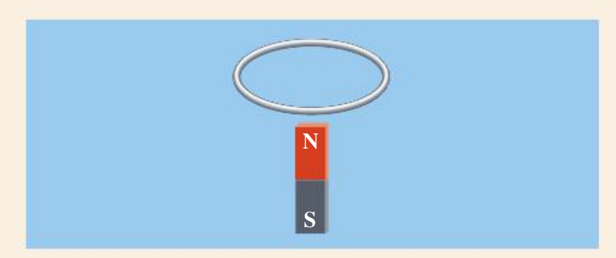
Q1. Quelle est la différence entre un champ magnétique et un flux magnétique ?

Q2. Soit un fil conducteur long et rectiligne passant par le centre d'un anneau. Si le courant varie dans le fil, l'anneau est-il le siège d'une f.é.m. induite dans l'un ou l'autre des deux cas représentés à la figure 10.56 ? (a) À la figure 10.56*a*, le fil coïncide avec l'axe de l'anneau ; (b) à la figure 10.56*b*, le fil coïncide avec un diamètre.



▲ **Figure 10.56**
Question 2.

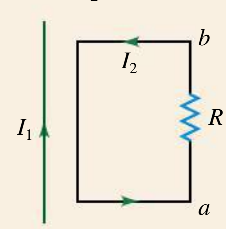
Q3. Soit un barreau aimanté placé sur l'axe d'un anneau circulaire à une distance donnée du centre (figure 10.57). L'anneau est-il le siège d'une f.é.m. induite s'il tourne autour de son axe central ?



▲ **Figure 10.57**
Questions 3 et 4.

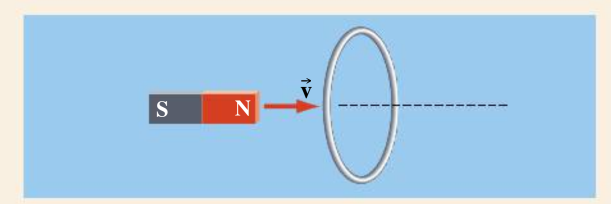
Q4. On lâche un anneau métallique léger au-dessus d'un barreau aimanté vertical (figure 10.57). Décrivez qualitativement le mouvement de l'anneau.

Q5. Le courant I_1 circulant dans un long fil rectiligne varie dans le temps. Le courant I_2 induit dans le cadre voisin (figure 10.58) circule de a vers b dans la résistance. Si l'on branche un voltmètre entre a et b, que va-t-il indiquer ?



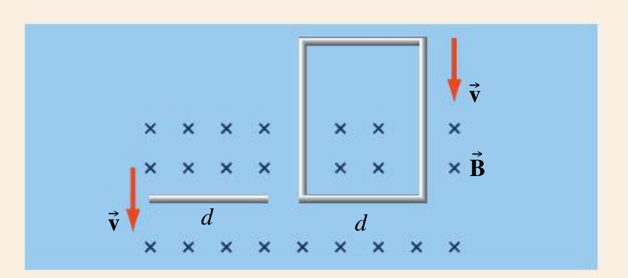
▲ **Figure 10.58**
Question 5.

Q6. Un aimant se déplace à vitesse constante sur l'axe d'une boucle immobile (figure 10.59). Faites un graphe représentant qualitativement la variation en fonction du temps (a) du flux à travers la surface de l'anneau ; (b) de la f.é.m. induite sur l'anneau.



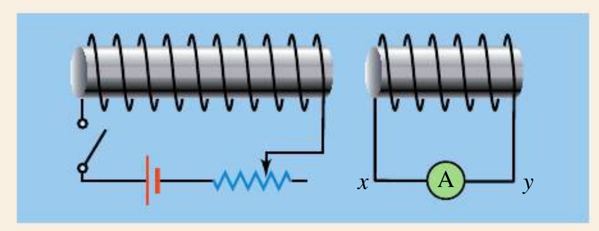
▲ **Figure 10.59**
Question 6.

Q7. Une tige de longueur d et un cadre rectangulaire de largeur d sont lâchés ensemble et tombent dans un champ magnétique uniforme (figure 10.60). Y a-t-il une différence dans leurs mouvements ? (On suppose que le cadre n'est jamais totalement dans le champ.)



▲ **Figure 10.60**
Question 7.

Q8. On enroule deux bobines sur des formes cylindriques (figure 10.61). Une des bobines est reliée en série à une pile, un interrupteur et une résistance variable. L'autre est reliée à un ampèremètre. Indiquez le sens du courant induit mesuré par l'ampèremètre (de x vers y ou de y vers x) dans les conditions suivantes : (a) on ferme l'interrupteur ; (b) l'interrupteur étant fermé, on diminue la résistance ; (c) l'interrupteur étant fermé, on éloigne les bobines l'une de l'autre.



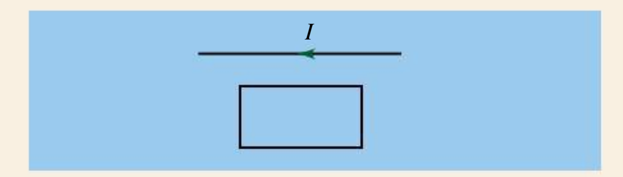
▲ **Figure 10.61**
Question 8.

Q9. Un solénoïde sert d'antenne dans une radio de poche AM. Sur quel principe s'appuie la conception d'une telle antenne ?

Q10. On laisse tomber un barreau aimanté dans un long tuyau de cuivre vertical. Décrivez qualitativement son mouvement. On néglige la résistance de l'air.

Q11. En quoi la f.é.m. induite est-elle différente de la f.é.m. d'une pile ?

Q12. Soit un cadre plat et un long fil rectiligne situés dans le même plan (figure 10.62). Si le courant circulant dans le fil diminue soudainement, dans quel sens (horaire ou antihoraire) circule le courant induit dans le cadre ?



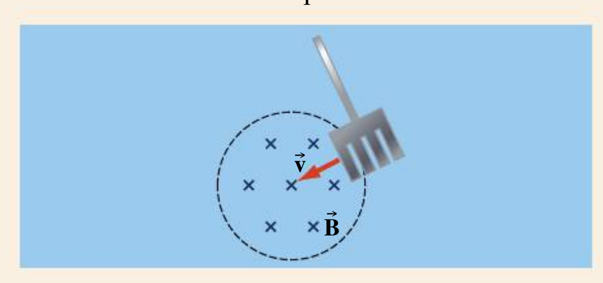
▲ **Figure 10.62**
Question 12.

Q13. Une boîte métallique joue le rôle d'écran de protection contre les champs électriques extérieurs. Sert-elle aussi d'écran contre les champs magnétiques extérieurs ? Y aurait-il une différence entre des champs magnétiques statiques et des champs magnétiques variables dans le temps ?

Q14. Est-il vrai qu'un moteur électrique, tel que celui d'une perceuse électrique, agit comme un générateur lorsqu'il est en marche ? Si oui, quelle conséquence cela a-t-il ?

Q15. Un aimant suspendu oscille librement dans un plan horizontal. Les oscillations sont fortement amorties lorsqu'on place une plaque métallique sous l'aimant. Expliquez ce qui se produit.

Q16. Si l'on déplace rapidement une plaque d'aluminium dans la région située entre les pôles d'un électroaimant, elle est soumise à une force d'amortissement considérable. Mais si l'on découpe des fentes dans la plaque (figure 10.63), la force diminue considérablement. Pourquoi ?



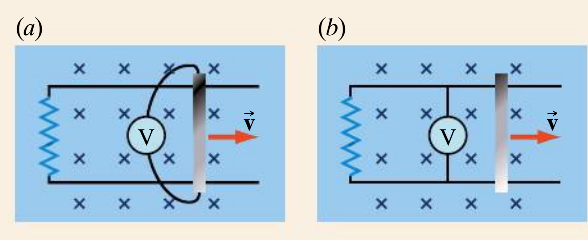
▲ **Figure 10.63**

Question 16.

Q17. Deux bobines sont situées l'une en face de l'autre avec leurs axes confondus. Est-il possible que l'une des bobines soit le siège d'une f.é.m. induite si le courant dans l'autre bobine est nul durant un instant ?

Q18. Dans un champ magnétique uniforme, on pivote de 180° une petite bobine plate. (a) Le nombre de lignes traversant la bobine varie-t-il ? (b) Le flux à travers la bobine varie-t-il ?

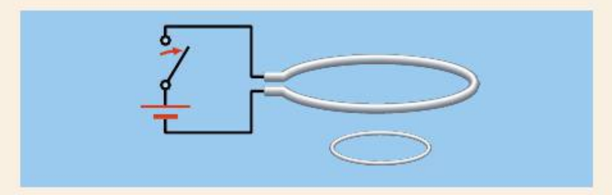
Q19. Une tige métallique se déplace sur des rails conducteurs perpendiculaires à un champ magnétique (figure 10.64). La tige est le siège d'une f.é.m. induite dans un conducteur en mouvement. Un voltmètre immobile va-t-il enregistrer une valeur s'il est connecté comme à la figure 10.64*a* ou comme à la figure 10.64*b* ?



▲ **Figure 10.64**

Question 19.

Q20. Un anneau métallique mince se trouve sous une spire reliée à une pile et à un interrupteur (figure 10.65). Lorsqu'on ouvre l'interrupteur, l'anneau est-il attiré ou repoussé par la spire ?



▲ **Figure 10.65**

Question 20.

Q21. Dans une région donnée, le champ magnétique terrestre est vertical et dirigé vers le bas. Si un avion vole vers le nord, laquelle de ses ailes est positivement chargée à son extrémité ?

Q22. Deux boucles sont posées côte à côte sur une table. Si un courant de sens horaire commence soudainement à circuler dans l'une, quel est le sens du courant induit dans l'autre ?

Q23. Décrivez comment l'induction électromagnétique permet de recharger la pile d'un implant médical au travers de la peau.

EXERCICES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

Dans les exercices suivants, lorsque le sens du vecteur $\vec{A}$ est ambigu, on le choisit pour que Φ_B soit positif.

10.2 Flux magnétique

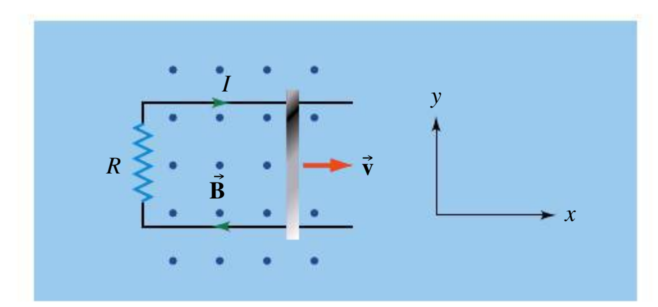
E1. (I) Le plan d'un cadre de dimension 12 cm × 7 cm est initialement perpendiculaire à un champ magnétique uniforme de module 0,2 T. Déterminez la variation de flux à travers le cadre s'il tourne de 120° autour d'un axe perpendiculaire aux lignes de champ.

E2. (I) Le plan d'une boucle de rayon 6 cm fait un angle de 30° avec un champ magnétique uniforme de module 0,25 T. (a) Quel est le flux à travers la spire ? (b) Si l'on inverse le sens du champ, quelle est la variation de flux ?

10.3 Loi de Faraday, loi de Lenz

E3. (I) Un long solénoïde comportant 10 spires/cm est parcouru par un courant de 4 A. À l'intérieur du solénoïde se trouve une bobine circulaire de 5 spires d'aire 8 cm^2, dont l'axe fait un angle de 37° avec l'axe du solénoïde. Déterminez la valeur de la f.é.m. induite moyenne si le courant augmente de 25 % en 0,1 s.

E4. (I) Une tige métallique de longueur ℓ = 5 cm se déplace à vitesse constante $\vec{\mathbf{v}}$ sur des rails formant un circuit fermé avec une résistance R = 0,2 Ω (figure 10.66). La résistance de la tige et des rails est négligeable. Un champ magnétique constant et uniforme de module B = 0,25 T est normal au plan des rails. Le courant induit I = 2 A circule dans le sens indiqué. Déterminez: (a) le module de la vitesse v; (b) la force extérieure nécessaire pour maintenir la tige en mouvement à la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$.



▲ Figure 10.66
Exercice 4.

E5. MonLab (I) Une bobine de résistance 3 Ω comporte 25 spires d'aire égale à 8 cm^2. Son plan est perpendiculaire à un champ uniforme. Soit $B(t)$ = 0,4t – 0,3t^2, où t est en secondes et B en teslas. (a) Quel est le flux magnétique traversant la bobine en fonction du temps ? (b) Quelle est l'intensité du courant induit à l'instant t = 1 s ? (c) À quel instant $B(t)$ devient-il nul ? L'équation 10.3b est-elle toujours valable après cet instant ?

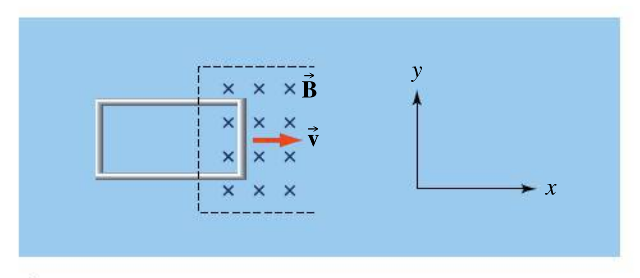
E6. (I) Le plan d'une bobine circulaire comportant 15 spires de rayon 2 cm fait un angle de 40° avec un champ magnétique dont l'orientation est constante dans l'espace et de module 0,2 T. Déterminez la valeur de la f.é.m. induite si le module du champ augmente linéairement avec le temps jusqu'à 0,5 T en 0,2 s.

E7. (I) Un solénoïde de longueur 30 cm comporte 240 spires de rayon 2 cm. Une bobine à spires jointives comportant 12 spires de rayon 3 cm entoure le solénoïde en s'alignant sur son centre. Les axes de la bobine et du solénoïde sont confondus. Trouvez la f.é.m. induite dans la bobine si le courant dans le solénoïde varie selon $I(t)$ = 4,8 sin(60πt), où t est en secondes et I en ampères. (Utilisez l'équation 9.13 pour le module B du champ magnétique.)

E8. (I) L'antenne d'un poste de radio recevant une station AM qui émet sur 800 kHz est constituée d'une bobine de 120 spires de rayon 0,6 cm. La bobine est le siège d'une f.é.m. induite due au champ magnétique oscillant de l'onde radio. Soit $\vec{\mathbf{B}}(t) = 1{,}0 \times 10^{-5} \sin(2\pi f t)\vec{\mathbf{k}}$, où t est en secondes et B en teslas. Quelle est la f.é.m. induite dans la bobine ? On suppose que le champ magnétique est orienté selon l'axe de la bobine. Rappelons que $\vec{\mathbf{B}} \cdot \vec{\mathbf{A}} = B_xA_x + B_yA_y + B_zA_z$.

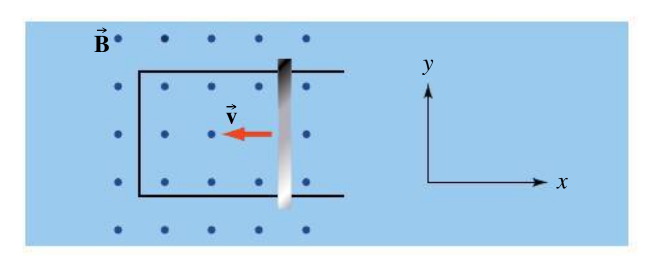
E9. (I) Une boucle circulaire de diamètre 10 cm est placée sur une table horizontale. Un champ magnétique d'orientation constante dans l'espace et de module 0,2 T est orienté verticalement vers le haut à t = 0. Soit $B(t)$ = 0,2 – 12,5t, où t est en secondes et B en teslas. (a) Quelle est la variation de flux magnétique à travers la boucle entre 0 et 10 ms ? (b) Quelle est la f.é.m. induite ? (c) Quel est le sens du courant induit (horaire/antihoraire) lorsqu'on regarde vers le bas à partir d'un point situé au-dessus de la bobine ?

E10. MonLab (I) Un cadre rectangulaire de 25 cm × 40 cm se déplace à la vitesse constante $\vec{\mathbf{v}} = 20\vec{\mathbf{i}}$ m/s et son plan est normal à un champ magnétique uniforme de module 0,18 T (figure 10.67). La résistance du cadre est égale à 1,2 Ω. En supposant que seul le côté droit du cadre ait pénétré le champ magnétique, trouvez (a) la f.é.m. induite; (b) la force exercée sur le cadre par le champ; (c) la puissance électrique dissipée; (d) la puissance mécanique requise pour déplacer le cadre à vitesse constante.



▲ Figure 10.67
Exercice 10.

E11. (I) Une tige métallique glisse à la vitesse constante $\vec{\mathbf{v}} = -30\vec{\mathbf{i}}$ m/s sur des rails sans frottement distants de 24 cm (figure 10.68). Le champ magnétique est uniforme, de module 0,45 T, et il sort de la page. On suppose que la résistance de la tige est égale à 2,7 Ω et que les rails ont une résistance négligeable. Déterminez: (a) le courant circulant dans les rails; (b) le module de la force magnétique agissant sur la tige; (c) la puissance mécanique nécessaire pour maintenir la tige en mouvement à vitesse constante; (d) la puissance électrique dissipée.



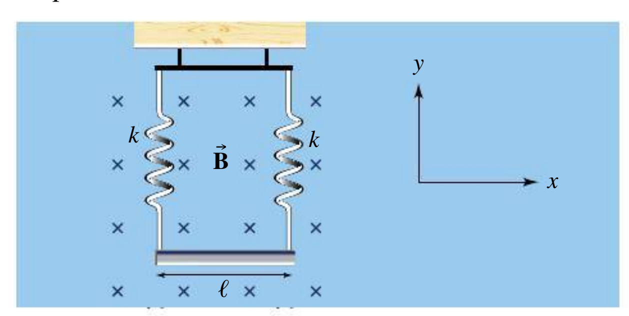
▲ **Figure 10.68**

Exercice 11.

E12. (I) Une bobine circulaire plane comporte 80 spires de diamètre 20 cm et de résistance totale 40 Ω. Le plan de la bobine est perpendiculaire à un champ magnétique uniforme. Quel doit être le taux de variation du module du champ (dB/dt) pour que la puissance thermique dissipée par la bobine soit égale à 2 W ? (La bobine constitue un circuit fermé.)

E13. (I) Une bobine de rayon 5 cm comporte 20 spires de fil de cuivre de 1 mm de diamètre. Le plan de la bobine est perpendiculaire à un champ dont le module varie au taux de 0,2 T/s. Quelle est la puissance perdue dans la bobine ? La résistivité du cuivre est égale à $1{,}7 \times 10^{-8}$ Ω·m. (La bobine constitue un circuit fermé.)

E14. (II) Un conducteur fixe (en noir dans la figure 10.69) forme un circuit avec deux ressorts verticaux (k = 2 N/m) et une tige conductrice de longueur ℓ = 30 cm et de masse m = 20 g. Un champ magnétique uniforme de module 0,4 T est perpendiculaire au plan du circuit.

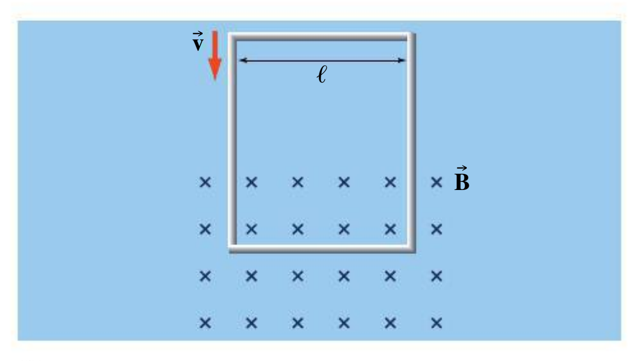


▲ **Figure 10.69**

Exercice 14.

À t = 0, on lâche la tige, l'allongement des ressorts étant initialement A = 10 cm par rapport à la position d'équilibre. (a) Écrivez l'expression de la f.é.m. induite, $\mathscr{E}(t)$. (b) Quelle est la valeur maximale de la f.é.m. et à quel instant est-elle atteinte pour la première fois ? (c) Superposez le graphe de la position verticale de la tige et le graphe de la f.é.m. induite pour un intervalle de temps correspondant à un cycle complet. (d) Où se trouve la tige lorsque la f.é.m. est maximale ?

E15. MonLab (II) Un cadre rectangulaire de masse m, de largeur ℓ et de résistance R tombe verticalement dans un champ horizontal uniforme $\vec{B}$ (figure 10.70). (a) Montrez que, tant que sa partie supérieure n'a pas pénétré dans le champ magnétique, le cadre atteint une vitesse limite de module $v_L = mgR/(B\ell)^2$. (b) Montrez que, pour cette valeur v_L de la vitesse, le taux selon lequel l'énergie gravitationnelle est perdue est égal au taux de dissipation de l'énergie thermique.



▲ **Figure 10.70**

Exercice 15.

E16. (I) Une bobine comporte N spires d'aire A et de résistance totale R. Elle est reliée à un galvanomètre et son plan est normal à un champ magnétique uniforme $\vec{B}$. On fait pivoter la bobine de 180° pendant un court intervalle de temps. Montrez que la charge qui circule dans le galvanomètre est $Q = 2NAB/R$.

E17. MonLab (II) Un champ magnétique qui varie en fonction du temps selon $\vec{B}(t) = (0{,}2t - 0{,}5t^2)\vec{k}$, où t est en secondes et B en teslas, est perpendiculaire au plan d'une bobine circulaire comportant 25 spires de rayon 1,8 cm et dont la résistance totale est égale à 1,5 Ω. (a) Trouvez la puissance dissipée à 3 s. (b) Trouvez à quels moments le module du champ magnétique et la puissance dissipée deviennent nuls. Y a-t-il un lien entre ces deux résultats ?

E18. (I) On tresse un fil sur une boucle circulaire élastique dont le plan est perpendiculaire à un champ magnétique uniforme de module 0,32 T. À un moment donné, le rayon de la boucle circulaire est de 6 cm et il augmente à raison de 20 cm/s. Quelle est la valeur de la f.é.m. induite ?

10.4 Générateurs

E19. (I) Une bobine carrée de côté 8 cm comporte 180 spires et tourne dans un champ magnétique uniforme de module 0,08 T. Si la valeur maximale de la f.é.m. est égale à 12 V, quelle est la vitesse angulaire de la bobine ?

E20. (I) Pleine d'imagination, la propriétaire d'un magasin décide d'utiliser en guise de générateur la grande porte tournante de l'entrée (2 m × 3 m). Elle enroule 100 spires autour du périmètre de la porte. Un flux constant de clients la maintient en rotation à 0,25 tr/s. Si la composante horizontale du champ

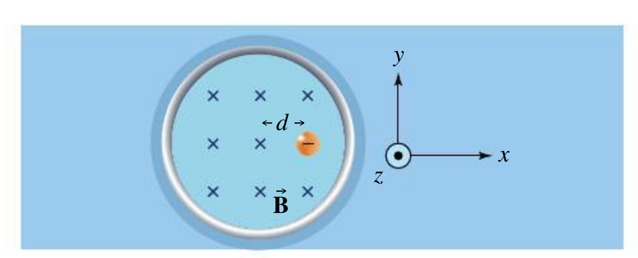
terrestre est égale à 0,6 G, quelle est la valeur maximale de la f.é.m. induite ?

E21. (I) Une bobine dont la section transversale a une aire de 40 cm^2 est constituée de 100 spires et a une résistance de 4,5 Ω. Elle tourne à raison de 120 tr/min avec son axe perpendiculaire à un champ de module 0,04 T. Déterminez : (a) la f.é.m. maximale produite ; (b) le module du moment de force magnétique maximal auquel est soumise la bobine.

E22. MonLab (II) Une bobine carrée de 5 cm de côté comporte 25 spires et a une résistance de 2,5 Ω. Elle tourne à 120 tr/min autour d'un axe vertical dans un champ magnétique horizontal de module 0,04 T. À t = 0, le plan de la bobine est perpendiculaire au champ. À t = 0,1 s, trouvez : (a) la f.é.m. induite ; (b) le module du moment de force nécessaire pour maintenir la bobine en rotation à vitesse angulaire constante ; (c) la puissance mécanique nécessaire pour maintenir la bobine en rotation ; (d) la puissance électrique dissipée.

10.6 Champs électriques induits

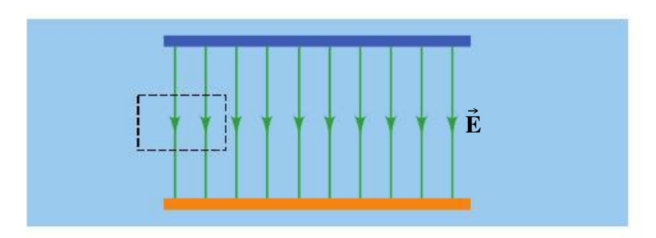
E23. MonLab (II) Un électron est situé à une distance d de l'axe d'un long solénoïde (figure 10.71). Le module du champ magnétique uniforme dans le solénoïde varie selon $B = Ct$, où t est en secondes et B en teslas. Trouvez l'expression de la force électrique sur l'électron.



▲ **Figure 10.71**

Exercice 23.

E24. (II) Utilisez l'équation 10.11 pour montrer que les lignes du champ électrique entre les plaques d'un condensateur ne peuvent pas se terminer brusquement aux bords des plaques comme sur la figure 10.72.



▲ **Figure 10.72**

Exercice 24.

E25. (II) Le courant circulant dans un long solénoïde varie selon $I(t) = 4 + 6t^2$, où t est en secondes et I en ampères. Le solénoïde comporte 800 spires/m et a un rayon de 2 cm. À t = 2 s, déterminez le module du champ électrique induit aux distances suivantes de l'axe central : (a) 0,5 cm ; (b) 4 cm.

E26. (II) Un long solénoïde comporte 20 spires/cm de rayon 2,4 cm. Le module du champ électrique induit à 2 cm de l'axe est égal à 5×10^{-3} V/m. Quel est le taux de variation du courant dans le solénoïde ?

10.7 F.é.m. induite dans un conducteur en mouvement

E27. MonLab (I) Un avion qui a une envergure de 45 m vole à 300 m/s dans une région où la composante verticale du champ terrestre est égale à 0,6 G. (a) Quelle est la différence de potentiel entre les extrémités des ailes ? (b) Quelle valeur indiquerait un voltmètre se déplaçant avec l'avion et dont les bornes seraient reliées aux extrémités des ailes ? (c) Pour répondre à ces questions, pourquoi est-ce inutile de connaître les composantes non verticales du champ magnétique ?

E28. (II) L'hélice d'un avion a une longueur totale de 1,5 m. Elle tourne à 1800 tr/min sur un avion dont l'axe avant-arrière est perpendiculaire à la composante horizontale du champ terrestre, dont le module est égal à 0,6 G. Quelle est la f.é.m. induite entre le centre de l'hélice et l'extrémité d'une des pales ?

E29. (II) Une dynamo à disque de Faraday, qui est un exemple de générateur homopolaire, a un rayon de 20 cm et produit 1,2 V dans un champ magnétique qui est perpendiculaire au plan du disque et de module 0,08 T. Quelle est la vitesse de rotation en tours par minute ?

EXERCICES SUPPLÉMENTAIRES

10.3 Loi de Faraday, loi de Lenz

E30. (II) Un long solénoïde dont la section a une aire A est parcouru par un courant qui génère un champ magnétique dont le module en fonction du temps est donné par l'expression $B = B_0 e^{-t/\tau}$, où τ est une constante. Quelle est la grandeur de la f.é.m. induite sur une bobine de N tours enroulée autour de la partie centrale du solénoïde ? On néglige les effets associés aux extrémités du solénoïde et l'épaisseur des fils.

E31. (II) Une bobine circulaire plane de rayon 3,6 cm comporte 40 spires. À t = 0, un champ magnétique

perpendiculaire au plan de la bobine a un module de 0,32 T, mais cette valeur diminue de façon linéaire. À cet instant initial, la f.é.m. induite dans la bobine est de 65 mV. Dans combien de temps le champ magnétique sera-t-il nul ?

E32. (I) Un très long solénoïde comporte 400 spires/m et est parcouru par un courant $I = 3t^2$, où t est en secondes et I en ampères. Une bobine carrée de 1,3 cm de côté est placée à l'intérieur du solénoïde de façon que son axe coïncide avec celui du solénoïde. À $t = 0{,}75$ s, la f.é.m. induite est de 22 µV. Combien de spires comporte la bobine carrée ?

10.4 Générateurs

E33. (II) La bobine d'un générateur comporte 60 spires, possède une résistance de 0,3 Ω et une aire de 140 cm^2. Elle tourne par rapport à un axe perpendiculaire à un champ magnétique uniforme de module $B = 0{,}05$ T. Par le mécanisme décrit à la figure 10.27*c* (p. 426), elle est branchée à une résistance externe $R = 2{,}7$ Ω. (a) Quelle vitesse angulaire de rotation est nécessaire pour que la valeur maximale de la puissance thermique dissipée dans R atteigne 12 W ? (b) Quelle est la valeur maximale du module du moment de force nécessaire pour maintenir la rotation du cadre ?

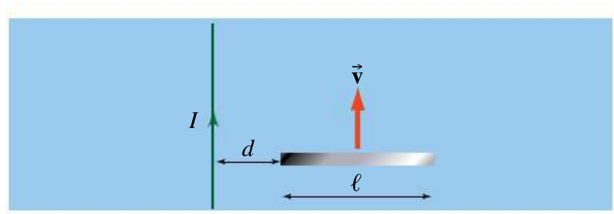
10.7 F.é.m. induite dans un conducteur en mouvement

E34. (II) Les lignes du champ magnétique terrestre, qui a un module de 0,50 G, sont dirigées perpendiculairement au plan d'une lame de scie circulaire fonctionnant à 5400 tr/min. Le rayon de la lame est de 10 cm. Quelle est la différence de potentiel entre le centre et le pourtour extérieur de la lame ?

PROBLÈMES

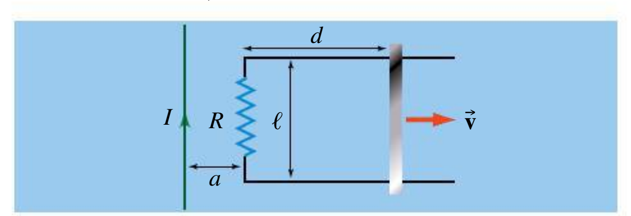
(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

P1. (II) Un long fil rectiligne est parcouru par un courant constant *I*. Une tige métallique de longueur ℓ se déplace à la vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ par rapport au fil (figure 10.73). Quelle est la différence de potentiel entre les extrémités de la tige ? (Remarque : Le champ magnétique n'est pas uniforme.)



▲ Figure 10.73
Problème 1.

P2. MonLab (I) Un long fil rectiligne est parcouru par un courant constant $I = 15$ A. Une tige métallique de longueur $\ell = 40$ cm se déplace à vitesse constante sur des rails de résistance négligeable qui forment un circuit fermé avec une résistance $R = 0{,}05$ Ω (figure 10.74). Déterminez le courant induit dans la résistance, sachant que $a = 1$ cm, $d = 5$ cm et $v = 25$ cm/s. (*Indice* : Considérez d'abord le flux à travers une bande infinitésimale de largeur dx à une distance x du fil.)

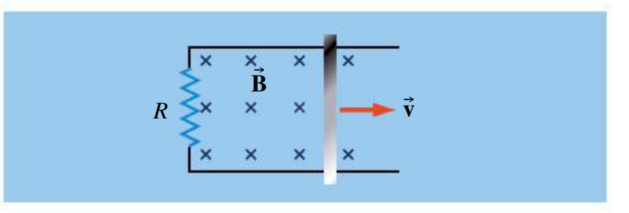


▲ Figure 10.74
Problème 2.

P3. (II) Une tige métallique de masse m et de longueur ℓ glisse sans frottement sur des rails de résistance négligeable qui forment un circuit fermé avec une résistance R (figure 10.75). Le champ magnétique est uniforme et perpendiculaire au plan des rails. Le module de la vitesse initiale de la tige est v_0. Aucun agent extérieur n'exerce de force sur la tige. (a) Démontrez que

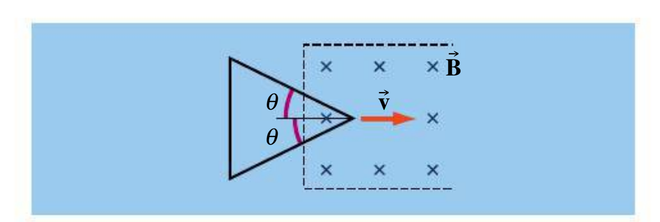
$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}$$

où $\tau = mR/(B\ell)^2$. (b) Montrez que la distance parcourue par la tige avant de s'arrêter est $v_0\tau$. (c) Montrez que l'énergie dissipée au total dans R est égale à $\frac{1}{2}mv_0^2$. (d) Donnez une valeur raisonnable à v_0 et à τ, et tracez le graphe de $x(t)$, la distance parcourue par la tige, pour t allant de 0 à 10τ. De quelle façon ce graphe montre-t-il que la distance parcourue atteint une valeur maximale ?



▲ Figure 10.75
Problème 3.

P4. (I) Un circuit triangulaire se déplace à la vitesse constante $\vec{\mathbf{v}}$. Son plan est perpendiculaire à un champ magnétique uniforme de module B (figure 10.76). Trouvez l'expression, en fonction du temps et de l'angle défini sur la figure, de la grandeur de la f.é.m. induite avant que le circuit ne soit complètement dans le champ. Considérez que le triangle commence à pénétrer dans le champ à $t = 0$.



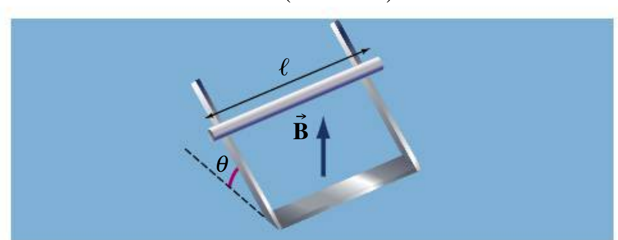
▲ **Figure 10.76**

Problème 4.

P5. (II) Une bande conductrice élastique entoure un ballon sphérique. Le plan de l'anneau ainsi créé passe par le centre du ballon. Le champ magnétique uniforme, de module 0,4 T, est perpendiculaire au plan de la bande. On fait sortir l'air du ballon à raison de 100 cm^3/s à un instant où le rayon du ballon est 6 cm. Quelle est la grandeur de la f.é.m. induite dans la bande ?

P6. (II) Une tige métallique de masse m, de longueur ℓ et de résistance R glisse sans frottement le long d'une paire de rails de résistance négligeable et inclinés selon un angle θ par rapport à l'horizontale (figure 10.77). Le champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}$ est uniforme, vertical et orienté vers le haut. (a) Trouvez l'expression du courant induit dans la tige. On néglige la résistance des rails. (b) Montrez que la tige atteint une vitesse limite dont le module est donné par

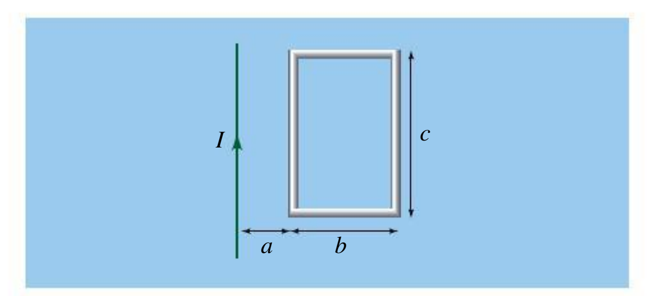
$$v_L = \frac{mgR \sin\theta}{(B\ell \cos\theta)^2}$$



▲ **Figure 10.77**

Problème 6.

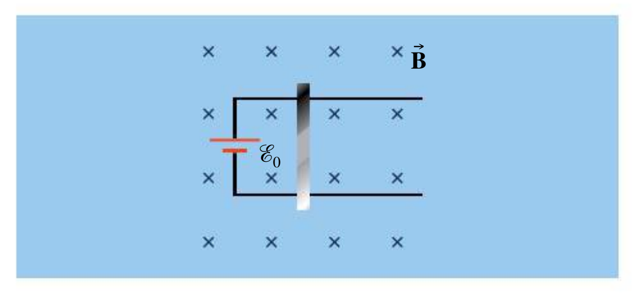
P7. MonLab (II) Un cadre et un long fil rectiligne sont situés dans un même plan (figure 10.78). Le courant circulant dans le fil varie selon $I = I_0 \sin(\omega t)$. Trouvez la f.é.m. induite dans le cadre. (*Indice* : Considérez d'abord le flux à travers une bande infinitésimale de largeur dx à une distance x du fil.)



▲ **Figure 10.78**

Problème 7.

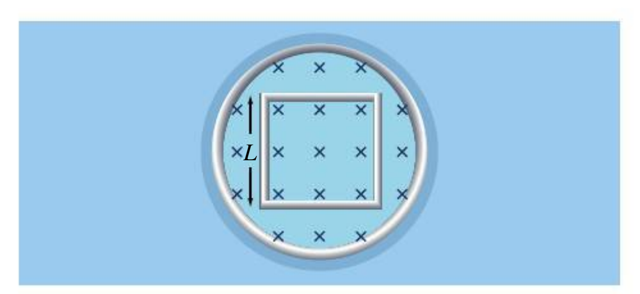
P8. (I) Une tige de masse m et de résistance R glisse sur des rails sans frottement et sans résistance séparés par une distance ℓ et reliés par une source de f.é.m. $\mathscr{E}_0$ (figure 10.79). La tige est initialement au repos. (a) Montrez que la tige atteint une vitesse limite. (b) Quel est le module v_L de cette vitesse limite ?



▲ **Figure 10.79**

Problème 8.

P9. (II) La figure 10.80 représente un cadre carré de côté L perpendiculaire au champ uniforme $B(t)$ d'un long solénoïde. (a) Montrez qu'en tout point d'un côté, la composante du champ électrique induit parallèle à ce côté vaut $\frac{1}{4}L\,\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$. (b) Calculez $\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ sur le cadre.



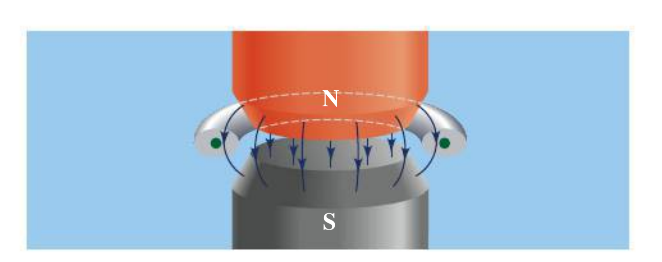
▲ **Figure 10.80**

Problème 9.

P10. (II) Une bobine carrée de 4 cm de côté comporte 40 spires et a une résistance totale de 2,5 Ω. Son plan est perpendiculaire à un champ magnétique uniforme dont le module varie en fonction du temps selon $B = B_0 e^{-t/\tau}$ avec B_0 = 0,2 T et τ = 50 ms. (a) Quel est le courant induit dans la bobine ? (b) Montrez que la charge totale qui circule dans la bobine est égale à NAB_0/R. (c) Tracez le graphe de $Q(t)$, la charge circulant dans le circuit, pour t allant de 0 à 10τ. De quelle façon ce graphe montre-t-il que la charge atteint une valeur maximale ?

P11. (II) Un *bêtatron* est une machine qui utilise un champ électrique induit pour accélérer des électrons décrivant une trajectoire circulaire dans une cavité torique (figure 10.81). Le champ magnétique n'est pas uniforme et il varie en fonction du temps. (a) Écrivez la deuxième loi de Newton, $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = m\vec{\mathbf{a}}$, pour le mouvement circulaire d'un électron, sachant que B_{orb} est le module du champ magnétique sur l'orbite de rayon r. Montrez que $mv = erB_{orb}$. (b) Si B_{moy} est la valeur

moyenne du module du champ sur la région située à l'intérieur de l'orbite, montrez que le module du champ électrique induit est donné par $E = (r/2)\left|dB_{moy}/dt\right|$. (c) Appliquez la deuxième loi de Newton sous la forme $\Sigma\vec{\mathbf{F}} = d(m\vec{\mathbf{v}})/dt$ à la force électrique sur l'électron pour démontrer que $B_{orb} = B_{moy}/2$. Si cette condition est vérifiée, l'électron reste sur une orbite fixe, même si sa vitesse augmente.



▲ **Figure 10.81**
Problème 11.

PROBLÈME SUPPLÉMENTAIRE

P12. (II) Reprenez la situation du problème P8, avec $m = 0{,}5$ kg, $R = 3\Omega$, $\ell = 30$ cm, $B = 2$ T et $\mathscr{E}_0 = 1{,}2$ V, mais en tenant compte cette fois-ci de la friction. Cette force de frottement de module 0,1 N agit dans le sens contraire du mouvement de la tige. On lâche la tige à partir du repos. (a) Quel est le module de l'accélération de la tige à l'instant initial ? (b) Quel est le module de sa vitesse limite ? (c) Si on pousse sur la tige dans le sens de son mouvement avec une force de 0,5 N, que devient le module de la vitesse limite ? (On suppose que la force de frottement reste constante.)

CHAPITRE 11

L'INDUCTANCE



SOMMAIRE

L’étincelle que produit cette bougie d’allumage permet de faire exploser l’essence dans un des pistons d’un moteur d’automobile. Même si les deux électrodes sont séparées par moins d’un millimètre, la différence de potentiel entre elles doit excéder 3000 V pour que la décharge puisse se produire. Une telle tension est fournie grâce à une bobine qui est le siège d’une auto-induction, un phénomène que nous présenterons dans ce chapitre.

Au chapitre précédent, nous avons vu que l’induction électromagnétique se produit dans deux circonstances : mouvement du conducteur dans l’espace ou variation du champ magnétique dans le temps. Dans ce chapitre et le suivant, nous étudierons les applications de l’induction électromagnétique aux circuits électriques, notamment l’utilisation de bobines comme composantes de circuit. Quand on insère de telles composantes dans un circuit, le conducteur qui les constitue est indéformable et immobile, alors l’induction est uniquement attribuée à la variation du champ magnétique dans le temps (qui produit un champ électrique induit).

Nous distinguerons deux cas où des bobines sont ainsi utilisées dans des circuits. L’un d’eux a été étudié dans le chapitre précédent : quand deux bobines sont situées à proximité l’une de l’autre et que la première produit un champ magnétique variable, une f.é.m. est induite dans la seconde bobine. Ce phénomène, appelé *induction mutuelle*, joue un grand rôle dans le fonctionnement des transformateurs.

L'autre cas n'a pas été étudié au chapitre précédent : quand une bobine produit un champ magnétique variable, elle induit une f.é.m. à ses propres bornes. La différence de potentiel à ses bornes diffère donc nettement de celle mesurée quand le courant est constant. Ce phénomène, appelé *auto-induction*, sera le sujet principal de ce chapitre. Quand deux bobines sont utilisées pour causer une induction mutuelle, les deux phénomènes se produisent simultanément : la bobine primaire auto-induit une f.é.m. à ses bornes *en plus* d'induire une f.é.m. dans la bobine secondaire.

Une composante de circuit, comme une bobine, spécialement utilisée dans le but de produire de l'auto-induction s'appelle une **bobine d'induction** ou un **inducteur**. Dans un circuit, un inducteur idéal (sans résistance interne) est représenté par le symbole ⌐ℓℓℓℓℓℓ⌐. Exactement comme les condensateurs sont caractérisés par leur capacité et les conducteurs par leur résistance, les inducteurs sont caractérisés par leur *auto-inductance*. De même, une paire de bobines donnée, produisant de l'induction mutuelle, est aussi caractérisée par son *inductance mutuelle*.

Après avoir défini l'auto-inductance et l'inductance mutuelle (section 11.2), nous allons nous concentrer sur le comportement des circuits contenant des inducteurs. Nous verrons que les circuits comportant un inducteur et une résistance sont caractérisés par une variation exponentielle du courant comme les circuits *RC* (section 11.3), alors que les circuits comportant un inducteur et un condensateur sont capables de produire un courant qui oscille dans le temps (sections 11.6 et 11.7). De telles oscillations sont fondamentales dans le fonctionnement des antennes qui permettent l'émission et la réception des ondes électromagnétiques comme les signaux de radio et de télévision. L'étude de tels circuits se poursuivra au prochain chapitre, où nous aborderons aussi les transformateurs, qui utilisent l'induction mutuelle.

11.1 L'AUTO-INDUCTION

Au chapitre précédent, nous avons déduit la loi de Faraday à partir d'expériences où l'induction se produisait dans des bobines plongées dans un champ magnétique extérieur (dont elles n'étaient pas la source). Toutefois, quand une bobine est parcourue par un courant qui varie dans le temps, même en l'absence de toute autre bobine, elle est nécessairement traversée par un flux magnétique variable : celui de son propre champ magnétique. Si on pouvait appliquer la loi de Faraday à une telle situation, elle prédirait qu'une f.é.m. induite devrait être mesurée aux bornes de la bobine. Comme nous le verrons, l'expérience montre que cette situation d'**auto-induction** se produit bel et bien, donc que la loi de Faraday *est* aussi applicable dans un tel cas.



▲ **Figure 11.1**

Joseph Henry (1797-1878). Contrairement à sa découverte de l'induction, qu'il avait négligé de publier, Henry a fait connaître ses observations sur l'auto-induction.

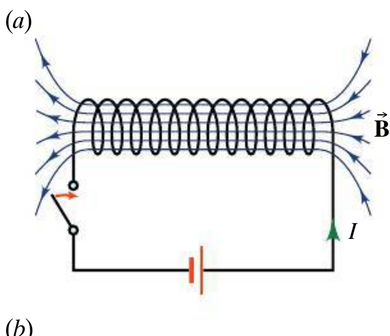
En 1831, Faraday avait pressenti que l'auto-induction devait se produire, mais il ne parvint pas à mettre cet effet en évidence. Par contre, Joseph Henry (figure 11.1) s'aperçut en 1832 que de vives étincelles apparaissaient sur les contacts de l'interrupteur lorsqu'on coupait le courant dans un électroaimant. C'est cette observation qui confirma que l'auto-induction se produisait : les contacts de l'alimentation ayant été coupés, la seule chose qui peut produire une étincelle est une f.é.m. auto-induite dans l'électroaimant. Le compte-rendu rédigé par Henry n'attira pas l'attention de Faraday, mais on lui fit part d'une observation similaire faite par William Jenkin en 1834 et il en entreprit par la suite l'étude systématique.

La figure 11.2*a* illustre une situation comparable à celle étudiée par Henry, c'est-à-dire une bobine branchée en série avec un interrupteur et une pile.

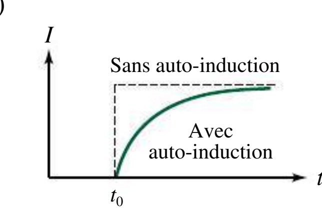
Voyons premièrement ce qui se produit quand le circuit est initialement ouvert et qu'on ferme l'interrupteur. Le courant de même que le champ magnétique qu'il produit augmentent tous deux à partir de leur valeur initiale nulle, en restant proportionnels entre eux. D'après la loi de Faraday, ce champ magnétique variable entraîne une f.é.m. induite, que nous appellerons *f.é.m. d'auto-induction*. La loi de Lenz, elle, prédit que la polarité de cette f.é.m. sera telle qu'elle nuira à l'augmentation de flux. Comme le flux produit par toute bobine est directement proportionnel au courant qui la traverse*, il est pratique de dire que la f.é.m. d'auto-induction *s'oppose à l'augmentation du courant*. L'effet de cette auto-induction est directement mesurable : le courant n'atteint pas sa valeur finale instantanément, mais augmente de façon progressive, puisque la f.é.m. d'auto-induction nuit à sa croissance (figure 11.2*b*). À mesure que le courant s'approche d'une valeur stable, la f.é.m. d'auto-induction s'approche de zéro.

Ensuite, si on ouvre l'interrupteur, le flux décroît rapidement, ce qui entraîne à nouveau une f.é.m. auto-induite. Sur le plan de la polarité, c'est toutefois la situation inverse qui se produit : la f.é.m. d'auto-induction nuit à la diminution du flux, donc *s'oppose à la diminution du courant*. En d'autres termes, la f.é.m. d'auto-induction tente de maintenir le flux, ce qui nécessite qu'elle ait la même polarité que la pile. Si cette f.é.m. est suffisamment grande, elle peut causer une étincelle entre les contacts de l'interrupteur. Ce phénomène, découvert par Henry, est aujourd'hui à la base du fonctionnement des circuits d'allumage dans les moteurs à explosion des voitures (voir la photographie de la page titre du chapitre).

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 11.2**

(*a*) Une bobine en série avec une pile. Lorsqu'on ferme l'interrupteur, la f.é.m. induite dans la bobine s'oppose à la variation de flux qui la traverse. (*b*) Le courant dans la bobine croît progressivement.

L'auto-induction ne contredit pas la troisième loi de Newton

Il peut paraître contradictoire que le champ magnétique produit par une bobine puisse entraîner une f.é.m. induite à ses propres bornes. En effet, quand une charge source produit un champ, celui-ci exerce une force sur toutes les *autres* charges, conformément à la troisième loi de Newton. On pourrait donc penser, à tort, qu'une bobine, elle aussi, ne peut agir que sur les *autres* bobines.

Ce raisonnement serait valable si une charge dans la bobine produisait un champ magnétique et qu'on se demandait si ce champ exerçait une force sur la charge source. Mais ce n'est pas ce que nous avons vu au chapitre précédent : les charges sources (courant) produisent le champ magnétique variable, celui-ci produit le champ électrique induit et c'est le champ électrique induit qui exerce une force sur les charges sources initiales, fournissant le travail par unité de charge qui correspond à la f.é.m. induite. Le phénomène d'auto-induction ne contredit donc pas le comportement des champs tel que décrit dans les chapitres précédents.

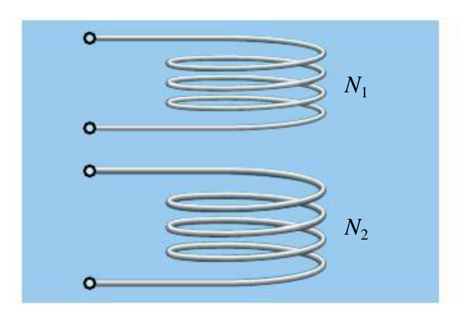
La loi de Faraday, qui ne mentionne pas explicitement le champ électrique induit quand on l'exprime sous la forme $\mathscr{E} = -N\,\mathrm{d}\Phi_B/\mathrm{d}t$, entraîne souvent cette conception erronée. Il ne faut pas perdre de vue le caractère empirique de cette équation : elle permet de prédire qu'une f.é.m. apparaît, mais n'exprime en rien sa cause.

11.2 L'INDUCTANCE

Considérons les deux bobines illustrées à la figure 11.3. Comme nous l'avons vu à la section précédente, nous considérons maintenant que chaque bobine peut induire une f.é.m. à ses propres bornes en plus d'induire une f.é.m. aux

* En fait, tout conducteur, même un simple fil rectiligne, produit un champ magnétique proportionnel au courant qui le traverse (voir les équations 9.1, 9.6 ou 9.15). Un conducteur quelconque peut donc être le siège d'une auto-induction. Le rôle de la bobine est uniquement d'accentuer cet effet.

bornes de sa voisine. Pour décrire cette nouvelle situation, commençons par la comparer à celle du chapitre précédent et présenter de nouveaux symboles plus appropriés pour la décrire.



▲ **Figure 11.3**
Deux bobines placées côte à côte. Chaque bobine a une auto-inductance et la paire a une inductance mutuelle.

La situation du chapitre précédent est un cas particulier de la figure 11.3 où la bobine 2 est reliée à une source de f.é.m. variable et la bobine 1 n'est reliée qu'à une résistance. Du point de vue de la bobine 1, la bobine 2 est alors la source d'un champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}_{ext}$. Le flux magnétique que ce champ produit dans la bobine 1 sera maintenant appelé Φ_{12}. Quand le courant dans la bobine 2 varie, Φ_{12} varie et un courant induit apparaît dans la bobine 1, laquelle devient la source du champ magnétique $\vec{\mathbf{B}}_{ind}$. Le flux magnétique de $\vec{\mathbf{B}}_{ind}$ dans la bobine 1, c'est-à-dire son flux d'auto-induction, sera appelé Φ_{11}. À la section 10.3, nous avons dit qu'à tout instant donné, la f.é.m. induite dans la bobine 1 est attribuée à la variation du flux *total* $\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$, c'est-à-dire le flux du champ $\vec{\mathbf{B}} = \vec{\mathbf{B}}_{ind} + \vec{\mathbf{B}}_{ext}$, mais nous avons toujours négligé Φ_{11} (nous ne nous intéressions à ce flux que pour appliquer la loi de Lenz). Autrement dit, le raisonnement du chapitre précédent a été de considérer que $\vec{\mathbf{B}} \approx \vec{\mathbf{B}}_{ext}$, c'est-à-dire que $\Phi_1 \approx \Phi_{12}$.

Voyons maintenant une situation plus générale que celle du chapitre précédent, où chacune des bobines de la figure 11.3 peut être branchée à un circuit comportant une pile. Le courant dans la bobine 1 ne se limite alors plus au « courant induit » : conformément à la loi des mailles, le courant dans la bobine 1 est produit par la combinaison de la f.é.m. induite dans la bobine 1 et de la f.é.m. de la pile déjà présente dans le circuit dont la bobine 1 fait partie. Le symbole $\vec{\mathbf{B}}_{ind}$ ne convient donc plus, mais les nouveaux symboles permettent de décrire cette situation générale : Φ_{11} est le flux au travers de la bobine 1 dû à son propre champ magnétique, quelle que soit l'origine du courant qui produit ce champ magnétique en circulant dans la bobine 1 ; de même, Φ_{12} est le flux de tout champ magnétique produit dans la bobine 1 par la bobine 2, quelle que soit l'origine du courant circulant dans la bobine 2. Si la bobine 1 comporte N_1 spires et que le flux au travers de chaque spire de cette bobine a la même valeur $\Phi_1 = \Phi_{11} + \Phi_{12}$, alors la loi de Faraday donne

$$\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_{11} + \mathscr{E}_{12} = -N_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi_{11} + \Phi_{12}) \qquad (11.1a)$$

où la f.é.m. $\mathscr{E}_{11}$ correspond à l'auto-induction et la f.é.m. $\mathscr{E}_{21}$, à l'induction mutuelle. Ces nouveaux symboles permettent aussi de décrire sans ambiguïté la situation réciproque, soit la f.é.m. induite dans la bobine 2, attribuée à la variation du flux $\Phi_2 = \Phi_{22} + \Phi_{21}$:

$$\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_{22} + \mathscr{E}_{21} = -N_2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Phi_{22} + \Phi_{21}) \qquad (11.1b)$$

Puisque la bobine i a évidemment un nombre de spires N_i qui est constant, on peut reformuler les équations 11.1a et 11.1b sous la forme suivante :

$$\mathscr{E}_i = -\frac{\mathrm{d}(N_i \Phi_i)}{\mathrm{d}t} \qquad (11.2)$$

où i est l'indice qui identifie la bobine. La grandeur $N_i\Phi_i$ correspond à la somme de deux termes. Par exemple, dans le cas de la bobine 1 :

$$N_1\Phi_1 = N_1(\Phi_{11} + \Phi_{12}) \qquad (11.3)$$

où nous rappelons que Φ_{11} est le flux traversant la bobine 1 et créé par son propre courant I_1 et que Φ_{12} est le flux traversant la bobine 1 et créé par I_2, le courant circulant dans la deuxième bobine. Le flux Φ_{11} est associé à

l'auto-induction et le flux Φ_{12}, à l'induction mutuelle. Nous allons maintenant voir que la grandeur $N_i\Phi_i$, parfois appelée *couplage par flux magnétique*, peut s'exprimer simplement dans certaines situations.

L'auto-inductance

Dans le contexte d'une bobine insérée dans un circuit électrique usuel, le conducteur est immobile. Ainsi, l'induction est uniquement attribuée à la variation du champ magnétique dans le temps, elle-même causée par la variation du courant dans le temps. Il est donc commode d'exprimer directement la f.é.m. induite en fonction de ce courant.

Pour ce faire, considérons premièrement le cas de la f.é.m. d'auto-induction. En l'absence de matériaux magnétiques, le champ magnétique produit par une bobine et par conséquent le flux magnétique sont directement proportionnels au courant circulant dans la bobine. Le premier terme du membre de droite de l'équation 11.3 peut donc s'écrire

Auto-inductance

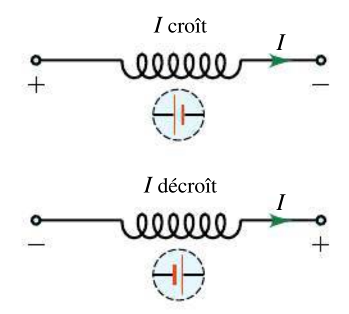
$$N_1\Phi_{11} = L_1 I_1 \qquad (11.4)$$

où L_1 est une constante de proportionnalité appelée **auto-inductance** de la bobine 1 (le symbole L est employé en l'honneur de Lenz). L'unité SI d'auto-inductance est le **henry** (H). D'après l'équation 11.4 et l'équation 11.2, 1 H = 1 Wb/A = 1 V·s/A. L'auto-inductance d'un circuit dépend de ses dimensions et de sa forme géométrique, comme le montreront les exemples qui suivent. En remplaçant l'équation 11.4 dans le premier terme de l'équation 11.1*a*, on obtient que la f.é.m. d'auto-induction dans la bobine 1 (due aux variations du courant I_1) s'écrit sous la forme

F.é.m. d'auto-induction

$$\mathscr{E}_{11} = -L_1\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \qquad (11.5)$$

Cette équation montre que la polarité de la f.é.m. d'auto-induction, illustrée à la figure 11.4, dépend du *taux de variation* du courant, et non de son intensité ni de son sens. Cela contraste avec la situation du courant traversant une résistance : cette dernière situation étant conservative, le courant « tombe » toujours vers le potentiel le plus bas. Dans le cas d'un inducteur, la situation n'est *pas* conservative : une f.é.m. fournit ou retire (selon sa polarité) de l'énergie au système. Sur la figure 11.4, on a illustré à proximité de la bobine d'induction une pile imaginaire qui illustre la polarité de la f.é.m. auto-induite et rappelle que la bobine joue momentanément le même rôle qu'une pile ayant cette polarité. Rappelons que cette polarité est telle que la f.é.m. d'auto-induction s'oppose à la *variation* du courant.



▲ **Figure 11.4**
La f.é.m. d'auto-induction est déterminée par le *taux de variation* du courant et sa polarité est toujours telle que la f.é.m. s'oppose à la variation du courant.

En l'absence d'induction mutuelle, l'équation 11.5 donne la tension aux bornes d'une bobine d'induction idéale dans un circuit en fonction de son auto-inductance L. Cette équation peut être comparée à l'équation $\Delta V = Q/C$ qui donne la tension aux bornes d'un condensateur en fonction de sa capacité C ou à l'équation $\Delta V = RI$ qui donne la tension aux bornes d'un conducteur en fonction de sa résistance R. Résistance, capacité et inductance sont les trois grandes propriétés que peuvent posséder les composantes d'un circuit.

L'inductance mutuelle

Considérons maintenant le cas de la f.é.m. d'induction mutuelle, c'est-à-dire la f.é.m. attribuée au flux que cause la bobine 2 au travers de la bobine 1. Le champ produit par la bobine 2 et par conséquent le flux sont directement proportionnels au courant I_2. Le second terme du membre de droite de l'équation 11.3 peut donc s'écrire

Inductance mutuelle

$$N_1\Phi_{12} = MI_2 \tag{11.6}$$

où la constante de proportionnalité M est appelée **inductance mutuelle** des deux bobines. (À ce stade, nous devrions écrire M_{12}, mais l'on peut montrer que $M_{12} = M_{21} = M$.) L'unité SI d'inductance mutuelle est aussi le henry (H). L'inductance mutuelle de deux circuits dépend de leurs dimensions, de leurs formes géométriques et de leurs positions relatives. Intuitivement, on peut s'attendre à ce que l'inductance mutuelle soit supérieure lorsque les bobines sont proches l'une de l'autre et orientées de telle sorte que le flux magnétique traversant l'une des bobines et produit par l'autre soit maximal. D'après le second terme de l'équation 11.1*a*, la f.é.m. induite dans la bobine 1 par suite des variations de I_2 s'écrit sous la forme

F.é.m. d'induction mutuelle

$$\mathscr{E}_{12} = -M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \tag{11.7}$$

En général, l'auto-induction et l'induction mutuelle se produisent simultanément. Il est évidemment impossible de mesurer chacune des deux contributions séparément à moins de supprimer un des courants. Dans la bobine 1, la f.é.m. totale induite, celle qu'on peut mesurer, est donc

$$\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_{11} + \mathscr{E}_{12} = -L_1\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t}$$

Cette équation est équivalente à l'équation 11.1*a*. En général, on s'intéresse souvent seulement à l'un des deux termes de cette équation. Quand le contexte permet de déterminer clairement de quel terme il s'agit, on peut omettre les indices 1 et 2 comme nous l'avons fait au chapitre précédent.

Pour le moment, nous ne calculerons pas la f.é.m. induite, ce sur quoi nous reviendrons à partir de la prochaine section. Les exemples suivants portent plutôt sur le calcul de l'inductance de diverses bobines à partir de leur géométrie. Nous y verrons notamment que l'auto-inductance d'un long solénoïde de longueur ℓ, de section transversale A et comportant n spires par unité de longueur est donnée par

$$L = \mu_0 n^2 A\ell \tag{11.8}$$

et que celle d'un câble coaxial de longueur ℓ et de rayons a et b (figure 11.5) est donnée par

$$L = \frac{\mu_0\ell}{2\pi}\ln\frac{b}{a} \tag{11.9}$$

Exemple 11.1

Un *long solénoïde* de longueur ℓ et de section transversale A comporte N spires. Déterminer son auto-inductance. On suppose que le champ magnétique est uniforme dans tout le solénoïde.

Solution

D'après l'équation 9.13, on sait que le module du champ magnétique à l'intérieur d'un long solénoïde est $B = \mu_0 nI$, où $n = N/\ell$ est le nombre de spires par unité de longueur. S'il y a d'autres sources de champ magnétique, le flux peut être différent de celui dû au champ produit par la bobine. Toutefois, pour appliquer l'équation 11.4, nous cherchons le flux Φ_{11} (lequel correspond au flux en l'absence de toute autre bobine). Ce flux à travers chaque spire est donné par

$$\Phi_B = BA = \mu_0 nIA$$

D'après l'équation 11.4, l'auto-inductance est

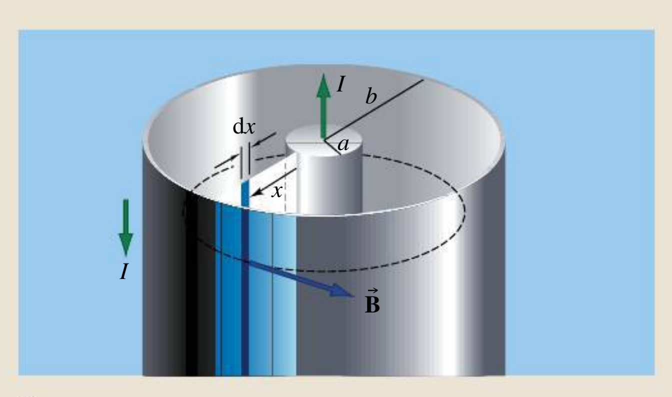
$$L = \frac{N\Phi_B}{I} = \mu_0 n^2 A\ell$$

On constate donc que l'auto-inductance dépend des propriétés géométriques du circuit. (Notons que $A\ell$ est le volume du solénoïde.) On peut comparer ce résultat à la capacité d'un condensateur plan ($C = \varepsilon_0 A/d$), qui dépend de la géométrie du condensateur. Les deux expressions ne sont qu'approximativement valables, puisque dans le cas du condensateur on néglige les effets de bords, alors que dans le cas du solénoïde on néglige le fait que le module du champ magnétique diminue et que son orientation change sur toute la section au voisinage de chaque extrémité.

L'auto-inductance d'un solénoïde réel est donc légèrement inférieure à la valeur calculée à partir de l'expression ci-dessus. ■

Exemple 11.2

On utilise souvent un *câble coaxial* pour transmettre les signaux électriques, par exemple vers un téléviseur. Comme le montre la figure 11.5, un tel câble est constitué d'un mince fil conducteur intérieur de rayon a parcouru par un courant I vers le haut et d'un conducteur cylindrique extérieur de rayon intérieur b parcouru par un courant de même intensité dirigé vers le bas. Montrer que l'auto-inductance d'un câble coaxial de longueur ℓ est donnée par l'équation 11.9. On néglige le flux magnétique à l'intérieur du fil central.



▲ **Figure 11.5**

Pour déterminer le flux magnétique existant dans la région située entre le fil intérieur et le cylindre extérieur, on doit tenir compte du fait que le champ n'est pas uniforme.

Solution

Nous utilisons à nouveau l'équation 11.4, $N\Phi_B = LI$, pour déterminer L. Il faut d'abord déterminer le flux. Notre calcul est approximatif parce que nous ne considérons que le champ magnétique existant dans la région située entre les conducteurs. (Il serait exact si l'on remplaçait le conducteur intérieur par un conducteur creux.) D'après l'équation 9.1, on sait que le module du champ produit par le fil intérieur à une distance x (> a) de son centre est

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

Pour déterminer L, il est nécessaire d'évaluer le flux à travers un cadre rectangulaire orienté perpendiculairement aux lignes du champ entre le fil intérieur et le cylindre extérieur. Comme le champ magnétique n'est pas uniforme, on doit d'abord déterminer le flux à travers une bande infinitésimale de largeur dx et d'aire d$A = \ell$ dx. ■

On a donc

$$d\Phi_B = B\,dA = \frac{\mu_0 I\ell}{2\pi}\frac{dx}{x}$$

Le flux à travers le cadre est

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 I\ell}{2\pi}\int_a^b \frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I\ell}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

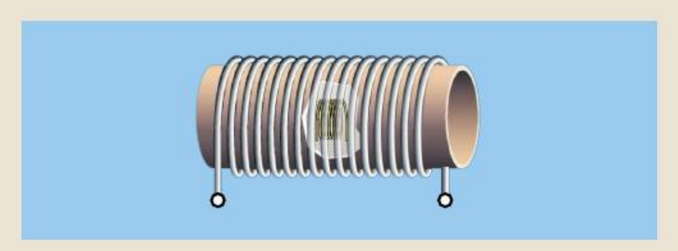
D'après l'équation 11.4, l'auto-inductance du câble coaxial est

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{\mu_0 \ell}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

Cela correspond bel et bien à l'équation 11.9. Il est normal que L dépende du rapport b/a: au fur et à mesure que b augmente ou que a diminue, le flux augmente. On peut comparer cette expression à la capacité du câble (voir l'équation 5.6).

Exemple 11.3

Une petite bobine circulaire de section transversale égale à 4 cm^2 comporte 10 spires. On la place au centre d'un long solénoïde comportant 15 spires/cm et de section transversale 10 cm^2 (figure 11.6). L'axe de la bobine coïncide avec l'axe du solénoïde. Quelle est leur inductance mutuelle ?



▲ **Figure 11.6**

Une petite bobine placée à l'intérieur d'un solénoïde.

Solution

Nous allons désigner la bobine comme étant le circuit 1 et le solénoïde comme étant le circuit 2. Le champ magnétique dans la région centrale du solénoïde étant uniforme, le flux traversant la bobine s'écrit

$$\Phi_{12} = B_2 A_1 = (\mu_0 n_2 I_2) A_1$$

où $n_2 = N_2/\ell = 1500$ spires/m. D'après l'équation 11.6, l'induction mutuelle s'écrit

$$\begin{aligned} M &= \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2} \\ &= \mu_0 n_2 N_1 A_1 \\ &= (4\pi \times 10^{-7}\ \text{T·m/A})(1500\ \text{m}^{-1})(10)(4 \times 10^{-4}\ \text{m}^2) \\ &= 7{,}54 \times 10^{-6}\ \text{H} \end{aligned}$$

Soulignons que, même si $M_{12} = M_{21}$, il aurait été beaucoup plus difficile de déterminer directement Φ_{21} parce que le champ produit par la bobine n'est pas uniforme. Autre remarque: comme nous avions seulement besoin du flux magnétique dans la région centrale du solénoïde, cette expression de M est plus précise que l'équation donnant l'auto-inductance d'un solénoïde. (Rappelons qu'il fallait dans ce cas négliger les effets d'extrémités.) ■

11.3 LES CIRCUITS *RL*

Nous avons souligné à la section 11.1 que l'auto-induction dans un circuit empêche le courant de varier brutalement. Nous allons maintenant examiner comment le courant augmente ou diminue en fonction du temps dans un circuit comportant une bobine d'induction et une résistance en série. Nous supposons que la bobine d'induction est idéale donc que sa résistance est négligeable. En fait, cela équivaut à considérer que la résistance de la bobine réelle fait partie de la résistance externe.

Croissance du courant

La figure 11.7*a* représente une bobine d'induction en série avec une résistance, une pile de f.é.m. $\mathscr{E}$ et un interrupteur. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur et le courant commence à circuler dans la direction indiquée. Le courant augmente, $dI/dt > 0$, et la polarité de la f.é.m. induite dans la bobine d'induction est donc opposée à celle de la pile. Autrement dit, $V_B - V_A > 0$ sur la figure. D'après la loi des mailles de Kirchhoff, on a donc

$$\mathscr{E} - RI - L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad (11.10)$$

Cette équation est valable à chaque instant, ce qui permet une analyse qualitative : à un instant quelconque, la somme des tensions aux bornes de R et aux bornes de L correspond à la f.é.m. de la pile. À mesure que le courant croît, la tension aux bornes de R ($\Delta V_R = RI$) croît aussi. Par conséquent, $\mathscr{E}_L$ décroît. Puisque $\mathscr{E}_L \propto \mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, le taux de variation du courant décroît graduellement à mesure que le courant s'approche de sa valeur maximale. Lorsque $\mathscr{E}_L = 0$, ΔV_R atteint sa valeur maximale, donc le courant le fait aussi. Ainsi, cette valeur maximale du courant est $I_{\text{max}} = \mathscr{E}/R$.

L'équation 11.10 est une équation différentielle. Pour la résoudre, on pose $y = (\mathscr{E}/R) - I$, ce qui signifie que $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$. En remplaçant dans l'équation 11.10, on trouve $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -(R/L)y$ ou

$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = -\frac{R}{L}\,\mathrm{d}t$$

En intégrant des deux côtés, on obtient

$$\ln y = -\frac{R}{L}t + \ln y_0$$

où, pour plus de commodité, on a écrit la constante d'intégration sous la forme $\ln y_0$, y_0 étant la valeur de y à $t = 0$. L'antilogarithme de cette équation donne

$$y = y_0 e^{-Rt/L}$$

À $t = 0$, le courant est $I = 0$ et $y = (\mathscr{E}/R) - I$ a donc une valeur $y_0 = \mathscr{E}/R$. En revenant aux variables initiales, on trouve

Croissance du courant dans une bobine d'induction

$$I(t) = I_{\text{max}}(1 - e^{-t/\tau}) \qquad (11.11)$$

où $I_{\text{max}} = \mathscr{E}/R$ est la valeur finale de I lorsque $t \to \infty$. La quantité

Constante de temps

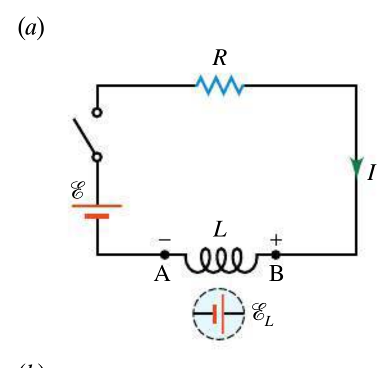
$$\tau = \frac{L}{R} \qquad (11.12)$$

est appelée **constante de temps**. On vérifie aisément que l'unité de la constante de temps est la seconde : 1 H/Ω = 1 s. Pendant une constante de temps, le courant croît jusqu'à $(1 - e^{-1})I_{\text{max}} = 0{,}632I_{\text{max}}$, c'est-à-dire 63 % de sa valeur maximale (figure 11.7*b*). Comparez l'équation 11.11 avec l'équation 7.12*a* donnant la charge d'un condensateur.

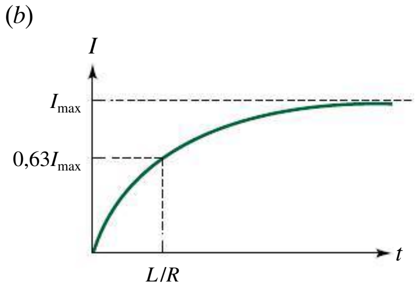
Décroissance du courant

Examinons maintenant ce qui se produit lorsqu'on enlève brusquement la pile sans rompre la continuité du circuit. À la figure 11.8*a*, on suppose que l'interrupteur S_1 est fermé depuis un certain temps, de sorte que le courant a atteint une valeur appréciable, voire sa valeur limite $\mathscr{E}/R$. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur 2 et on ouvre l'interrupteur 1 très peu de temps après. Le courant circulant dans R et L commence à décroître, de sorte que $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t < 0$. La f.é.m.

(*a*)



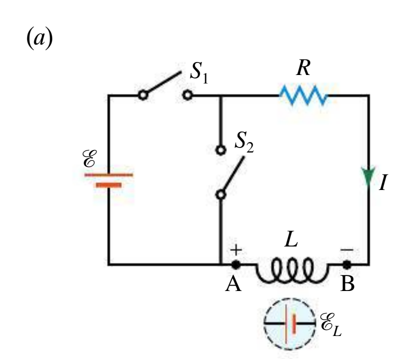
(*b*)



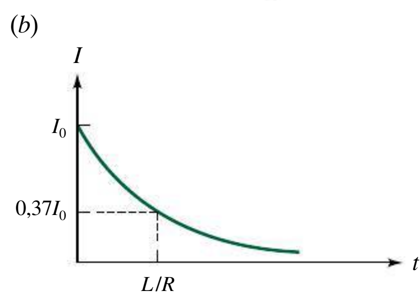
▲ **Figure 11.7**

(*a*) Une résistance et une bobine d'induction en série avec une source idéale de f.é.m. (*b*) Lorsqu'on ferme l'interrupteur, le courant augmente graduellement.

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 11.8**

(*a*) Pour étudier la décroissance du courant dans un circuit RL, on ferme l'interrupteur S_2 juste avant d'ouvrir l'interrupteur S_1. (*b*) Le courant décroît exponentiellement.

induite dans la bobine d'induction essaie de maintenir le courant et sa polarité est donc la même que celle qu'avait la pile qu'on vient de débrancher; autrement dit, $V_A - V_B > 0$ sur la figure. Selon la loi des mailles appliquée dans le sens du courant, on a

$$-RI - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$$

Cette équation est valable à chaque instant, ce qui permet à nouveau une analyse qualitative: à un instant quelconque, la tension aux bornes de R demeure toujours la même que celle aux bornes de L. À mesure que le courant décroît, $\mathscr{E}_L$ décroît donc aussi. Puisque $\mathscr{E}_L \propto \mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, le taux de variation du courant décroît graduellement à mesure que le courant s'approche de zéro. Contrairement au cas de la croissance du courant où la loi des mailles fixait la valeur maximale atteinte par le courant, il n'y a cette fois aucune contrainte à la valeur maximale (initiale) que peut prendre le courant.

En réarrangeant et en intégrant l'équation précédente, on obtient

$$\int \frac{\mathrm{d}I}{I} = -\frac{R}{L}\int \mathrm{d}t$$

ce qui donne

$$\ln I = -\frac{R}{L}t + \ln I_0$$

À $t = 0$, $I = I_0$. Il s'agit tout simplement du courant qui circulait initialement dans le circuit au moment $t = 0$ où l'interrupteur S_1 a été ouvert. (Si S_1 avait été préalablement fermé pendant un temps suffisamment long, alors I aurait atteint sa valeur maximale, soit $\mathscr{E}/R$, donc on aurait $I_0 = \mathscr{E}/R$, mais ce serait un cas particulier.) L'antilogarithme de l'équation précédente donne l'expression du courant en fonction du temps:

Décroissance du courant dans une bobine d'induction

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau} \qquad (11.13)$$

La dépendance du courant en fonction du temps est représentée à la figure 11.8*b*. Dans ce cas, la constante de temps $\tau = L/R$ correspond au temps au bout duquel le courant chute jusqu'à $I_0/e = 0{,}368I_0$ ou 37 % de sa valeur initiale. Comparez l'équation 11.13 avec l'équation 7.8*a* donnant la décharge d'un condensateur.

11.4 L'ÉNERGIE EMMAGASINÉE DANS UNE BOBINE D'INDUCTION

Quand le courant qui circule dans une bobine d'induction a atteint une valeur constante, il n'y a plus de f.é.m. d'auto-induction. La pile n'a donc plus qu'à fournir l'énergie dissipée dans la résistance du circuit. Par contre, les échanges d'énergie sont différents pendant que le courant est établi: pendant cette phase transitoire, la f.é.m d'auto-induction nuit à l'augmentation du courant, donc la pile doit fournir davantage d'énergie que si le courant était constant, car elle fait aussi un travail contre la f.é.m. induite. Cette énergie supplémentaire n'est pas dissipée en chaleur comme c'est le cas dans la résistance, mais est plutôt

emmagasinée dans la bobine d'induction. Pour se convaincre de cette aptitude de l'inducteur à emmagasiner de l'énergie, considérons ce qui se produit quand la pile est subitement retirée sans rompre le circuit : pendant la diminution du courant, la f.é.m. d'auto-induction nuit à la décroissance du courant, donc fournit de l'énergie comme le ferait une pile. La pile ayant été retirée du circuit, la seule source d'énergie est clairement la bobine d'induction, laquelle devait donc contenir de l'énergie au préalable.

Un inducteur est donc en mesure d'emmagasiner et de restituer de l'énergie, un peu comme le fait un condensateur. La seule différence est que, dans le cas du condensateur, l'énergie est électrostatique : elle est due à l'accumulation de charges malgré le champ électrostatique que ces charges produisent (voir la section 5.3). Dans une bobine d'induction, il n'y a pas d'accumulation de charges malgré un champ électrostatique, mais plutôt augmentation du courant malgré le champ électrique induit.

Pour obtenir une expression de l'énergie emmagasinée dans la bobine, considérons à nouveau le circuit de la figure 11.7*a*. Dans l'équation 11.10 exprimant la loi des mailles de Kirchhoff, nous allons remplacer provisoirement le symbole I du courant par i pour les besoins de cette démonstration ; on a donc

$$\mathscr{E} = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{11.14}$$

En multipliant chacun des termes de l'équation 11.14 par i, on obtient

$$\mathscr{E}i = Ri^2 + Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Le produit $\mathscr{E}i$ est la puissance fournie par la pile et Ri^2 est la puissance dissipée dans la résistance. Le dernier terme représente donc le taux auquel l'énergie est fournie à la bobine d'induction. Autrement dit, si on désigne ce taux par $\mathrm{d}U_B/\mathrm{d}t$, on a

$$\frac{\mathrm{d}U_B}{\mathrm{d}t} = Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

On trouve l'énergie totale emmagasinée lorsque le courant est passé de 0 à I en intégrant :

$$U_B = \int_0^I Li\,\mathrm{d}i$$

ce qui donne

Énergie emmagasinée dans une bobine d'induction

$$U_B = \tfrac{1}{2}LI^2 \tag{11.15}$$

Comparez ce résultat avec l'expression donnant l'énergie emmagasinée dans un condensateur, $U_E = \frac{1}{2}Q^2/C$. On note alors que l'énergie dans un condensateur dépend de la charge qu'il accumule, productrice d'un champ électrique, alors que l'énergie dans un inducteur dépend du courant qui le traverse, producteur d'un champ magnétique. L'énergie U est donc stockée dans un champ différent, ce que reflètent les indices E et B.

Exemple 11.4

Une bobine d'induction de 50 mH est en série avec une résistance de 10 Ω et une pile de f.é.m. égale à 25 V, comme dans le circuit de la figure 11.7*a* (p. 463). À $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Trouver : (a) la constante de temps du circuit ; (b) le temps qu'il faut au courant pour atteindre 90 % de sa valeur finale ; (c) le taux auquel l'énergie est emmagasinée dans la bobine d'induction ; (d) la puissance dissipée dans la résistance. (e) Quel est le taux auquel la pile fournit l'énergie ? Quelle relation existe-t-il entre votre réponse et P_R et P_L des questions (c) et (d) ?

Solution

(a) La constante de temps est $\tau = L/R = 5{,}00 \times 10^{-3}$ s.

(b) On cherche le temps que met I pour atteindre $0{,}9I_{\text{max}} = 0{,}9\mathscr{E}/R$. D'après l'équation 11.11,

$$0{,}9I_{\text{max}} = I_{\text{max}}(1 - e^{-t/\tau})$$

On en déduit que $e^{-t/\tau} = 0{,}1$, ce qui peut s'écrire $(-t/\tau) = \ln(0{,}1)$. Donc,

$$t = -\tau \ln(0{,}1) = 11{,}5 \times 10^{-3} \text{ s}$$



Ce résultat correspond à un peu plus de deux constantes de temps, ce qui est cohérent avec le fait que l'écart $I_{\text{max}} - I$ décroît d'un facteur 0,368 à chaque constante de temps. ■

(c) Le taux auquel l'énergie est fournie à la bobine d'induction est

$$\frac{\mathrm{d}U_B}{\mathrm{d}t} = +LI\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

La dérivée de l'équation 11.11 est $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = +(RI_{\text{max}}/L)e^{-Rt/L}$. Par conséquent,

$$P_L = \frac{\mathrm{d}U_B}{\mathrm{d}t} = (RI_{\text{max}})Ie^{-t/\tau}$$

Remplaçons maintenant I par sa valeur donnée par l'équation 11.11 ; on obtient

$$P_L = RI^2_{\text{max}}(e^{-t/\tau} - e^{-2t/\tau})$$

(d) La puissance dissipée dans la résistance est

$$P_R = RI^2 = RI^2_{\text{max}}(1 - 2e^{-t/\tau} + e^{-2t/\tau})$$

(e) La puissance fournie par la pile est

$$P = \mathscr{E}I = RI^2_{\text{max}}(1 - e^{-t/\tau})$$

Cette puissance est égale à la somme $P_L + P_R$ des puissances fournies à la bobine et à la résistance. ■

11.5 LA DENSITÉ D'ÉNERGIE DU CHAMP MAGNÉTIQUE

À la section 5.4, nous avons exprimé l'énergie emmagasinée dans un condensateur en fonction du champ électrique. De la même façon, on peut exprimer l'énergie emmagasinée dans un inducteur en fonction du champ magnétique. Pour ce faire, considérons un long solénoïde pour lequel le calcul est plus simple, le champ étant uniforme. En l'absence de matériau magnétique, cet inducteur a une inductance donnée par l'équation 11.8, soit $L = \mu_0 n^2 A\ell$ et le champ qu'il produit est constant et donné par l'équation 9.13, soit $B = \mu_0 nI$. L'énergie y étant emmagasinée peut donc s'écrire

$$U_B = \tfrac{1}{2}LI^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}A\ell$$

Si on divise l'énergie U_B par le volume $A\ell$ du solénoïde, où règne le champ magnétique, on voit qu'on peut définir une grandeur qui ne dépend *que du champ*, soit l'énergie par unité de volume de champ (J/m^3) ou densité d'énergie :

Densité d'énergie du champ magnétique dans le vide

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0} \qquad (11.16)$$

En utilisant un calcul fondé sur le théorème d'Ampère, on peut montrer que l'équation 11.16 est générale : elle s'applique aussi quand le champ n'est pas uniforme et donne alors la densité *locale* d'énergie en fonction du champ

magnétique *local*. Quand le champ est uniforme, u_B est uniforme et on obtient l'énergie du système simplement en multipliant u_B par le volume occupé par le champ. Quand le champ n'est pas uniforme, il faut subdiviser le volume occupé par le champ en éléments infinitésimaux, multiplier chacun par la densité d'énergie u_B qui lui correspond, puis intégrer, comme le montre l'exemple 11.6.

L'équation 11.16 peut être comparée avec l'équation 5.10 donnant la densité d'énergie d'un champ électrique, $u_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$. Dans les deux cas, la densité d'énergie est proportionnelle au carré du module du champ. Tout comme nous l'avons fait pour l'équation 5.10, on peut s'interroger sur la signification physique de l'équation 11.16. L'énergie U_B peut être calculée en fonction du courant (équation 11.15) ou en fonction du champ magnétique (équation 11.16). Du point de vue mathématique, ces deux approches sont équivalentes, mais du point de vue physique, l'énergie est-elle stockée dans le courant ou dans le champ magnétique ?

La réponse que nous donnons à cette question est la même qu'à la section 5.4 : comme nous le verrons au chapitre 13, les champs électrique et magnétique peuvent s'induire l'un l'autre et former une onde électromagnétique. Des champs peuvent donc être produits à des positions très éloignées de toute charge et de tout courant. L'expérience montrant que de l'énergie est véhiculée par les ondes électromagnétiques, on doit en conclure que c'est le champ magnétique qui est porteur de l'énergie donnée par l'équation 11.15.

Selon cette nouvelle interprétation, quand on instaure un courant dans un inducteur, l'augmentation d'énergie potentielle est liée à l'augmentation du champ magnétique résultant. À l'inverse, si on retire la pile du circuit, la bobine d'induction fournit un travail en puisant dans l'énergie stockée dans le champ, qui diminue.

L'exemple 11.5 ci-dessous permet de comparer la densité d'énergie de champs électriques et magnétiques très intenses. L'exemple 11.6, en plus de présenter un calcul de densité d'énergie par intégration, illustre une nouvelle façon de déterminer l'inductance d'une bobine d'induction. Nous y montrons que l'inductance d'une bobine toroïdale (figure 11.9) est donnée par

$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi} \ln\frac{b}{a} \qquad (11.17)$$

Exemple 11.5

Le champ électrique disruptif de l'air a pour module 3×10^6 V/m. Un champ magnétique produit par un aimant supraconducteur peut atteindre un module de 30 T. Comparer les densités d'énergie de ces champs.

Solution

La densité d'énergie de ce champ électrique, le plus élevé pouvant être produit dans l'air, est

$$\begin{aligned} u_E &= \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \\ &= 1/2(8{,}85 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2/N\cdot m^2})(3 \times 10^6\ \mathrm{V/m})^2 \\ &= 39{,}8\ \mathrm{J/m^3} \end{aligned}$$

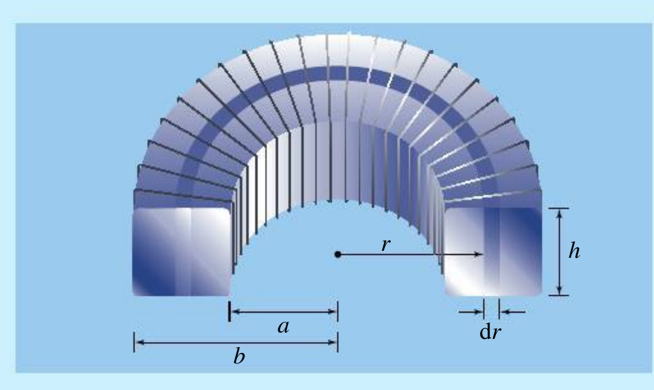
La densité d'énergie du champ magnétique donné est

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{B^2}{2\mu_0} \\ &= \frac{(30\ \mathrm{T})^2}{2 \times 4\pi \times 10^{-7}\ \mathrm{N/A^2}} \\ &= 3{,}58 \times 10^8\ \mathrm{J/m^3} \end{aligned}$$

Les champs électriques sont limités par la possibilité de claquage, alors que ce n'est pas le cas des champs magnétiques. Il est donc évident que les champs magnétiques constituent un moyen efficace d'emmagasiner l'énergie sans risque de claquage dans l'air. ■

Exemple 11.6

Utiliser l'expression donnant la densité d'énergie du champ magnétique ainsi que l'équation 11.15 pour calculer l'auto-inductance d'une bobine toroïdale de section transversale rectangulaire (figure 11.9) et vérifier qu'elle correspond à l'équation 11.17.



▲ **Figure 11.9**

Puisque le champ à l'intérieur d'un tore n'est pas uniforme, on doit d'abord établir l'expression donnant l'énergie dans une mince coquille cylindrique de rayon r et d'épaisseur dr.

Solution

Le module du champ magnétique à l'intérieur d'une bobine toroïdale est donné par l'équation 9.17 :

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

La figure 11.9 représente une mince coquille cylindrique à l'intérieur d'une bobine toroïdale de hauteur h, de rayon r et d'épaisseur dr. Le volume de la coquille cylindrique est

$$\mathrm{d}V = h(2\pi r\, \mathrm{d}r) \blacksquare$$

D'après l'équation 11.16, $u_B = B^2/2\mu_0$, et l'énergie dans ce volume élémentaire est donc

$$\mathrm{d}U = u_B \mathrm{d}V = \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi}\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

L'énergie totale à l'intérieur du tore est

$$U = \int \mathrm{d}U = \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi}\int_a^b \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu_0 N^2 I^2 h}{4\pi}\ln\frac{b}{a}$$

En comparant cette expression avec $U_B = \frac{1}{2}LI^2$, on constate que l'auto-inductance de la bobine toroïdale est

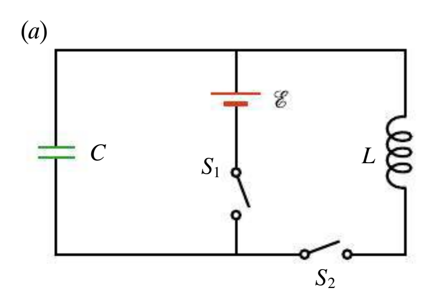
$$L = \frac{\mu_0 N^2 h}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

Au problème P6, on demande d'établir cette expression en calculant le flux traversant la bobine toroïdale.

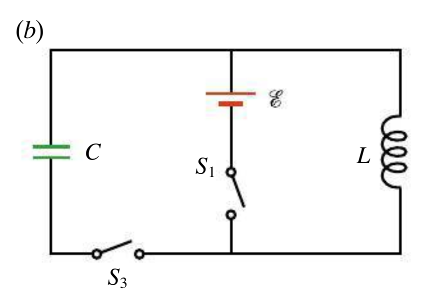
11.6 LES OSCILLATIONS DANS UN CIRCUIT *LC*

La propriété qu'ont les bobines d'induction et les condensateurs d'emmagasiner l'énergie donne lieu au phénomène important des *oscillations électriques*, sur lequel repose le fonctionnement des antennes, des circuits filtres de fréquence et de plusieurs applications en électronique. Une oscillation électrique se produit quand le condensateur et l'inducteur s'échangent à tour de rôle leur énergie, alors que le courant inverse périodiquement son sens.

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 11.10**

Ces deux circuits permettent d'obtenir des oscillations électriques qui débutent par (*a*) l'énergie dans le condensateur ou (*b*) l'énergie dans l'inducteur.

La figure 11.10 montre deux circuits qui permettent de générer des oscillations électriques. Dans les deux cas, l'interrupteur S_1 est d'abord fermé pendant une certaine période, ce qui permet au condensateur de la figure 11.10*a* ou à l'inducteur de la figure 11.10*b* d'accumuler de l'énergie. Si on ouvre S_1 et qu'on ferme S_2 à la figure 11.10*a*, on obtient un circuit qui ne contient que le condensateur et l'inducteur, mais où une certaine quantité d'énergie est stockée dans le condensateur. On obtient le même circuit si on ferme S_3 et qu'on ouvre S_1 à la figure 11.10*b*, sauf que l'énergie est initialement dans l'inducteur.

La figure 11.11 illustre le phénomène périodique qui se produit ensuite. Quand l'énergie est initialement dans le condensateur, le cycle débute à la figure 11.11*a* ; si elle est initialement dans l'inducteur, il débute à la figure 11.11*c*.

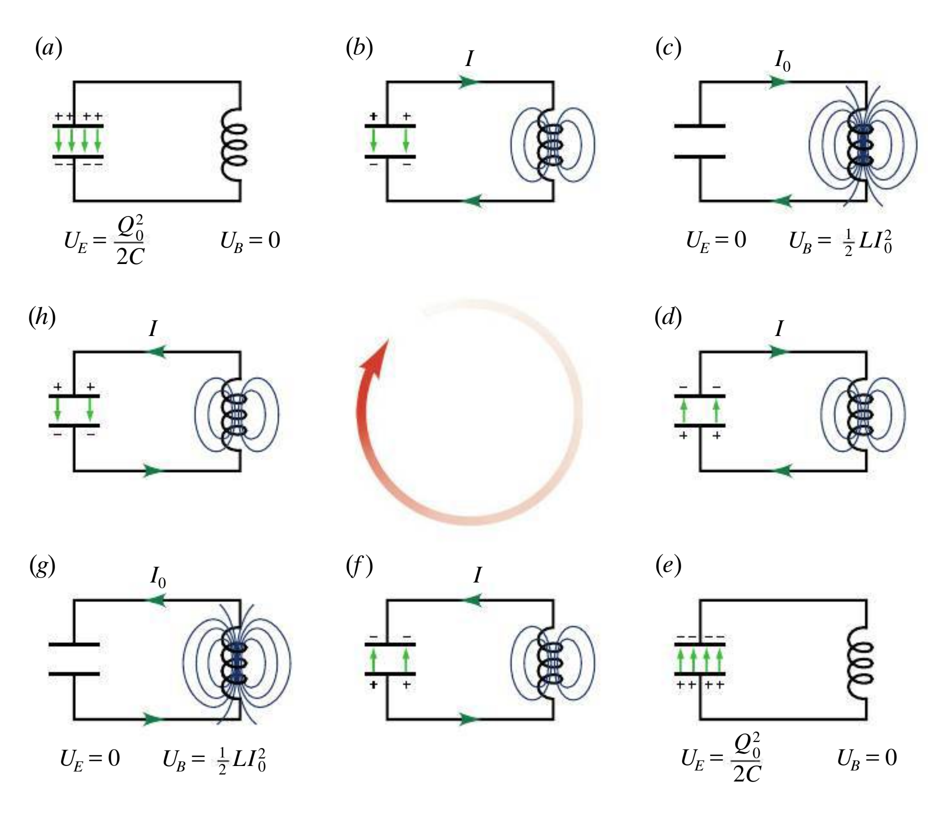


Figure 11.11
Les oscillations dans un circuit LC. Chaque cycle comporte deux allers-retours de l'énergie entre le condensateur et l'inducteur.

À la figure 11.11*a*, le condensateur porte sa charge maximale* Q_0 et il n'y a aucun courant. L'énergie du condensateur, $U_E = Q_0^2/2C$, est donc l'énergie totale contenue dans le système. Ensuite, le condensateur commence à se décharger (figure 11.11*b*) et l'intensité du courant augmente. Grâce à ce courant, il s'établit dans la bobine un champ magnétique où une partie de l'énergie se trouve donc emmagasinée, $U_B = \frac{1}{2}LI^2$. Lorsque le courant atteint sa valeur maximale I_0 (figure 11.11*c*), toute l'énergie est dans le champ magnétique : $U_B = \frac{1}{2}LI_0^2$. Le condensateur n'a donc maintenant plus d'énergie, ce qui signifie que $Q = 0$. Mais l'inducteur maintient le courant en puisant dans l'énergie de son champ magnétique, de sorte que le courant commence alors à charger le condensateur (figure 11.11*d*). À la figure 11.11*e*, le condensateur porte à nouveau la charge maximale $Q = Q_0$, mais sa polarité est opposée à celle de la figure 11.11*a*. L'énergie a donc fait un premier aller-retour entre le condensateur et l'inducteur.

Ensuite, le même processus se répète avec le courant en sens inverse (figures 11.11*f* à 11.11*h*). Le retour à la figure 11.11*a* complète un cycle. Notons que ce cycle comporte deux allers-retours de l'énergie entre le condensateur et l'inducteur. Ensuite, le tout recommence à nouveau. *L'énergie du système oscille donc indéfiniment entre le condensateur et la bobine d'induction.* En l'absence de résistance, l'énergie ne quitte jamais le système ; nous verrons à la prochaine section qu'une faible résistance fait graduellement diminuer l'amplitude des oscillations.

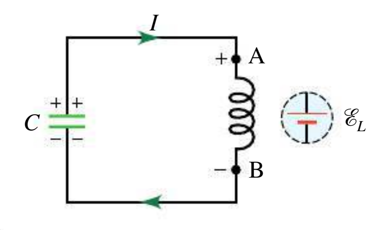
On note à la figure 11.11 que le courant est nul quand Q a sa valeur maximale Q_0 et que Q est nul quand le courant a sa valeur maximale I_0. Cette situation contraste avec celle qui se produirait si le condensateur était relié à une résistance : le courant serait maximal (et non pas nul) à l'instant où la décharge du condensateur débute et serait nul (et non pas maximal) quand $Q = 0$. Cette importante différence s'explique par la f.é.m. d'auto-induction : quand la

* Notez que nous utilisons la notation Q_0 et I_0 pour désigner la charge et le courant maximaux, respectivement. Dans cette notation, les indices 0 *ne signifient pas* « à $t = 0$ ».

décharge du condensateur débute, cette f.é.m. s'oppose à l'augmentation initiale du courant et reporte l'atteinte du courant maximal au moment où le condensateur est entièrement déchargé. Ensuite, quand le condensateur est vide et ne fournit plus d'énergie pour faire circuler le courant, la f.é.m. induite maintient ce courant (s'oppose à sa diminution), ce qui force la recharge du condensateur (selon une polarité opposée à celle du début).

Un phénomène sinusoïdal

Nous allons maintenant voir que le courant et la charge subissent des oscillations *sinusoïdales* en fonction du temps (aussi appelées *oscillations harmoniques simples*, voir le chapitre 1 du tome 3). Pour ce faire, considérons premièrement la situation représentée à la figure 11.11*b*. Sur cette figure, le courant circule en sens horaire dans le circuit et est en train de croître, ce qui n'est le cas que pendant le quart du cycle (soit en chaque instant situé entre ceux illustrés aux figures 11.11*a* et 11.11*c*). Nous considérerons d'abord ce quart du cycle et verrons ensuite à quelles conditions les trois autres quarts peuvent être décrits avec les mêmes équations.



▲ **Figure 11.12**

À l'instant représenté sur la figure, le courant augmente, de sorte que la polarité de la f.é.m. induite dans la bobine d'induction est celle qui est représentée.

La figure 11.12 reproduit la situation illustrée à la figure 11.11*b*. Comme le courant augmente ($\mathrm{d}I/\mathrm{d}t > 0$), la f.é.m. induite dans la bobine d'induction cherche à nuire à cette croissance et a donc la polarité indiquée (en d'autres termes, $V_B < V_A$). Selon la loi des mailles de Kirchhoff appliquée en sens horaire, on a donc

$$+\frac{Q}{C} - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad (11.18a)$$

Le courant circulant dans le fil correspondant au passage des charges provenant du condensateur, on peut exprimer I en fonction de Q en utilisant la définition du courant $I = \mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ (équation 6.1*b*), où $\mathrm{d}q$ est une quantité de charge (positive) qui circule dans le fil. Comme à la figure 11.12, la valeur de Q *décroît* avec le temps ($\mathrm{d}Q < 0$), on a $\mathrm{d}q = -\mathrm{d}Q$ et donc $I = -\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$. Cela nous permet de réécrire l'équation précédente sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2Q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}Q = 0 \qquad (11.18b)$$

Considérons maintenant les trois autres quarts du cycle. Le deuxième est celui représenté à la figure 11.11*d* : comme le courant y décroît ($\mathrm{d}I/\mathrm{d}t < 0$) et que la polarité aux bornes des deux composantes est inversée, le premier terme devrait changer de signe dans l'équation de la loi des mailles. De plus, le condensateur se fait charger, de sorte que la relation entre I et Q devrait devenir $I = +\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$. Des inversions de signes similaires devraient survenir pour les deux autres quarts du cycle (figures 11.11*f* et 11.11*h*), pour lesquels le courant circule en sens inverse. Ces changements de signes n'ont *pas* pour effet de s'annuler. Par contre, on peut facilement vérifier que les équations 11.18*a* et 11.18*b* (de même que l'équation $I = -\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$) demeurent valables *sans modification* pour l'entièreté du cycle si on utilise les conventions de signes suivantes :

- La charge Q est notée comme positive si la polarité est celle illustrée à la figure 11.11*b* et négative si la polarité est celle de la figure 11.11*d*.
- Le courant I est noté comme positif aux figures 11.11*b* à 11.11*d* et négatif quand il circule en sens inverse (figures 11.11*f* à 11.11*h*).
- On évalue la dérivée $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ en tenant compte du signe attribué au courant. Par exemple, quand l'intensité du courant croît, mais que celui-ci circule dans le sens négatif, $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ est négatif (comme la dérivée de n'importe quelle fonction qui devient de plus en plus négative).

L'équation 11.18b est une équation différentielle. Elle exprime que la charge aux bornes du condensateur est décrite par une fonction $Q(t)$ qui est proportionnelle à sa propre dérivée seconde $\mathrm{d}^2Q/\mathrm{d}t^2$. Toute fonction sinusoïdale possède cette propriété [par exemple, la dérivée seconde de $\sin(\omega t)$ est $-\omega^2 \sin(\omega t)$], mais sa fréquence doit permettre de vérifier l'équation 11.18b. Par substitution directe, on obtient que la charge oscille avec une **fréquence angulaire propre**:

Fréquence angulaire propre

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (11.19)$$

et, en général, sa variation dans le temps est donnée par

Oscillation harmonique simple de la charge du condensateur

$$Q(t) = Q_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \qquad (11.20a)$$

où Q_0 est la valeur maximale (amplitude) de Q et ϕ est une constante de phase. On note que ω_0 se mesure en radians par seconde (rad/s).

Si on a généré les oscillations électriques à l'aide du circuit de la figure 11.10a, alors $Q = Q_0$ à $t = 0$. On a donc $\sin \phi = 1$ et $\phi = \pi/2$. Comme $\sin(\theta + \pi/2) = \cos \theta$ (voir les rappels de mathématiques à l'annexe B), la charge s'écrit

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t) \qquad (11.20b)$$

Le courant, $I = -\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$, est donné par

$$I(t) = I_0 \sin(\omega_0 t) \qquad (11.21a)$$

où $I_0 = \omega_0 Q_0$. Ces deux fonctions sont représentées à la figure 11.13. Pendant le premier quart de la période, on note que I croît et que Q décroît, ce qui correspond bien à la situation de la figure 11.11b. Pendant le quart de période suivant, on note que I décroît et que la grandeur de Q croît, mais on note aussi que Q devient négatif, ce qui signifie que la polarité du condensateur s'est inversée. Cela correspond bel et bien à la situation de la figure 11.11d. Pendant les deux quarts de période suivants, on note que I devient négatif, ce qui signifie que son sens s'est inversé.

Si on a généré les oscillations à l'aide du circuit de la figure 11.10b, on a plutôt $Q = 0$ et $I = I_0$ à $t = 0$, donc $\sin \phi = 0$ et $\phi = \pi$. L'équation 11.20a peut se réécrire

$$Q(t) = -Q_0 \sin(\omega_0 t) \qquad (11.20c)$$

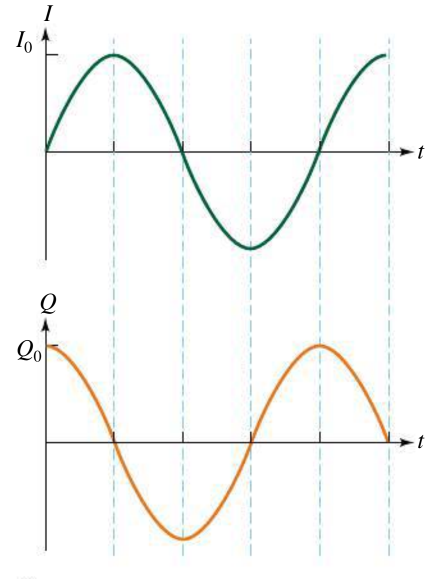
Le courant, $I = -\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$, est donné par

$$I(t) = I_0 \cos(\omega_0 t) \qquad (11.21b)$$

On note que l'équation 11.20c est identique à l'équation 11.20b, sauf que le début des oscillations est décalé d'un quart de cycle. Il en va de même des équations 11.21b et 11.21a.

On note aussi, quelle que soit la situation initiale utilisée, que l'oscillation de $Q(t)$ est en avance d'un quart de cycle sur celle de $I(t)$; on dit qu'elles sont *déphasées* d'un quart de cycle ou, ce qui est équivalent, de $\pi/2$ rad. On peut le vérifier en comparant la position des maximums et des zéros de $Q(t)$ et de $I(t)$.

La loi des mailles révèle l'origine de ce déphasage: puisque la tension aux bornes du condensateur $\Delta V_C = Q/C$ doit être égale à chaque instant à la tension aux bornes de l'inducteur $\Delta V_L = L\, \mathrm{d}I/\mathrm{d}t$, on doit avoir simultanément $Q = 0$ et



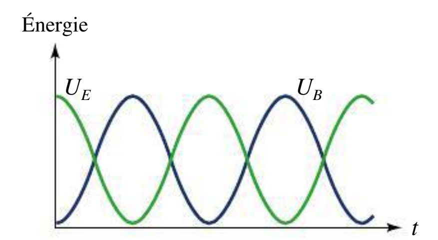
▲ **Figure 11.13**

Le courant dans la bobine d'induction et la charge du condensateur varient tous deux de façon sinusoïdale (oscillation harmonique simple). Ils sont déphasés d'un quart de cycle. La partie négative du graphique du courant correspond à une inversion du sens du courant. Dans le cas de la charge, c'est une inversion de la polarité du condensateur.

$\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = 0$, et non pas $Q = 0$ et $I = 0$. En d'autres termes, l'intensité du courant doit être maximale (c'est là que $\mathrm{d}I/\mathrm{d}t = 0$) quand Q est nul. Cela confirme les échanges d'énergie entre C et L, que nous avons présentés à l'aide de la figure 11.11 (p. 469).

L'énergie emmagasinée dans le condensateur est $U_E = Q^2/2C$ et l'énergie emmagasinée dans la bobine est $U_B = \frac{1}{2}LI^2$. D'après les équations 11.20*b* et 11.21*a*, l'énergie totale est

$$U = U_E + U_B = \frac{Q_0^2}{2C}\cos^2(\omega_0 t) + \frac{LI_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t)$$



▲ **Figure 11.14**

La variation d'énergie dans le condensateur et dans la bobine d'induction.

Les valeurs de U_E et de U_B sont représentées en fonction du temps à la figure 11.14. Comme $I_0 = \omega_0 Q_0$ et $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, il est facile de montrer que U est une constante :

$$U = \frac{Q_0^2}{2C} = \frac{1}{2}LI_0^2$$

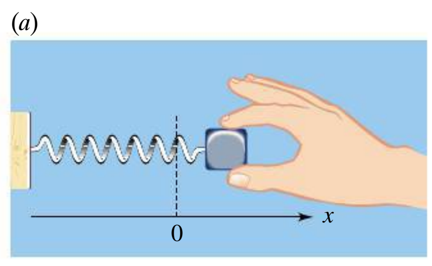
On obtient évidemment la même énergie totale à partir des équations 11.20*c* et 11.21*b*.

Le défibrillateur est un dispositif qui génère un fort courant qui passe par le cœur, dans le but de resynchroniser la contraction des fibres musculaires. Pour un effet optimal, on fait circuler le courant dans un sens, puis en sens inverse. Jusqu'en 1980 environ, on produisait cette alternance de sens en construisant les défibrillateurs comme des circuits LC ayant une faible fréquence propre (voir l'équation 11.19). Aujourd'hui, on n'utilise plus d'inducteur : un simple condensateur qui se décharge est relié à un dispositif qui fait alterner le sens du branchement. Cette nouvelle méthode, présentée en partie à l'exemple 7.19, permet d'utiliser une plus faible quantité d'énergie et de réduire les effets indésirables. ●

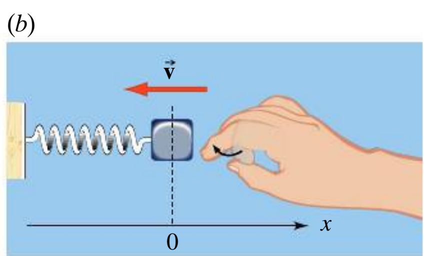
L'analogie entre les oscillations dans un circuit *LC* et celle d'un système bloc-ressort

Au chapitre 1 du tome 3, nous allons rencontrer un autre système qui produit des oscillations sinusoïdales (oscillations harmoniques simples) : le système bloc-ressort. Nous allons maintenant voir que l'oscillation de ce système présente une analogie systématique avec les oscillations électriques dans un circuit LC. Quand le bloc oscille au bout du ressort, l'énergie alterne entre la forme cinétique et la forme potentielle, exactement comme le circuit LC fait alterner son énergie entre l'inducteur et le condensateur.

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 11.15**

Un système bloc-ressort présente des oscillations analogues à celles d'un circuit LC. On peut commencer l'oscillation par l'énergie (*a*) entièrement sous forme potentielle ou (*b*) entièrement sous forme cinétique.

La figure 11.15 illustre le système, formé d'un bloc de masse m attaché à un ressort horizontal de constante de rappel k et de masse négligeable dont l'autre extrémité est fixe, le bloc pouvant bouger librement sur une surface horizontale sans frottement. On mesure la position du bloc grâce à un axe des x horizontal dont l'origine est située à la position d'équilibre du bloc. À la figure 11.15*a*, on *lâche* le bloc loin de sa position d'équilibre, donc il commence son oscillation par une énergie potentielle maximale, exactement comme le circuit de la figure 11.10*a* (p. 468) commence son oscillation par une U_E maximale. À la figure 11.15*b*, on projette le bloc à partir de sa position d'équilibre, donc il commence son oscillation par une énergie cinétique maximale, exactement comme le circuit de la figure 11.10*b* (p. 468) commence son oscillation par une U_B maximale.

La figure 11.16, analogue à la figure 11.11 (p. 469), illustre le phénomène périodique qui se produit ensuite. Quand l'énergie est initialement potentielle, le cycle débute à la figure 11.16*a* ; si elle est initialement cinétique, il débute à la

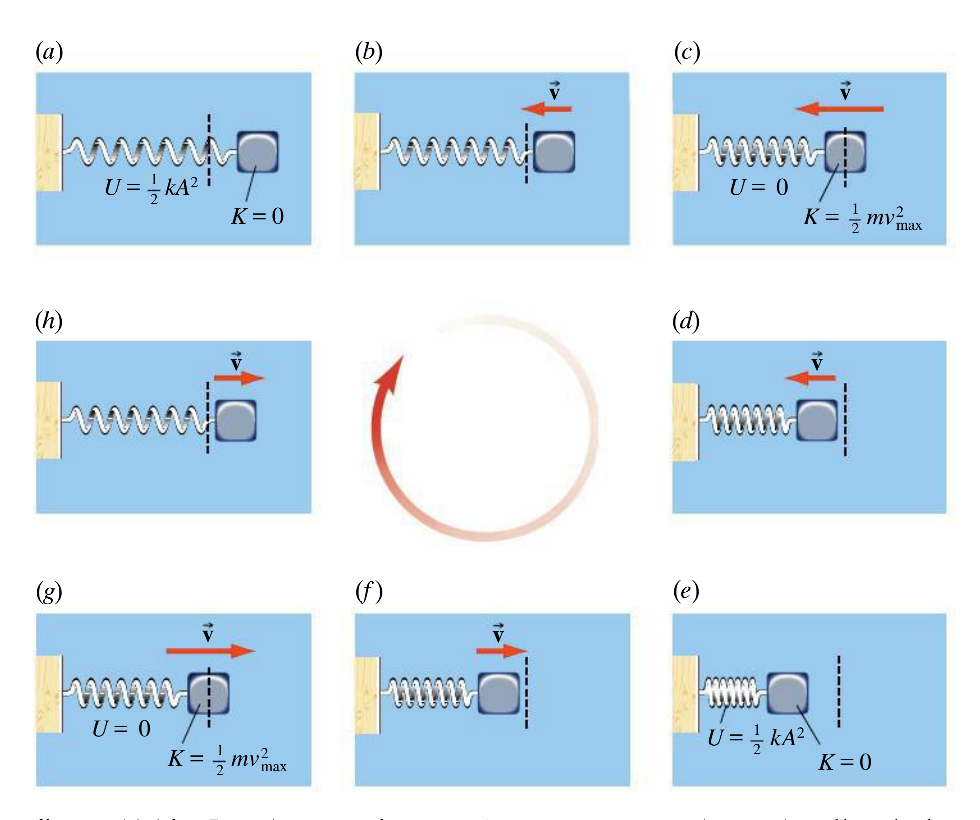


Figure 11.16

Les oscillations dans un système bloc-ressort. Chaque cycle comporte deux allers-retours de l'énergie entre la forme potentielle et la forme cinétique.

figure 11.16*c*. Les étapes suivantes s'apparentent une à une à celles de la figure 11.11 (p. 469). On remarque donc que la position x du bloc et sa dérivée v_x oscillent en étant déphasées d'un quart de cycle l'une par rapport à l'autre, exactement comme c'était le cas pour Q et I dans un circuit LC. On remarque aussi que l'énergie du système effectue deux allers-retours entre la forme cinétique et la forme potentielle, exactement comme celle du circuit LC effectue deux allers-retours entre la forme U_B et la forme U_E.

Si on poursuit quantitativement l'analogie, on peut aussi montrer que l'oscillation du système bloc-ressort est sinusoïdale, c'est-à-dire qu'il s'agit d'une oscillation harmonique simple. Alors que le circuit LC est décrit par la loi des mailles, son analogue mécanique est décrit par la deuxième loi de Newton $\Sigma F_x = ma_x$. La force résultante que subit le bloc est égale à la force exercée par le ressort. Puisque la position x du bloc correspond à l'allongement du ressort, cette force est $F_{res_x} = -kx$, où k est la constante de rappel du ressort. En substituant $a_x = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$, on obtient donc

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Cette équation a une forme identique à celle de l'équation 11.18*b*, où x remplace Q et k/m remplace $1/LC$. On en déduit qu'elle possède elle aussi une solution sinusoïdale analogue à l'équation 11.20*a*:

$$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \phi)$$

où A, l'amplitude, est la valeur maximale atteinte par la position x et où, cette fois, la fréquence propre est donnée par

$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

On peut poursuivre l'analogie en notant que $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t = -I$ est analogue à $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = v_x$. On note aussi que l'équation $\Sigma F_x = m\,\mathrm{d}v_x/\mathrm{d}t$ a la même forme que $\mathscr{E} = -L\,\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$. En tenant compte de l'analogie entre I et $-v_x$, on déduit que L est donc analogue à m: la masse mesure l'*opposition* à la variation de vitesse comme L mesure

l'*opposition* à la variation du courant. Enfin, en comparant $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ avec $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, on constate que $1/C$ est analogue à k. La constante $k = F_{res}/|x|$ nous donne la force nécessaire pour produire un déplacement unitaire, alors que $1/C = \Delta V/Q$ nous donne la différence de potentiel nécessaire pour déplacer une charge unitaire. Le tableau 11.1 présente plusieurs autres analogies. En pratique, ces analogies peuvent se révéler particulièrement utiles. Par exemple, elles permettent aux concepteurs d'un système mécanique complexe d'en étudier le comportement en construisant le circuit électrique équivalent au lieu d'avoir recours à une maquette ou à une simulation informatique.

Au chapitre 1 du tome 3, nous reviendrons davantage sur le système bloc-ressort et sur les oscillations harmoniques simples en général.

▶ Tableau 11.1
Analogies entre les grandeurs mécaniques et électriques

Mécanique :	x	v_x	m	$\frac{1}{2}mv^2$	k	$\frac{1}{2}kx^2$	$\vec{F}$	$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$
Électrique :	Q	$-I$	L	$\frac{1}{2}LI^2$	$\frac{1}{C}$	$\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$	ΔV	$P = I\Delta V$

Exemple 11.7

Dans un circuit LC où L = 40 mH et C = 20 µF, la différence de potentiel maximale aux bornes du condensateur est de 80 V. Trouver : (a) la charge maximale sur C ; (b) la fréquence angulaire propre de l'oscillation ; (c) l'intensité maximale du courant ; (d) l'énergie totale.

Solution

(a) $Q_0 = C\Delta V_0 = (2 \times 10^{-5}\ \text{F})(80\ \text{V}) = 1{,}60 \times 10^{-3}$ C.

(b) La fréquence angulaire propre est

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(4 \times 10^{-2}\ \text{H})(2 \times 10^{-5}\ \text{F})}} = 1120\ \text{rad/s}$$

(c) D'après l'équation 11.21*a*, l'intensité maximale du courant est

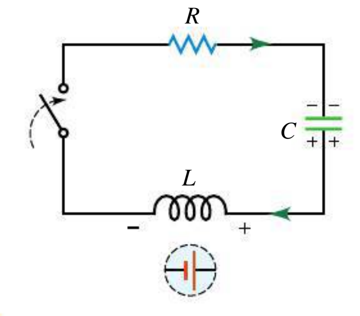
$$I_0 = \omega_0 Q_0 = (1120\ \text{rad/s})(1{,}60 \times 10^{-3}\ \text{C}) = 1{,}79\ \text{A}$$

(d) L'énergie totale est simplement l'énergie initiale du condensateur :

$$U = \frac{Q_0^2}{2C} = 64{,}0\ \text{mJ}$$

Mais l'énergie totale peut aussi être calculée à partir de l'énergie maximale de l'inducteur, $U = \frac{1}{2}LI_0^2 = 64{,}0$ mJ, ou à partir de la somme de l'énergie du condensateur et de celle de l'inducteur à n'importe quel instant. ■

L'analyse des oscillations dans un circuit LC que nous venons de présenter dans cette section est un modèle peu réaliste puisque l'énergie dans le système ne peut pas être constante, et ce pour deux raisons. Premièrement, toute bobine d'induction réelle a une résistance qui fait quitter l'énergie du système sous forme de chaleur. Nous en tiendrons compte dans la section qui suit. Deuxièmement, même si la résistance était nulle, l'énergie totale du système *ne resterait pas* constante. Elle est radiée par le système sous forme d'ondes électromagnétiques (voir le chapitre 13). Les émetteurs de radio fonctionnent à partir de ce rayonnement ! Néanmoins, notre analyse simple de cette section a montré que le système est un oscillateur harmonique simple et nous avons obtenu la fréquence propre des oscillations.



▲ Figure 11.17
Un circuit RLC. À l'instant représenté, on suppose que le courant augmente.

11.7 LES OSCILLATIONS AMORTIES DANS UN CIRCUIT *RLC* SÉRIE

Nous allons maintenant examiner l'effet d'une résistance sur les oscillations dans un circuit LC. La figure 11.17 représente une résistance, une bobine

d'induction et un condensateur en série ; un tel arrangement est nommé circuit *RLC* série. Un peu comme à la figure 11.11*a* (p. 469), on suppose que le condensateur a une charge initiale Q_0 et que l'on ferme l'interrupteur à $t = 0$. À l'instant illustré, qui ne correspond qu'à une partie du cycle, le courant augmente et la polarité de la f.é.m. induite dans la bobine est telle qu'indiquée sur la figure. La loi des mailles donne

$$\frac{Q}{C} - RI - L\frac{dI}{dt} = 0$$

Exactement comme à la section précédente, cette équation demeure valable pour l'entièreté du cycle si on utilise les conventions de signes déjà présentées. Notez que la tension aux bornes de R change de signe en même temps que I, c'est-à-dire lorsque le sens du courant s'inverse.

Comme $I = -dQ/dt$, la loi des mailles peut s'écrire sous la forme

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \qquad (11.22)$$

Cette équation est de la même forme que l'équation que nous verrons au chapitre 1 du tome 3 pour le mouvement harmonique amorti d'un système bloc-ressort, c'est-à-dire :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad (11.23)$$


Oscillation amortie de la charge du condensateur

Soulignons que R est analogue à la constante d'amortissement γ. Par analogie avec les expressions de la section 1.6 du tome 3, nous écrivons l'une des solutions possibles de l'équation 11.22, donnant l'expression de la charge en fonction du temps

$$Q(t) = Q_0 e^{-Rt/2L} \sin(\omega' t + \delta) \qquad (11.24)$$

Fréquence angulaire des oscillations amorties

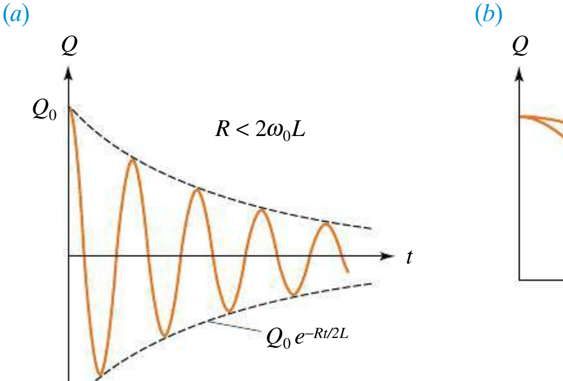
On peut démontrer (voir le problème P15) que la *fréquence angulaire des oscillations amorties* s'écrit

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \qquad (11.25)$$

où $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ est la fréquence angulaire propre.

Selon l'équation 11.25, le comportement du système dépend des valeurs relatives de ω_0 et de $R/2L$. Si $R/2L < \omega_0$, ou, ce qui est équivalent, si $R < 2\omega_0 L$, le système est *sous-amorti* et la charge varie en oscillant selon l'équation 11.24. L'amplitude des oscillations décroît de façon exponentielle (figure 11.18*a*). Si $R = 2\omega_0 L$, le système est en *amortissement critique*. Dans ce cas, il n'y a pas d'oscillations et la charge s'annule rapidement. Enfin, si $R > 2\omega_0 L$, le système

(*a*)



(*b*)

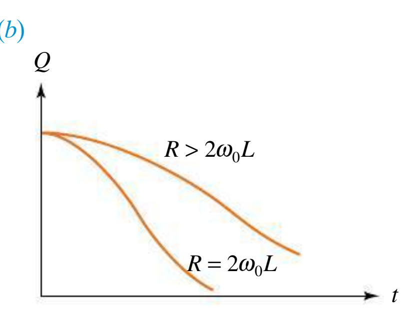


Figure 11.18
(*a*) Lorsque $R < 2\omega_0$L, le système est sous-amorti et il oscille avec une amplitude qui décroît exponentiellement. (*b*) Lorsque $R = 2\omega_0 L$, le système est en amortissement critique ; lorsque $R > 2\omega_0 L$, le système est en amortissement surcritique.

est en *amortissement surcritique*. Il n'y a alors pas d'oscillations et le délai nécessaire pour décharger le condensateur ($Q = 0$) est plus élevé. Les deux derniers cas sont illustrés à la figure 11.18*b*. Au chapitre suivant, nous étudierons la réponse d'un circuit *RLC* série à une f.é.m. externe sinusoïdale.

Exemple 11.8

Dans un circuit *RLC* série, $L = 20{,}0$ mH, $C = 50$ µF et $R = 6{,}0\ \Omega$. Trouver : (a) le temps nécessaire pour que l'amplitude tombe à la moitié de sa valeur initiale ; (b) la fréquence angulaire amortie ; (c) le nombre d'oscillations pendant 20 ms. (d) On remplace R sans changer L et C. Pour quelle valeur de R le système est-il en amortissement critique ?

Solution

(a) D'après l'équation 11.24, on sait que, lorsque l'amplitude diminue à la moitié de sa valeur initiale, $0{,}5 = e^{-Rt/2L}$; la demi-vie des oscillations est donc

$$T_{1/2} = \frac{2L}{R}\ln 2 = 4{,}62 \times 10^{-3}\ \text{s}$$

(b) La fréquence angulaire propre est $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = 10^3$ rad/s et la fréquence angulaire amortie est

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$= \sqrt{(10^3\ \text{rad/s})^2 - \left(\frac{6\ \Omega}{4 \times 10^{-2}\ \text{H}}\right)^2}$$

$$= 989\ \text{rad/s}$$

(c) La période des oscillations est $T' = 2\pi/\omega' = 6{,}26$ ms. Par conséquent, pendant 20 ms, le circuit effectue $20/6{,}4 = 3{,}15$ oscillations.

(d) Pour l'amortissement critique, $R = 2\omega_0 L = 40{,}0\ \Omega$.

RÉSUMÉ

Lorsque deux bobines parcourues par des courants qui varient sont proches l'une de l'autre, chacune est le siège d'une f.é.m. induite donnée par la loi de Faraday. Dans la bobine 1, cette f.é.m. est $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_{11} + \mathscr{E}_{12} = -\mathrm{d}(N_1\Phi_1)/\mathrm{d}t$, où le flux Φ_1 traversant chaque spire de la bobine 1 est la somme de deux contributions : Φ_{11}, le flux dû à son propre courant I_1, et Φ_{12}, le flux dû au champ magnétique produit par le courant I_2 de la bobine 2. La f.é.m. d'auto-induction dans la bobine 1 est donc donnée par

$$\mathscr{E}_{11} = -L_1\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} \qquad (11.5)$$

où l'auto-inductance L_1 est déduite de

$$N_1\Phi_{11} = L_1 I_1 \qquad (11.4)$$

et la f.é.m. induite dans la bobine 1 due aux variations de I_2 est

$$\mathscr{E}_{12} = -M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \qquad (11.7)$$

où l'inductance mutuelle M est donnée par

$$N_1\Phi_{12} = MI_2 \qquad (11.6)$$

(Si un problème donné fait intervenir uniquement l'auto-inductance *ou* l'inductance mutuelle, on peut omettre les indices à condition de définir clairement la signification des termes.)

Dans un circuit comprenant une bobine d'induction et une résistance, la bobine empêche le courant de varier brusquement. Lorsqu'on ferme l'interrupteur pour laisser passer le courant, celui-ci augmente selon l'expression

$$I(t) = I_{max}(1 - e^{-t/\tau}) \qquad (11.11)$$

où la constante de temps est

$$\tau = \frac{L}{R} \qquad (11.12)$$

Si l'on retire la pile, le courant diminue selon l'expression

$$I(t) = I_0 e^{-t/\tau} \qquad (11.13)$$

L'énergie emmagasinée dans une bobine d'induction est

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2 \qquad (11.15)$$

Cette énergie est emmagasinée dans le champ magnétique.

Dans un circuit LC, les oscillations de la charge du condensateur C sont des oscillations harmoniques simples :

$$Q(t) = Q_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \qquad (11.20a)$$

où la fréquence angulaire propre est

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \qquad (11.19)$$

TERMES IMPORTANTS

auto-inductance (p. 459)
auto-induction (p. 456)
bobine d'induction (p. 456)
constante de temps (p. 463)
fréquence angulaire propre (p. 471)
henry (p. 459)
inductance mutuelle (p. 460)
inducteur (p. 456)

RÉVISION

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

R1. Décrivez une situation où la f.é.m. d'auto-induction est (a) dans le même sens que le courant ; (b) dans le sens contraire au courant.

R2. Vrai ou faux ? L'auto-inductance d'une bobine est directement proportionnelle à l'intensité du courant qui la traverse.

R3. Deux bobines sont face à face. Expliquez la différence entre leur auto-inductance et leur inductance mutuelle.

R4. Deux bobines sont face à face. La première est traversée par un courant qui varie dans le temps. Décrivez ce qui se produit, en spécifiant chaque fois si vous parlez de f.é.m. d'auto-inductance ou d'inductance mutuelle.

R5. Comparez le comportement d'un circuit RL et le comportement d'un circuit RC (section 7.5).

R6. Vrai ou faux ? Dans un circuit RL relié à une pile, on atteint plus rapidement le courant maximal avec une grande résistance.

R7. Comparez les oscillations électriques dans un circuit LC aux oscillations d'une masse m reliée à un ressort de constante k en associant les grandeurs mécaniques aux grandeurs électriques.

R8. Expliquez pourquoi toute bobine d'induction réelle possède une résistance.

R9. Quel est l'effet de l'ajout d'une résistance sur les oscillations électriques dans un circuit LC ?

R10. À quelle grandeur mécanique associe-t-on la résistance dans un circuit RLC série ?

R11. (a) Comment peut-on utiliser un circuit LC pour fabriquer un défibrillateur ? (b) Votre dispositif est en fait un circuit RLC. Qu'est-ce qui constitue sa résistance ?

QUESTIONS

Q1. Les résistances de précision sont souvent constituées de fils enroulés autour d'un noyau en céramique. Comment peut-on réduire au minimum l'auto-inductance ?

Q2. Deux bobines circulaires sont proches l'une de l'autre. Comment doit-on les orienter pour que leur inductance mutuelle soit (a) maximale ; (b) minimale ?

Q3. Les relations $L = N\Phi_B/I$ et $L = -\mathscr{E}/(\mathrm{d}I/\mathrm{d}t)$ sont-elles aussi générales l'une que l'autre ? Sinon, laquelle est préférable pour définir L ? Expliquez pourquoi vous avez éliminé l'autre possibilité.

Q4. Pour un solénoïde de longueur finie, l'auto-inductance par unité de longueur est-elle différente au centre et aux extrémités ? Si oui, en quel point est-elle la plus élevée ?

Q5. Soit un circuit ayant une inductance élevée. Imaginez un système permettant d'annuler le courant rapidement, mais de façon sûre.

Q6. Montrez que $1/\sqrt{LC}$ a pour dimension T^{-1}.

Q7. À un instant donné, une bobine d'induction peut-elle être le siège d'une f.é.m. induite, même si le courant qui la traverse est nul ?

Q8. Une bobine d'induction réelle a une résistance. La différence de potentiel aux bornes de la bobine peut-elle être (a) supérieure à la f.é.m. induite ; (b) inférieure à la f.é.m. induite ?

Q9. Quel est l'effet produit sur l'inductance d'un solénoïde lorsqu'on introduit un noyau en fer ? L'inductance a-t-elle une valeur unique ?

Q10. Une bobine entoure un long solénoïde. Le champ magnétique créé par le solénoïde est essentiellement nul au point où est située la bobine. La bobine et le solénoïde ont-ils une inductance mutuelle ?

Q11. Est-il possible d'avoir une inductance mutuelle sans auto-inductance ? Est-il possible d'avoir une auto-inductance sans inductance mutuelle ?

Q12. Dans un circuit RL, la valeur de la f.é.m. de la pile a-t-elle un effet sur le temps nécessaire pour atteindre une valeur donnée du courant ? Sinon, quel effet a-t-elle ?

Q13. Peut-on avoir une bobine d'induction sans résistance ? Peut-on avoir une résistance sans inductance ?

Q14. Soit une spire autour d'un tore. Quel est l'effet produit sur leur inductance mutuelle si l'on fait varier le rayon de la spire ?

Q15. Pourquoi k est-il analogue à $1/C$ plutôt qu'à C ?

Q16. On considère que la tige métallique de la figure 10.19 (p. 421) est initialement immobile et qu'à $t = 0$ on commence à lui appliquer une force constante dirigée vers la droite, ce qui fait en sorte que la vitesse de la tige croît graduellement vers une vitesse limite. Tant que cette vitesse limite n'est pas atteinte, on mesure que la puissance mécanique fournie à la tige dépasse la puissance électrique dissipée dans la résistance. (a) Donnez une liste des causes impliquées dans cette différence. (b) Pourquoi la puissance mécanique fournie devient-elle égale à la puissance électrique dissipée quand la vitesse devient constante (voir l'exemple 10.8) ?

EXERCICES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

11.2 Inductance

E1. (I) (a) Un solénoïde de longueur 15 cm comporte 120 spires de rayon 2 cm. Quelle est son auto-inductance si l'on néglige les effets de bords ? (b) Quel doit être le taux de variation du courant qui le traverse pour produire une f.é.m. d'auto-induction de 4 mV ?

E2. (I) La f.é.m. d'auto-induction dans un solénoïde de longueur 25 cm et de rayon 1,5 cm est égale à 1,6 mV lorsque le courant vaut 3 A et augmente à raison de 200 A/s. (a) Quel est le nombre de spires ? (b) Quel est le module du champ magnétique à l'intérieur du solénoïde à l'instant donné ? On néglige les effets de bords.

E3. (I) Un solénoïde comporte 500 spires et son auto-inductance est égale à 1,2 mH. (a) Quel est le flux magnétique à travers chaque spire lorsque le courant est égal à 2 A ? (b) Quelle est la f.é.m. induite lorsque le courant varie à raison de 35 A/s ? (c) Tracez le schéma d'un circuit représentant la polarité de la f.é.m. calculée en (b), en supposant que le courant décroît. (d) Répétez le schéma, en supposant que le courant croît.

E4. (I) Trouvez la f.é.m. induite dans une bobine d'induction L lorsque le courant varie en fonction du temps selon : (a) $I = I_0 e^{-t/\tau}$; (b) $I = at - bt^2$; (c) $I = I_0 \sin(\omega t)$.

E5. (I) Un solénoïde comporte 50 spires. Quand le courant vaut 2 A, chaque spire est traversée par un flux magnétique de 15 μWb. (a) Quelle est la f.é.m. induite lorsque le courant varie à raison de 25 A/s ? (b) Tracez le schéma d'un circuit représentant la polarité de la f.é.m. calculée en (a), en supposant que le courant décroît. (c) Répétez le schéma, en supposant que le courant croît.

E6. (I) La f.é.m. d'auto-induction d'une bobine comportant 60 spires est égale à 7,2 mV lorsque le courant varie à raison de 16 A/s. Quel est le flux magnétique à travers chaque spire quand le courant est égal à 4,5 A ?

E7. (I) Lorsque le courant dans une bobine d'induction varie de 128 A/s, la f.é.m. d'auto-induction est de 12 V. Quelle est l'auto-inductance ?

E8. MonLab (I) Un câble coaxial est constitué d'un fil de rayon 0,3 mm entouré d'une gaine de rayon 4 mm. Quelle est l'auto-inductance de 18 m de câble ?

E9. MonLab (I) Une bobine circulaire plate comportant 5 spires de rayon 2,4 cm est placée autour d'un solénoïde de longueur 24 cm ayant 360 spires de rayon 1,7 cm. L'axe de la bobine fait un angle de 10° avec l'axe du solénoïde. Quelle est l'inductance mutuelle ?

E10. (I) Deux bobines ont une inductance mutuelle de 40 mH. Quelle est la valeur de la f.é.m. induite dans la bobine 2 lorsque le courant varie de 25 A/s dans la bobine 1 ?

E11. (I) Un solénoïde dont la section transversale a une aire de 8 cm^2 comporte 20 spires/cm. Une deuxième bobine de 40 spires est enroulée autour du solénoïde. (a) Quelle est l'inductance mutuelle ? (b) Si le courant dans le solénoïde varie selon $I = 3t - 2t^2$, où t est en secondes et I en ampères, quelle est la valeur de la f.é.m. induite dans la deuxième bobine à $t = 2$ s ?

E12. MonLab (I) Une bobine A comporte 5 spires d'aire 2,4 cm^2 et une bobine B comporte 6 spires d'aire 0,5 cm^2. Les deux bobines sont coplanaires. Lorsque le courant dans la bobine A vaut 2 A, il produit un champ magnétique pratiquement uniforme de module 10 μT sur l'aire de la bobine B. Trouvez : (a) l'inductance mutuelle ; (b) la f.é.m. induite dans la bobine A lorsque le courant dans B varie à raison de 40 A/s.

E13. (II) Un tore de N_1 spires a une section transversale rectangulaire (voir la figure 11.9, p. 468). Le rayon interne est a et le rayon externe est b, la hauteur étant h. Une bobine de N_2 spires est enroulée autour du tore. Trouvez : (a) le flux magnétique à travers la bobine ; (b) leur inductance mutuelle (voir l'équation 9.17).

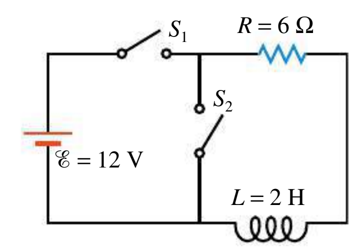
E14. (I) Une bobine de rayon 2 cm comporte 12 spires. Elle est placée à l'intérieur d'un solénoïde de rayon 2,5 cm qui comporte 20 spires/cm. L'axe de la bobine fait un angle de 60° avec l'axe du solénoïde. Trouvez leur inductance mutuelle. On néglige les effets de bords.

E15. (I) Soit deux solénoïdes ayant les caractéristiques suivantes : $L_1 = 20$ mH, $N_1 = 80$ spires ; $L_2 = 30$ mH, $N_2 = 120$ spires et $M = 7$ mH. À un instant donné, le courant dans la bobine 1 vaut 2,4 A et augmente au taux de 4 A/s, le courant dans la bobine 2 vaut 4,5 A et augmente au taux de 1,8 A/s. Trouvez la valeur de : (a) Φ_{11} ; (b) Φ_{12} ; (c) Φ_{21} ; (d) $\mathscr{E}_{11}$; (e) $\mathscr{E}_{12}$; (f) $\mathscr{E}_{21}$.

11.3 Circuits *RL*

E16. (II) À $t = 0$, on relie une f.é.m. idéale $\mathscr{E}$ à une bobine d'induction de résistance nulle et d'auto-inductance L. (a) Donnez l'expression du courant en fonction du temps. (b) Donnez le résultat de la question (a) à partir de l'équation 11.11 en utilisant le développement $e^x \approx 1 + x$, valable pour les petites valeurs de x.

E17. MonLab (I) Dans le circuit représenté à la figure 11.19, S_2 est ouvert et on ferme S_1 à $t = 0$. Trouvez : (a) l'intensité du courant après 50 ms ; (b) la f.é.m. dans la bobine d'induction après 50 ms ; (c) le temps nécessaire pour que le courant atteigne 80 % de sa valeur finale.



▲ **Figure 11.19**

Exercices 17, 18, 19, 29 et 30.

E18. (I) À la figure 11.19, l'interrupteur S_1 est resté fermé pendant longtemps. À $t = 0$, on ferme S_2 et on ouvre S_1. (a) À quel instant la différence de potentiel aux bornes de la résistance chute-t-elle à 12,5 % de sa valeur initiale ? (b) Quelle est la f.é.m. induite dans la bobine d'induction à l'instant trouvé à la question (a) ?

E19. (I) À la figure 11.19, S_2 est ouvert et on ferme S_1 à $t = 0$. (a) Quel est le taux initial de variation du courant (dI/dt) ? (b) À quel instant ce taux chute-t-il à 50 % de sa valeur initiale ? (c) Combien faudrait-il de temps au courant pour atteindre sa valeur finale si le taux initial de variation était maintenu ?

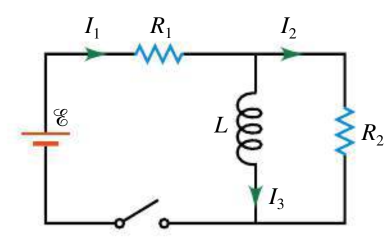
E20. MonLab (I) (a) Dans un circuit RL, le courant chute à 25 % de sa valeur initiale en 0,05 s. Si $L = 6$ mH, que vaut R ? (b) Dans un circuit RL, le courant croît jusqu'à 40 % de sa valeur finale en 0,02 s. Si $R = 10\ \Omega$, que vaut L ?

E21. (I) Une bobine a une résistance de 2 Ω et une auto-inductance de 40 mH. L'intensité du courant est égale à 6 A et elle varie de 25 A/s. Quelle est la différence de potentiel aux bornes de la bobine si le courant (a) croît ; (b) décroît ?

E22. (I) Dans un circuit RL, le courant croît jusqu'à 40 % de sa valeur finale en 40 ms. (a) Combien de temps lui faut-il pour atteindre 80 % de sa valeur finale ? (b) Si $R = 12\ \Omega$, que vaut L ?

E23. (I) Dans un circuit RL, $L = 120$ mH et $R = 15\ \Omega$. On ferme l'interrupteur à $t = 0$. (a) Combien de temps faut-il au courant pour croître jusqu'à 50 % de sa valeur finale ? (b) Quel pourcentage du courant final est atteint après qu'il se soit écoulé un temps équivalent à cinq constantes de temps ?

E24. (II) Soit le circuit représenté à la figure 11.20. Trouvez les trois intensités du courant : (a) lorsque l'interrupteur est fermé pour la première fois ; (b) une fois que les courants ont atteint des valeurs stationnaires ; (c) lorsqu'on ouvre l'interrupteur pour la première fois (après qu'il soit resté fermé pendant longtemps). (d) Quelle est la différence de potentiel aux bornes de R_2 dans le cas (c) ?



▲ **Figure 11.20**

Exercice 24 et problème 10.

E25. (I) Un solénoïde de longueur 18 cm et de rayon 2 cm est constitué d'une seule couche de spires jointives en fil de cuivre de diamètre 1,0 mm et de résistivité $1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega{\cdot}$m. Évaluez sa constante de temps si on le branche à une f.é.m. idéale.

11.4 et 11.5 Énergie et densité d'énergie

E26. MonLab (I) (a) Un solénoïde a une auto-inductance de 1,5 H. Quelle est l'énergie emmagasinée lorsque l'intensité du courant est égale à 20 A ? (b) Un long solénoïde de 120 spires produit un flux de 4×10^{-5} Wb à travers un plan normal à l'axe lorsque $I = 1{,}5$ A. Quelle est l'énergie emmagasinée ? On néglige les effets de bords.

E27. (I) (a) Le module du champ magnétique terrestre est voisin de 1 G près de la surface. Quelle est la densité d'énergie magnétique ? (b) Un solénoïde de longueur 10 cm et de rayon 1 cm comporte 100 spires. Quelle est l'intensité du courant qui produirait la densité d'énergie trouvée à la question (a) ? On néglige les effets de bords.

E28. (I) Un câble coaxial est constitué d'un fil conducteur intérieur de rayon $a = 0{,}5$ mm et d'une gaine extérieure de rayon $b = 2$ mm. Si l'intensité du courant est égale à 2 A, quelle est l'énergie emmagasinée sur 1 m de câble ?

E29. MonLab (II) À la figure 11.19, S_2 est ouvert et on ferme S_1 à $t = 0$. Au bout d'une constante de temps, trouvez : (a) le taux de dissipation d'énergie dans la résistance ; (b) le taux auquel l'énergie est emmagasinée dans la bobine d'induction ; (c) la puissance fournie par la pile.

E30. (II) Dans le circuit de la figure 11.19, S_2 est ouvert et on ferme S_1 à $t = 0$. On donne $L = 25$ mH, $R = 60\ \Omega$ et la f.é.m. de la pile égale à 40 V. À $t = 1$ ms, trouvez : (a) la f.é.m. d'auto-induction dans la bobine ; (b) la puissance dissipée dans la résistance ; (c) la puissance fournie à la bobine ; (d) la puissance fournie par la pile.

E31. (II) Une résistance $R = 5\ \Omega$ est en série avec une bobine d'auto-inductance $L = 40$ mH et une f.é.m. idéale de 20 V. On ferme l'interrupteur à $t = 0$. À quel instant le taux de dissipation d'énergie dans R est-il égal au taux auquel l'énergie est emmagasinée dans L ? Exprimez également votre réponse en fonction d'un nombre de constantes de temps.

E32. (I) Une bobine d'induction emmagasine 1,2 J lorsqu'elle est traversée par un courant de 4 A. Quelle est l'auto-inductance ?

E33. (I) Un solénoïde de 300 spires a une longueur de 20 cm et un rayon de 1,8 cm. Pour quelle intensité du courant la densité d'énergie à l'intérieur du solénoïde est-elle égale à 8 mJ/m^3 ?

E34. (I) Une bobine torique est en série avec une résistance de 60 Ω et une f.é.m. idéale de 24 V. On ferme l'interrupteur à $t = 0$. Sachant que l'intensité du courant atteint 180 mA en 2 ms, trouvez : (a) l'auto-inductance du tore ; (b) l'énergie finale emmagasinée dans le tore.

E35. (I) Un solénoïde a une section transversale d'aire A et une longueur ℓ. (a) S'il est parcouru par un courant I, donnez l'expression de la densité d'énergie à l'intérieur du solénoïde. (b) Posez l'énergie totale du solénoïde égale à $\frac{1}{2}LI^2$ et dérivez l'auto-inductance. Comparez votre résultat avec l'équation 11.8.

E36. (I) L'intensité du courant dans une bobine d'induction $L = 160$ mH varie selon $I = 2{,}5 \sin(150\ t)$, où t est en secondes et I en ampères. Trouvez : (a) la f.é.m. induite $\mathscr{E}$ à 1,2 ms ; (b) la puissance instantanée fournie à la bobine d'induction à $t = 1{,}2$ ms.

11.5 et 11.6 Oscillations dans un circuit *LC* et oscillations amorties dans un circuit *RLC*

E37. (II) Un condensateur $C = 10\ \mu$F a une charge initiale de 60 μC. Il est relié aux bornes d'une bobine $L = 8$ mH à $t = 0$. (a) Quelle est la fréquence des oscillations ? (b) Quelle est l'intensité maximale du courant circulant dans L ? (c) Quel est le premier instant auquel l'énergie se répartit à parts égales entre C et L ? (d) Superposez le graphe de l'énergie

emmagasinée dans la bobine et le graphe de l'énergie emmagasinée dans le condensateur pour t allant de 0 à une période d'oscillation. La superposition des deux graphes confirme-t-elle la réponse obtenue en (c) ?

E38. (I) Dans un circuit LC, le condensateur $C = 25$ nF met 10^{-4} s pour perdre sa charge initiale de 20 μC. (a) Quelle est la valeur de L ? (b) Quelle est l'énergie maximale emmagasinée dans L ?

E39. (I) Dans le circuit de syntonisation d'une radio AM, l'inductance est de 5 mH. Quel doit être l'intervalle de variation de la capacité pour que le circuit puisse capter toute la bande AM comprise entre 550 kHz et 1600 kHz ?

E40. (I) Dans un circuit RLC série, $R = 20\ \Omega$, $L = 4$ mH et $C = 20$ μF. (a) Quelle est la fréquence angulaire des oscillations amorties ? (b) Pour quelle valeur de la résistance le système est-il en amortissement critique ?

E41. (II) Dans un circuit RLC série, $R^2 \ll 4L/C$. Montrez que l'énergie totale emmagasinée dans C et L est donnée par

$$U \approx \frac{Q_0^2}{2C}\, e^{-Rt/L}$$

E42. (I) Dans un circuit RLC série, $L = 40$ mH et $C = 0{,}01$ μF. (a) Quelle est la fréquence angulaire propre ω_0 ? (b) Pour quelle valeur de la résistance la fréquence angulaire des oscillations amorties est-elle inférieure de 0,1 % à ω_0 ? (c) Tracez le graphe de ω' en fonction de R. (d) Pour quelle valeur de R faut-il une journée (86 400 s) pour qu'une oscillation complète ait lieu ?

PROBLÈMES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

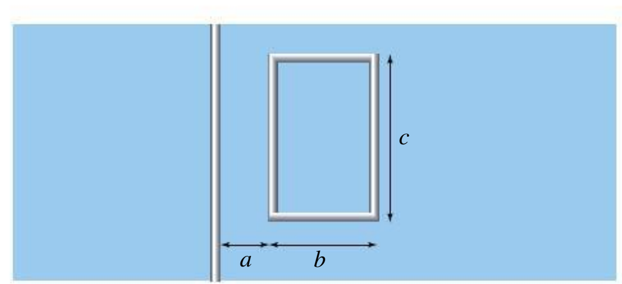
P1. (I) Trouvez l'auto-inductance équivalente de deux bobines d'induction reliées de la manière suivante : (a) en série ; (b) en parallèle. On néglige leur inductance mutuelle.

P2. (II) Deux solénoïdes d'auto-inductances L_1 et L_2 et d'inductance mutuelle M sont reliés en série. Montrez que leur auto-inductance équivalente est $L_{éq} = L_1 + L_2 \pm 2M$. Pourquoi les deux signes sont-ils possibles ?

P3. (II) Les centres de deux longs fils parallèles de rayon a sont séparés par une distance d. Ils sont parcourus par des courants de même intensité de sens opposés. Montrez que si l'on néglige le flux à l'intérieur des fils, l'auto-inductance par unité de longueur est $L = (\mu_0/\pi)\ln[(d - a)/a]$.

P4. (II) Soit un long fil rectiligne de rayon a. Quelle contribution le flux à l'intérieur du fil apporte-t-il à son auto-inductance par unité de longueur (voir l'équation 9.16) ?

P5. (II) Un long fil rectiligne et un cadre rectangulaire sont situés dans le même plan (figure 11.21). Quelle est leur inductance mutuelle ?



▲ **Figure 11.21**
Problème 5.

P6. (II) Déterminez l'auto-inductance du tore de la figure 11.9 (p. 468) en calculant le flux qui le traverse. Comparez votre résultat avec l'équation 11.17.

P7. (II) (a) Montrez que dans le cas d'une oscillation fortement sous-amortie d'un circuit RLC série, la fraction de l'énergie perdue par cycle est

$$\frac{|\Delta U|}{U} \approx \frac{2\pi}{Q_{RLC}}$$

où $Q_{RLC} = \omega' L/R$ est appelé facteur Q_{RLC}. (*Indice* : Utilisez l'équation 11.24 pour calculer l'énergie totale à deux instants séparés par une période. Le sinus aura la même valeur. Utilisez ensuite $e^x \approx 1 + x$ pour les petites valeurs de x.) (b) Si la perte d'énergie par cycle est de 2 %, que vaut Q_{RLC} ? (c) Pour la valeur de Q_{RLC} trouvée à la question (b), on suppose que $R = 0{,}5\ \Omega$ et $L = 18$ mH. Que vaut C ?

P8. (I) Dans un circuit RL, $L = 20$ mH et $R = 9\ \Omega$. On relie ces éléments en série avec une f.é.m. idéale de 60 V à $t = 0$. Trouvez le temps nécessaire pour que chacune des grandeurs suivantes atteigne 50 % de sa valeur maximale : (a) l'intensité du courant ; (b) le taux de dissipation d'énergie dans la résistance ; (c) l'énergie emmagasinée dans la bobine d'induction.

P9. (I) Un solénoïde est composé d'un fil de rayon a bobiné en une seule couche sur un cylindre en papier de rayon r. Montrez que la constante de temps est

$$\tau = \frac{L}{R} = \frac{\mu_0 \pi a r}{4\rho}$$

où ρ est la résistivité.

P10. (II) Dans le circuit de la figure 11.20 (p. 480), montrez qu'après la fermeture de l'interrupteur à $t = 0$, I_3 est donné par

$$I_3 = \frac{\mathscr{E}}{R_1}(1 - e^{-t/\tau})$$

où $\tau = L(R_1 + R_2)/R_1R_2$.

P11. (II) Démontrez que dans un circuit RL où le courant décroît (voir la figure 11.8*a*, p. 464), toute l'énergie emmagasinée dans la bobine est dissipée sous forme d'énergie thermique dans la résistance.

P12. (II) Sachant que la charge du condensateur dans un circuit RLC série varie selon

$$Q(t) = Q_0 e^{-Rt/2L} \cos(\omega' t)$$

trouvez l'expression du courant en fonction du temps. Montrez que si $R/2L \ll \omega'$, l'intensité du courant peut s'écrire sous la forme

$$I(t) \approx A(t) \sin(\omega' t + \delta)$$

où $A(t) = -\omega' Q_0 e^{-Rt/2L}$ et $\tan \delta = R/(2L\omega')$.

P13. (II) Soit deux solénoïdes, le premier étant à l'intérieur de l'autre. Écrivez les expressions de L_1 et de L_2 et deux expressions pour M. En supposant que la totalité du flux d'un solénoïde traverse l'autre, montrez que $M = \sqrt{L_1 L_2}$.

P14. (II) Montrez que le taux de dissipation thermique dans un circuit RLC série sous-amorti (voir la figure 11.17, p. 474) est

$$P_{\text{moy}} = \frac{\omega_0^2 Q_0^2 R}{2} e^{-Rt/L}$$

P15. (II) À partir de l'équation 11.24, qui représente une solution à l'équation différentielle d'un circuit RLC (équation 11.22), montrez que la fréquence angulaire des oscillations amorties est donnée par l'équation 11.25, soit

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

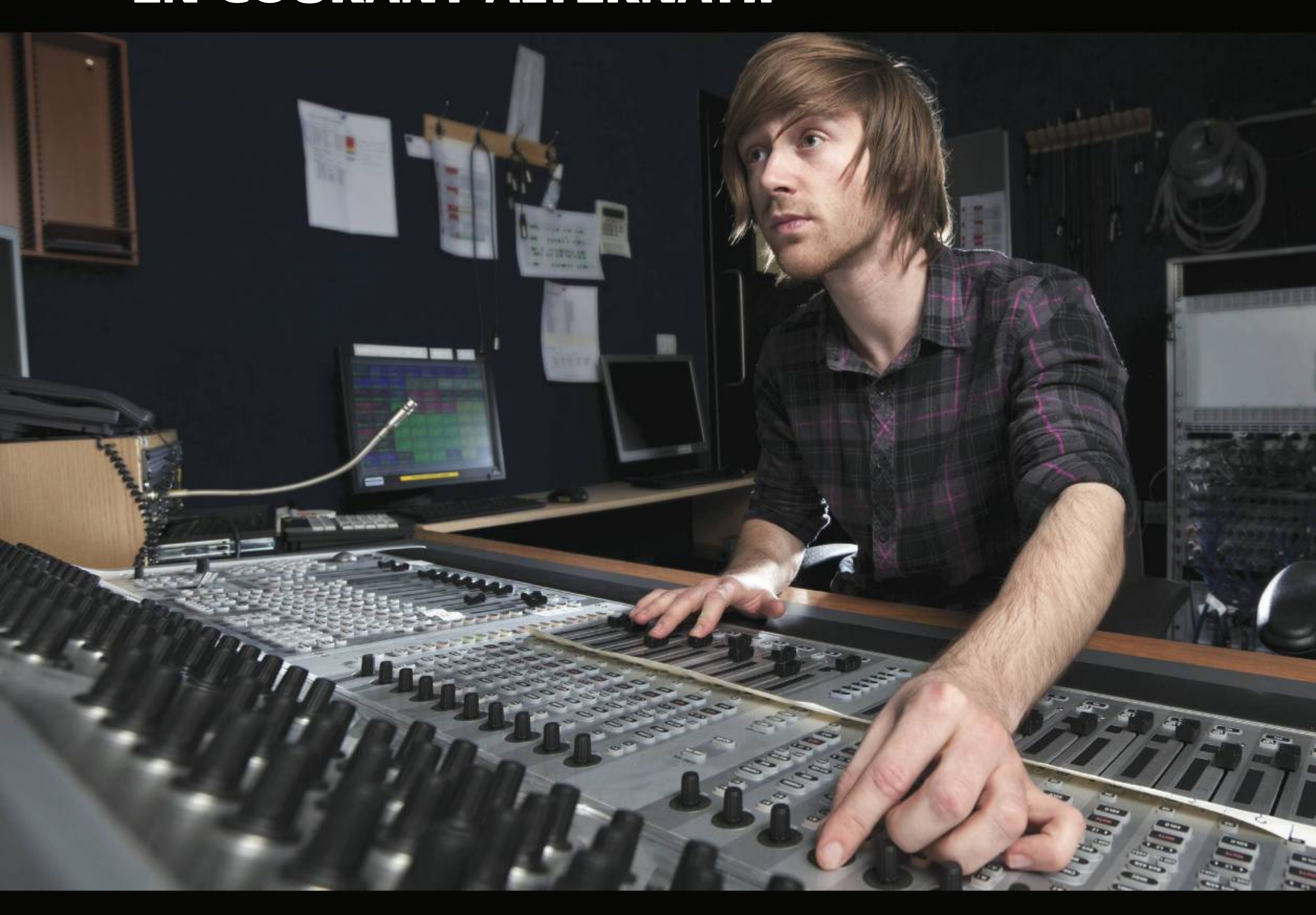
(*Indice* : Insérez la solution dans l'équation différentielle.)

P16. (I) Pour mesurer le taux d'humidité dans l'air d'un laboratoire d'écologie, on peut utiliser le fait que la constante diélectrique de l'air entre les armatures d'un condensateur dépend du taux d'humidité. (a) Dans le cas où la mesure de la capacité du condensateur est effectuée à partir de la fréquence propre d'un circuit LC dont il ferait partie, évaluez l'ordre de grandeur des mesures obtenues pour cette capacité. (b) Cette méthode est-elle réaliste ? Si oui comment procéderiez-vous pour mesurer la fréquence ? Si non, quelle autre méthode utiliseriez-vous pour mesurer la capacité ?



CHAPITRE 12

LES CIRCUITS ALIMENTÉS EN COURANT ALTERNATIF



SOMMAIRE



Cette console fournit au moins trois exemples de rôles que peuvent jouer des circuits alimentés en courant alternatif. 1) Elle est reliée à une prise murale qui l'alimente en courant alternatif. 2) Elle contient plusieurs transformateurs. 3) Enfin, elle contient plusieurs circuits filtres, dont la fréquence de résonance est ajustable, permettant par exemple d'accentuer seulement les fréquences basses de la musique. Ce sont des circuits de ce genre que nous étudierons dans ce chapitre.

Au chapitre 7, nous n'avons parlé que des circuits alimentés en **courant continu** (c.c.), dans lesquels le courant circule toujours dans le même sens, qu'il soit constant ou variable dans le temps. Pourtant, de nombreuses sources de courant produisent du **courant alternatif** (c.a.), qui change de sens périodiquement (et est donc nécessairement variable dans le temps). Par exemple, le générateur c.a. étudié à la section 10.4 est utilisé notamment dans les centrales électriques et les alternateurs d'automobiles. Tout instrument ou appareil électrique que l'on branche dans une prise murale est alimenté en courant alternatif par une source de f.é.m. L'émission et la réception des signaux de radio et de télévision font intervenir des courants qui varient sinusoïdalement dans le temps. Un microphone enregistre le son d'abord sous la forme d'un courant c.a. qui peut ensuite être converti en signal numérique. De même, dans les systèmes audio ou vidéo numériques comme le iPod ou les lecteurs de DVD, le signal numérique est éventuellement converti en un courant c.a. pour produire le son.

Nous allons dans ce chapitre étudier la réponse des résistances, des bobines d'induction et des condensateurs à une f.é.m. alternative. Nous considérerons

d'abord chacun de ces éléments de circuit séparément (sections 12.2 à 12.4), puis nous étudierons leur association en série et en parallèle (section 12.6). Le circuit *RLC* série présente un intérêt particulier parce que le courant qui le traverse donne lieu au phénomène de résonance (sections 12.7 et 12.8) lorsqu'on fait varier la fréquence de la source c.a.

12.1 CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES

Après avoir étudié le générateur c.a. à la section 10.4, nous savons que la f.é.m. et le courant produits par ce type de générateur varient sinusoïdalement dans le temps. Nous allons dans ce chapitre utiliser les lettres minuscules pour désigner les valeurs *instantanées* du courant, de la différence de potentiel, ou autres. Comme au chapitre 7, nous allons utiliser le terme **tension** pour désigner une différence de potentiel aux bornes d'un élément* de circuit. Sauf dans le cas d'associations en parallèle, nous supposerons que le courant instantané $i(t)$ est toujours de la forme

Courant instantané

$$i(t) = i_0 \sin(\omega t) \qquad (12.1)$$

où $\omega = 2\pi f$ est la fréquence angulaire en radians par seconde (rad/s) et f la fréquence en hertz (Hz) de la source de f.é.m. alternative. L'argument du sinus, ωt, est appelé la **phase** (ou l'angle de phase) de l'oscillation. L'amplitude i_0 est la valeur *maximale* du courant**. Lorsque $i(t) < 0$, le sens du courant s'inverse par rapport à la direction initiale. (Le signe de $i(t)$ a donc uniquement une signification liée au sens du courant.)

On dit que deux grandeurs de même fréquence, tels le courant et la tension, sont *en phase* si elles prennent leurs valeurs maximales au même instant. Nous allons voir qu'en général la tension instantanée aux bornes d'un élément de circuit n'est *pas en phase* avec le courant qui le traverse. On peut donc écrire la tension instantanée aux bornes de la source*** sous la forme

Tension instantanée

$$\Delta v(t) = \Delta v_0 \sin(\omega t + \phi) \qquad (12.2)$$

où Δv_0 est la tension maximale. Cette fois, l'angle de phase est $\omega t + \phi$, où ϕ est appelée **constante de phase** ou **phase initiale**. En effet, cette constante correspond à la valeur de l'angle de phase de la tension quand $t = 0$.

À chaque instant t, les angles de phase de la tension et du courant diffèrent par un écart constant $\Delta\phi$ appelé **différence de phase** ou **déphasage**. Puisque la constante de phase du courant a été choisie nulle par convention, le déphasage

---

* Aux chapitres 5 à 11, nous avons désigné indifféremment par le mot « composant » ou « élément » les divers condensateurs, résistances et inductances composant les circuits. Dans ce chapitre, nous allons utiliser seulement le terme « élément de circuit » afin d'éviter la confusion avec les *composantes* vectorielles des vecteurs de Fresnel (voir la section 12.5).

** Soulignons que cette notation est la même qu'à la section 11.6, où l'indice 0 *ne signifie pas* « à $t = 0$ » ; il sert seulement à distinguer la valeur instantanée i de l'amplitude i_0.

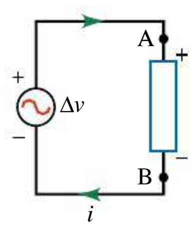
*** On suppose que la source n'a pas de résistance interne et donc que la tension à ses bornes correspond à la f.é.m.

correspond ici à ϕ, la constante de phase de la tension, et nous emploierons dans ce chapitre ce symbole pour le désigner.

Dans les trois prochaines sections, nous allons déterminer ϕ pour une résistance, une bobine d'induction idéale ou un condensateur, reliés séparément à une source c.a. Pour chacun de ces éléments de circuit, nous verrons aussi qu'une relation précise s'établit entre les valeurs maximales de courant et de tension aux bornes de l'élément de circuit. Avant tout, cependant, il nous faut définir clairement les conventions de signes qui seront utilisées.

Les conventions de signes

Tout comme le courant $i(t)$ et la tension aux bornes de la source $\Delta v(t)$, les tensions aux bornes d'une résistance (Δv_R), d'une bobine idéale (Δv_L) ou d'un condensateur (Δv_C) alternent elles aussi de polarité dans un circuit c.a. Comme dans le cas du courant, cette alternance est représentée par un signe, et nous allons maintenant définir ce que signifie chaque signe. La figure 12.1 représente un élément de circuit (par exemple, R, L ou C), relié à une source de tension c.a. sinusoïdale dont le symbole est -⊖-. La polarité indiquée aux bornes de la source et celle aux bornes de l'élément de circuit sont celles que nous définissons comme positives. *Ce choix de convention permettra en tout temps d'écrire la loi des mailles comme une soustraction.* Par exemple, si l'élément de circuit représenté sur la figure 12.1 est un condensateur, on pourra écrire $\Delta v - \Delta v_C = 0$, et cette équation sera valable que les tensions Δv et Δv_C prennent un signe positif ou négatif. De même, si l'élément de circuit de la figure contient une résistance, un condensateur et une bobine idéale en série, alors la loi des mailles sera $\Delta v - \Delta v_R - \Delta v_C - \Delta v_L = 0$, et cette équation sera valable quel que soit le signe que prend individuellement chaque tension.



▲ **Figure 12.1**

Une source c.a. fournit une tension instantanée Δv entre ses bornes et est reliée à un élément de circuit (ou à un groupe d'éléments de circuit) R, L ou C. Le sens du courant instantané et les polarités instantanées des tensions indiquées sur la figure sont ceux définis comme *positifs*.

Ce choix de convention de signes pour les tensions nous force à adopter des conventions de signes cohérentes pour les autres grandeurs dans un circuit c.a. En effet, nous verrons dans les trois prochaines sections que les polarités des trois tensions Δv_R, Δv_L et Δv_C dépendent respectivement du sens du courant, du taux de variation du courant et de la charge accumulée sur le condensateur, trois autres grandeurs dont la polarité ou le sens (et donc le signe) alternera avec le temps.

Pour la résistance, on aura $\Delta v_R = Ri$, ce qui implique que Δv_R et i ont le même signe à chaque instant. Par conséquent, le sens du courant instantané indiqué sur la figure 12.1 est le sens que nous définissons comme positif.

Pour le condensateur, on aura $\Delta v_C = q/C$, ce qui implique que le signe de q indique la polarité des charges sur le condensateur. Lorsque q est positif, la polarité des charges est la même que celle d'une tension positive aux bornes du condensateur.

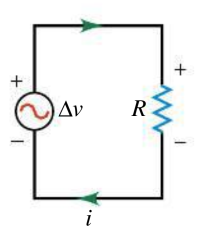
Le cas le plus complexe est l'inducteur (bobine d'induction). La tension à ses bornes est la f.é.m. d'auto-induction donnée par l'équation 11.5 qui utilise une convention de signes différente. Considérant le signe que nous venons d'attribuer à i et à Δv_L, nous verrons à la section 12.3 qu'on doit reformuler l'équation 11.5 sous la forme

$$\Delta v_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

De cette façon, on obtient le signe correct pour Δv_L à la condition d'évaluer la dérivée di/dt *en tenant compte du signe attribué au courant*. Par exemple, quand le courant croît mais circule dans le sens négatif, di/dt est négatif (comme n'importe quelle fonction qui devient de plus en plus négative) et non positif.

Nous allons maintenant, dans les trois prochaines sections, appliquer ces conventions de signes pour étudier des circuits comportant un élément de circuit à la fois.

12.2 LA RÉSISTANCE DANS UN CIRCUIT C.A.; LES VALEURS EFFICACES



▲ **Figure 12.2**
Une résistance dans un circuit c.a.

À la figure 12.2, une résistance est reliée à une source de f.é.m. idéale, dont la tension instantanée aux bornes est Δv. Selon la loi des mailles, $\Delta v - \Delta v_R = 0$, ce qui permet de remarquer que la figure illustre les polarités des tensions et le sens du courant dans le cas où ils sont tous trois positifs. La tension instantanée Δv_R aux bornes de la résistance est donnée par la loi d'Ohm : $\Delta v_R = Ri$. D'après l'équation 12.1, cette tension peut s'exprimer en fonction du temps comme

Tension en fonction du temps aux bornes d'une résistance

$$\Delta v_R = \Delta v_{R0} \sin(\omega t) \tag{12.3}$$

où la valeur maximale est

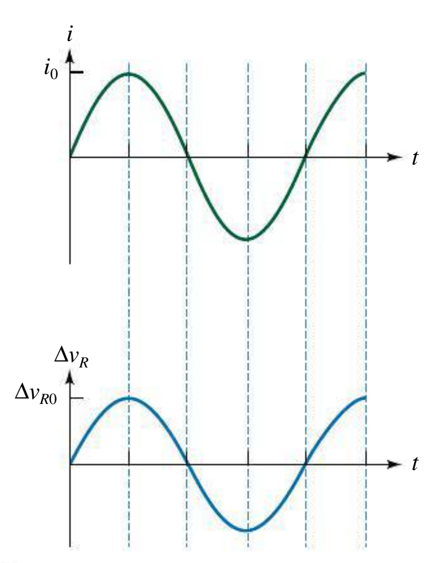
$$\Delta v_{R0} = Ri_0 \tag{12.4}$$

En comparant les équations 12.1 et 12.3, on constate que le courant et la tension aux bornes d'une résistance sont en phase ($\phi = 0$), comme le montre la figure 12.3.

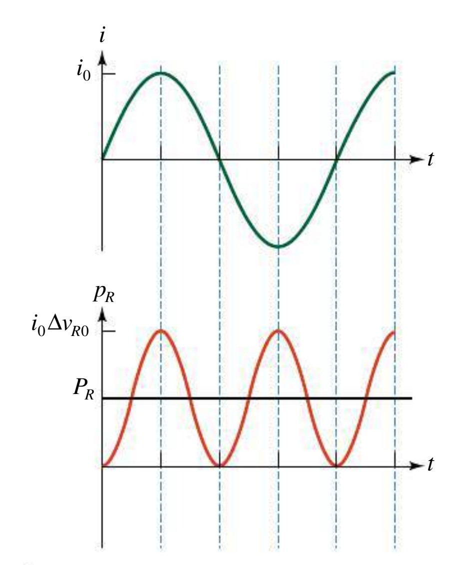
La puissance instantanée p_R associée à la dissipation thermique dans la résistance est

$$p_R = Ri^2 = Ri_0^2 \sin^2(\omega t)$$

Les équations 12.3, 12.4 et l'équation pour p_R sont valables pour toute résistance traversée par un courant sinusoïdal, même si on ajoute des éléments de circuit supplémentaires comme un condensateur et un inducteur. La seule différence est que la tension aux bornes de la source n'est plus égale à Δv_R.



▲ **Figure 12.3**
La valeur instantanée i du courant et la tension instantanée Δv_R sont en phase.



▲ **Figure 12.4**
La puissance moyenne fournie à une résistance est la moitié de la puissance instantanée maximale.

L'équation que nous venons d'obtenir pour la puissance instantanée ne permet pas d'évaluer directement l'énergie que la résistance dissipe à long terme. Pour ce faire, il est plus utile de déterminer la puissance *moyenne* P_R (figure 12.4). Celle-ci peut être obtenue grâce à l'identité trigonométrique $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$. La moyenne de $\cos 2\theta$ sur un cycle complet étant nulle, la moyenne de $\sin^2\theta$ sur un cycle complet vaut tout simplement $\frac{1}{2}$*. La **puissance moyenne** $P_R = p_{R\text{moy}}$ est donc

$$P_R = R(i^2)_{\text{moy}} = \frac{Ri_0^2}{2} \qquad (12.5a)$$

On note que P_R est proportionnelle à la valeur moyenne de i^2 et non au carré de la valeur moyenne de i. En effet, la valeur moyenne de i sur un cycle complet est nulle. Du point de vue physique, une perte d'énergie en dissipation thermique doit se produire dans la résistance, indépendamment du sens du courant, et la proportionnalité à i^2 correspond à cette idée puisque ce dernier facteur est toujours positif.

Les valeurs efficaces

L'équation 12.5*a* a une forme légèrement différente de l'équation $P = RI^2$ utilisée quand le courant est continu. Nous allons maintenant définir de nouvelles grandeurs *constantes* I et ΔV_R, appelée *valeurs efficaces*, qui permettront d'utiliser une équation identique, c'est-à-dire de reformuler l'équation 12.5*a* sous la forme

Puissance moyenne ou efficace dissipée dans une résistance

$$P_R = RI^2 \qquad (12.5b)$$

L'équation 12.5*b* peut également s'écrire sous la forme $P_R = \Delta V_R^2/R = I\Delta V_R$. Dans ce contexte, la puissance moyenne est parfois aussi appelée **puissance efficace**. Nous allons utiliser les lettres majuscules I, ΔV et P pour désigner les valeurs efficaces du courant, de la tension et de la puissance.

Pour relier les valeurs efficaces aux valeurs déjà connues, il suffit de comparer les équations 12.5*a* et 12.5*b*. En posant

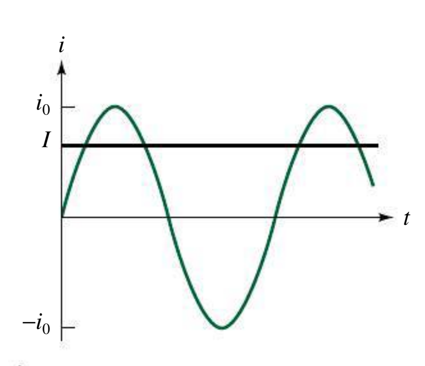
$$RI^2 = \frac{Ri_0^2}{2}$$

on obtient

Courant efficace

$$I = \sqrt{(i^2)_{\text{moy}}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 i_0 \qquad (12.6a)$$

On note que la valeur efficace I est la racine carrée de la valeur moyenne de i^2, aussi appelée valeur quadratique moyenne. Ce **courant efficace** est illustré à la figure 12.5, où on voit qu'il représente une valeur *constante dans le temps*, proportionnelle à i_0.



▲ **Figure 12.5**
La valeur efficace I du courant est liée à la valeur maximale i_0 du courant instantané par la relation $I = i_0/\sqrt{2} \approx 0{,}707 i_0$.

* En règle générale, la valeur moyenne d'une fonction $F(t)$ sur une période T est donnée par $F_{\text{moy}} = (1/T)\int_0^T F(t)\,dt$. Dans le cas présent, $F(t) = i_0^2 \sin^2(\omega t) = i_0^2(1 - \cos 2\omega t)/2$.

Puisque l'équation 12.5*b* peut aussi s'écrire $P = I\Delta V_R$, la tension efficace aux bornes de la résistance est donnée par

Tension efficace aux bornes de la résistance

$$\Delta V_R = \sqrt{(\Delta v_R^2)_{\text{moy}}} = \frac{\Delta v_{R0}}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\Delta v_{R0} \qquad (12.6b)$$

Les valeurs efficaces du courant dans une résistance et de la tension à ses bornes ne diffèrent de leurs valeurs instantanées maximales que par le même facteur $\sqrt{2}$. Cela présente l'avantage que d'autres équations valables pour le courant continu pourront aussi relier les valeurs efficaces. Par exemple, l'équation 12.4 peut également s'écrire sous la forme

$$\Delta V_R = RI \qquad (12.7)$$

Malgré une analogie évidente, cette équation n'est *pas* la loi d'Ohm : elle ne relie que les valeurs efficaces, alors que la loi d'Ohm relie les valeurs instantanées à chaque instant.

Jusqu'ici, nous avons considéré la résistance, mais tous les éléments d'un circuit *RLC* ont une tension à leurs bornes. Si celle-ci varie de façon sinusoïdale, on peut définir une valeur efficace qui est reliée à sa valeur instantanée maximale (amplitude) par une équation identique à l'équation 12.6*b* : $\Delta V_L = \Delta v_{L0}/\sqrt{2}$, $\Delta V_C = \Delta v_{C0}/\sqrt{2}$, etc. De même, aux bornes de la source, on a $\Delta V = \Delta v_0/\sqrt{2}$.

Valeurs efficaces et instruments de mesure

En conclusion, l'utilité principale des valeurs efficaces est de permettre de calculer la puissance moyenne en utilisant les mêmes expressions que celles de la puissance électrique en courant continu, à condition d'utiliser les valeurs efficaces du courant ou de la tension. En somme, l'intensité efficace *I* du courant est équivalente au courant c.c. qui produirait le même taux de dissipation thermique moyen que le courant alternatif. En raison de cet aspect pratique, la plupart des ampèremètres et des voltmètres sont calibrés pour afficher des *valeurs efficaces* lorsqu'on sélectionne leur mode c.a.

Comme nous le verrons, même si un circuit comporte aussi des condensateurs et des inducteurs, ces éléments de circuit ne dissipent pas d'énergie : ils l'accumulent et la restituent. Par conséquent, la seule énergie que la source de f.é.m. doit fournir en moyenne sur un cycle est celle qui est dissipée dans la résistance, donnée par l'équation 12.5*b*.

Exemple 12.1

Une ampoule électrique utilise une puissance efficace de 100 W lorsqu'on la branche sur une prise murale dont la tension efficace est de 120 V. Déterminer : (a) la résistance de l'ampoule quand elle fonctionne ; (b) la tension maximale de la source ; (c) la valeur efficace de l'intensité du courant qui circule dans l'ampoule ; (d) la valeur maximale du courant ; (e) la valeur maximale de la puissance instantanée.

Solution

(a) On nous donne $P_R = 100$ W et $\Delta V_R = 120$ V. La résistance de fonctionnement est donnée par

$$R = \frac{\Delta V_R^2}{P_R} = 144\ \Omega$$

(b) D'après l'équation 12.6*b*, la tension maximale de la source est

$$\Delta v_0 = \sqrt{2}\Delta V = 170\ \text{V}$$

La tension instantanée oscille entre –170 V et +170 V.

(c) Puisque $P_R = I\Delta V_R$, on a

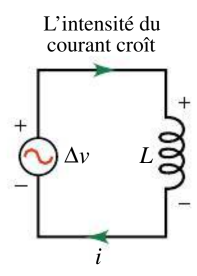
$$I = \frac{P_R}{\Delta V_R} = \frac{(100\ \text{W})}{(120\ \text{V})} = 0{,}833\ \text{A}$$

(d) L'intensité maximale du courant est $i_0 = \sqrt{2}I = 1{,}18$ A. Le courant instantané oscille donc entre −1,18 A et +1,18 A.

(e) La valeur maximale de la puissance instantanée est $p_{R0} = Ri_0^2 = (144\ \Omega)(1{,}18\ \text{A})^2 = 200$ W. La puissance instantanée oscille entre 0 W et 200 W, conformément à la figure 12.4 (p. 488), et non entre −200 W et +200 W, ce qui n'aurait aucun sens pour une résistance. Notons que $p_{R0} = 2P_R$.

12.3 LA BOBINE IDÉALE DANS UN CIRCUIT C.A.

La figure 12.6 illustre une bobine idéale qui est traversée par un courant i dont l'intensité est en train de croître et qui circule dans le sens indiqué. Tel qu'illustré, la polarité de Δv_L est telle que la bobine tente de s'opposer à l'augmentation du courant. Selon la loi des mailles, $\Delta v - \Delta v_L = 0$, ce qui permet de remarquer que la figure illustre les polarités des tensions et le sens du courant dans le cas où ils sont tous trois positifs.



▲ **Figure 12.6**
Une bobine d'induction dans un circuit c.a.

On obtiendrait une tension Δv_L ayant la même polarité si le courant circulait dans le sens négatif ($i < 0$), mais que son intensité était en train de décroître (on a alors $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t > 0$, car i est négatif). Dans les deux cas, on doit donc écrire

$$\Delta v_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \tag{12.8}$$

L'équation 12.8 ne contredit pas l'équation 11.5 qui porte un signe *moins* en vertu de la convention de signes de la loi de Faraday. L'expression utilisée ici est en accord avec la convention de signes établie à la section 12.1 (voir la figure 12.1, p. 487). Comme nous l'avions annoncé alors, l'équation 12.8 n'est valable que si on évalue la dérivée $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ en tenant compte du signe de i. Ainsi, $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t > 0$ ne désigne pas forcément un courant dont l'intensité augmente, mais peut aussi désigner un courant négatif dont l'intensité diminue.

En dérivant l'équation 12.1, on obtient le taux de variation du courant

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = i_0\omega\cos(\omega t)$$

donc

$$\Delta v_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \Delta v_{L0}\cos(\omega t) \tag{12.9}$$

où la valeur maximale est

$$\Delta v_{L0} = i_0\omega L \tag{12.10}$$

Puisque $\cos(\omega t) = \sin(\omega t + \pi/2)$ (voir les rappels mathématiques de l'annexe B), l'équation 12.9 peut être réécrite comme

Tension en fonction du temps aux bornes d'une bobine idéale

$$\Delta v_L = \Delta v_{L0}\sin(\omega t + \tfrac{\pi}{2}) \tag{12.11}$$

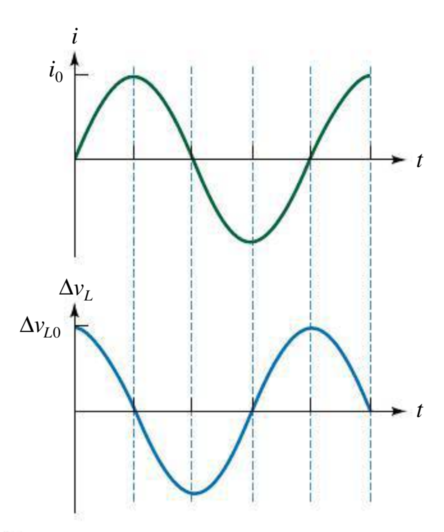
L'équation 12.11 montre que la constante de phase* est $\phi = +\pi/2$, ce qui signifie que Δv_L est déphasé d'un quart de cycle par rapport au courant. Dans le contexte de notre choix de convention de signes, on peut préciser que Δv_L est *en avance* d'un quart de cycle sur i. La tension Δv_L atteint sa valeur maximale un quart de cycle avant le courant (figure 12.7) parce que Δv_L n'est pas proportionnel au courant, mais à son taux de variation $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$. Par exemple, Δv_L prend sa valeur maximale lorsque $i = 0$ parce que $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ est maximal à cet instant.

D'après les équations 12.1 et 12.9, la puissance instantanée fournie à la bobine est

$$p_L = i\Delta v_L = i_0 \Delta v_{L0} \sin(\omega t)\cos(\omega t)$$

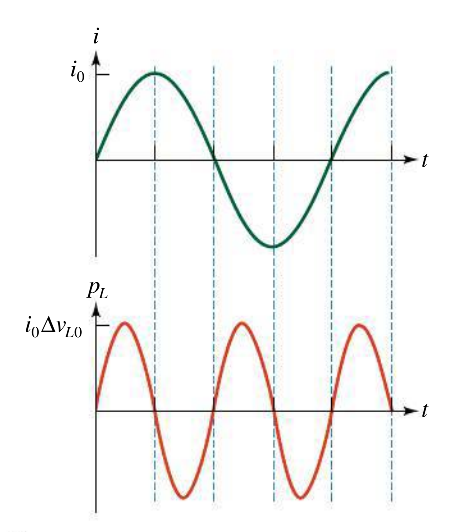
En utilisant l'identité $\sin 2\theta = 2 \sin\theta \cos\theta$, on voit que la puissance moyenne sur un cycle complet est nulle, puisque la moyenne de $\sin 2\theta$ est nulle (figure 12.8). *L'énergie emmagasinée par la bobine idéale pendant un quart de cycle est restituée durant le quart de cycle suivant.*

Les équations 12.10, 12.11 et l'équation pour p_L sont valables pour toute bobine idéale traversée par un courant sinusoïdal, même si on ajoute des éléments de circuit supplémentaires comme un condensateur et une résistance. La seule différence est que la tension aux bornes de la source n'est plus égale à Δv_L.



▲ **Figure 12.7**

La tension instantanée Δv_L aux bornes de la bobine est *en avance* de $\pi/2$ rad sur le courant instantané i.



▲ **Figure 12.8**

La puissance moyenne fournie à une bobine est nulle.

L'impédance inductive

On peut écrire l'équation 12.10 sous une forme analogue à la loi d'Ohm :

$$\Delta v_{L0} = Z_L i_0 \quad \text{ou} \quad \Delta V_L = Z_L I \qquad (12.12)$$

où la deuxième version de l'équation fait appel aux valeurs efficaces Δv_L et I. Dans l'équation 12.12, la quantité

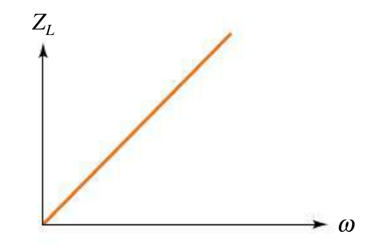
Impédance inductive

$$Z_L = \omega L \qquad (12.13)$$

* Bien que cet angle corresponde à $\phi = +90°$, il faut obligatoirement l'exprimer en radians, car ω est exprimé en radians par seconde. Si on exprimait la constante de phase en degrés, il faudrait alors convertir ω en degrés par seconde et il ne vaudrait plus $2\pi f$!

est l'**impédance*** de la bobine idéale. L'unité SI d'impédance est l'ohm. L'impédance d'un élément de circuit indique dans quelle mesure il s'oppose à la circulation du courant c.a. Comme le suggère l'équation 12.12, l'impédance joue dans un circuit c.a. un rôle similaire à celui de la résistance dans un circuit c.c. L'impédance d'un élément nous renseigne sur la tension c.a. qui doit lui être appliquée, à une fréquence donnée, pour faire circuler dans le circuit un courant c.a. égal à l'unité. Toutefois, comme nous le verrons plus loin, l'impédance n'est pas nécessairement associée à de l'énergie dissipée dans cet élément de circuit. On remarquera que l'équation 12.12 n'est *pas* valable pour le courant instantané i et la tension instantanée Δv_L: $\Delta v_L(t) \neq Z_L i(t)$. En effet, le courant instantané et la tension instantanée ne sont pas en phase. L'équation 12.12 fait intervenir les valeurs *maximales* ou les valeurs *efficaces*.

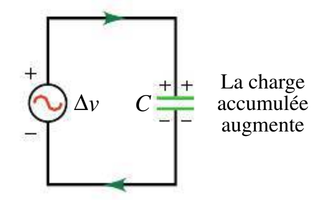
Voyons maintenant comment on peut interpréter l'équation 12.13 de façon qualitative. À la section 11.6, nous avons vu qu'il existe une analogie entre l'inductance et l'inertie mécanique, qui est liée au fait que L mesure l'opposition à une variation de courant. Par conséquent, puisque l'impédance mesure une telle opposition dans un circuit c.a., il n'est pas surprenant que $Z_L \propto L$. Comme le taux de variation du courant $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ est proportionnel à ω, la tension aux bornes de la bobine, $\Delta v_L = L\,\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, est elle aussi proportionnelle à ω. Plus la fréquence angulaire est grande, plus la valeur de la f.é.m. induite s'opposant au courant est grande, et plus l'intensité du courant est faible dans le circuit. Il n'est donc pas surprenant d'obtenir aussi $Z_L \propto \omega$ (figure 12.9).



▲ **Figure 12.9**
L'impédance d'une bobine est directement proportionnelle à la fréquence angulaire ω.

12.4 LE CONDENSATEUR DANS UN CIRCUIT C.A.

La figure 12.10 représente un condensateur en train de se faire charger par un courant i qui circule dans le sens indiqué. Le condensateur porte une charge égale à $q = C\Delta v_C$, positive à l'instant illustré (on peut imaginer que q est la charge portée par l'armature du haut sur le schéma). Selon la loi des mailles, $\Delta v - \Delta v_C = 0$, ce qui permet de remarquer que la figure illustre les polarités des tensions et le sens du courant dans le cas où ils sont tous trois positifs.



▲ **Figure 12.10**
Un condensateur dans un circuit c.a.

Le courant circulant dans le circuit (attention, *pas* dans le condensateur !) charge les armatures, de sorte que

$$i = +\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \tag{12.14}$$

L'équation 12.14 demeure valable quand la polarité aux bornes du condensateur est inversée, puisque q est alors considéré comme négatif, et demeure valable quand le courant s'inverse, pourvu que l'on calcule toujours $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t$ en tenant compte du signe de q. Ainsi, $\mathrm{d}q/\mathrm{d}t > 0$ ne désigne pas forcément un condensateur en train de se faire charger, mais peut aussi désigner un condensateur en train de se faire décharger, mais dont la polarité est inversée ($q < 0$).

D'après l'équation 12.14, $\mathrm{d}q = i\mathrm{d}t$. En substituant le courant donné par l'équation 12.1, on a donc

$$\begin{aligned} q &= \int i\,\mathrm{d}t = \int i_0 \sin(\omega t)\mathrm{d}t \\ &= -\frac{i_0}{\omega}\cos(\omega t) + D \end{aligned}$$

* On utilise parfois le terme *réactance* et le symbole X pour désigner l'impédance d'un circuit qui ne contient que des bobines ou que des condensateurs.

où D est une constante. Cette constante dépend des conditions initiales et nous pouvons la choisir égale à zéro. La tension instantanée aux bornes du condensateur étant $\Delta v_C = q/C$, on obtient

$$\Delta v_C = -\Delta v_{C0} \cos(\omega t) \qquad (12.15)$$

où la valeur maximale est

$$\Delta v_{C0} = i_0 \frac{1}{\omega C} \qquad (12.16)$$

Puisque $-\cos(\omega t) = \sin(\omega t - \pi/2)$ (voir les rappels mathématiques de l'annexe B), l'équation 12.15 peut être réécrite comme

Tension en fonction du temps aux bornes d'un condensateur

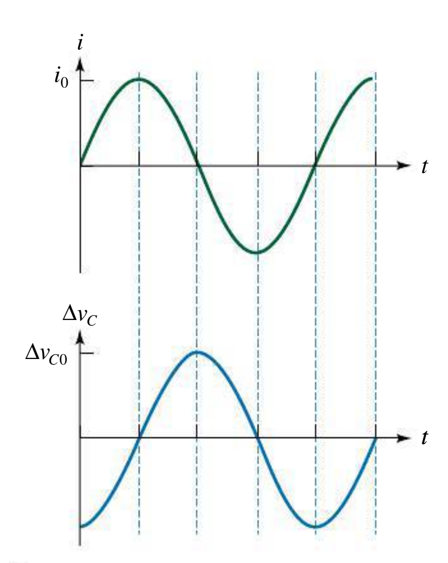
$$\Delta v_C = \Delta v_{C0} \sin(\omega t - \tfrac{\pi}{2}) \qquad (12.17)$$

L'équation 12.17 montre que la constante de phase ϕ est $-\pi/2$, ce qui signifie que Δv_C est déphasé d'un quart de cycle par rapport au courant. Dans le contexte de notre choix de convention de signes, on peut préciser que Δv_C est *en retard* d'un quart de cycle sur i. La tension Δv_C atteint sa valeur maximale un quart de cycle après le courant (figure 12.11) parce que Δv_C n'est pas proportionnel au courant, mais à la charge q. Par exemple, Δv_C prend sa valeur maximale lorsque $i = 0$ parce que c'est l'instant où le courant cesse d'ajouter de la charge supplémentaire sur le condensateur.

D'après les équations 12.1 et 12.15, la puissance instantanée fournie au condensateur est

$$p_C = i\Delta v_C = -i_0 \Delta v_{C0} \sin(\omega t) \cos(\omega t)$$

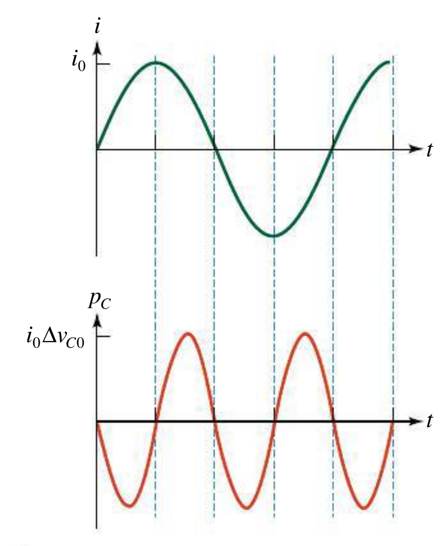
Comme pour la bobine, la puissance moyenne est nulle (figure 12.12). *L'énergie emmagasinée par le condensateur pendant chaque quart de cycle est restituée durant le quart de cycle suivant.*





▲ **Figure 12.11**

La tension instantanée Δv_C aux bornes du condensateur est *en retard* de $\pi/2$ rad sur le courant instantané i.



▲ **Figure 12.12**

La puissance moyenne fournie à un condensateur est nulle.

Les équations 12.16, 12.17 et l'équation pour p_C sont valables pour tout condensateur dans un circuit où circule un courant sinusoïdal, même si on ajoute des éléments de circuit supplémentaires comme une résistance et un inducteur. La seule différence est que la tension aux bornes de la source n'est plus égale à Δv_C.

L'impédance capacitive

On peut écrire l'équation 12.16 sous une forme analogue à la loi d'Ohm :

$$\Delta v_{C0} = Z_C i_0 \quad \text{ou} \quad \Delta V_C = Z_C I \qquad (12.18)$$

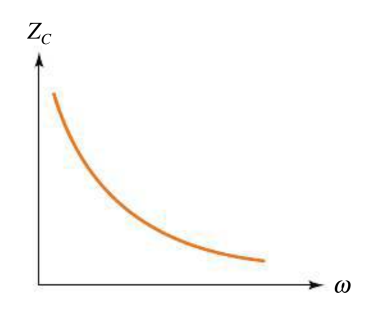
où la deuxième version de l'équation fait appel aux valeurs efficaces ΔV_C et I. Dans l'équation 12.18, la quantité

Impédance capacitive

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} \qquad (12.19)$$

est l'impédance du condensateur. Cette grandeur joue le même rôle dans le cas d'un condensateur que celui joué par l'impédance inductive dans le cas d'une bobine idéale. En outre, on note que l'équation 12.18 n'est *pas* valable pour le courant instantané i et la tension instantanée Δv_C : $\Delta v_C(t) \neq Z_L i(t)$. En effet, le courant instantané et la tension instantanée ne sont pas en phase. L'équation 12.18 fait intervenir les valeurs *maximales* ou les valeurs *efficaces*.

Voyons maintenant comment on peut interpréter l'équation 12.19 de façon qualitative. Remarquons tout d'abord que $Z_C \to \infty$ quand $\omega = 0$, ce qui est vraisemblable puisqu'un condensateur ne laisse pas passer le courant continu. (Un courant c.c. variable dans le temps circule dans le circuit durant la charge ou la décharge d'un condensateur, mais décroît rapidement vers zéro.) Considérons un courant qui passe de 0 à sa valeur maximale i_0, puis revient à une valeur nulle. Plus la fréquence ω est faible, plus longtemps dure ce processus, plus il y a de charge qui circule vers le condensateur et plus Δv_{C0} est élevée. Il est donc logique qu'on obtienne $Z_C \propto 1/\omega$ (figure 12.13). De même, si on recommence le processus avec un condensateur de plus grande capacité, la même quantité de charge fera moins croître la tension q/C à ses bornes. Il est donc logique d'obtenir aussi $Z_C \propto 1/C$.



▲ **Figure 12.13**
L'impédance d'un condensateur est inversement proportionnelle à la fréquence angulaire ω.

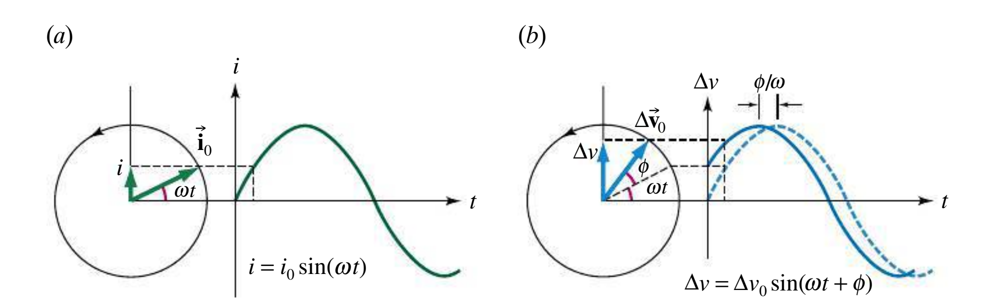
12.5 LA REPRÉSENTATION DE FRESNEL

Il est facile de déterminer le déphasage entre le courant et la tension pour un seul condensateur ou une seule bobine. Mais lorsqu'un circuit comporte plusieurs de ces éléments associés, nous avons besoin de moyens analytiques plus puissants. Une de ces techniques est la **représentation de Fresnel** qui fait intervenir des **vecteurs tournants** ou **phaseurs**.

Chaque vecteur tournant sert à représenter une grandeur qui varie sinusoïdalement dans le temps. Par exemple, la fonction $i = i_0 \sin(\omega t)$ peut être représentée par un vecteur $\vec{\mathbf{i}}_0$ qui tourne dans le sens antihoraire avec la fréquence

▶ Figure 12.14

(*a*) Pendant la rotation du vecteur de Fresnel $\vec{\mathbf{i}}_0$ représentant le courant, sa composante « verticale » représente l'intensité du courant instantané *i*.
(*b*) Le vecteur de Fresnel $\Delta\vec{\mathbf{v}}_0$ représentant la tension est déphasé d'un angle ϕ par rapport au vecteur représentant le courant.



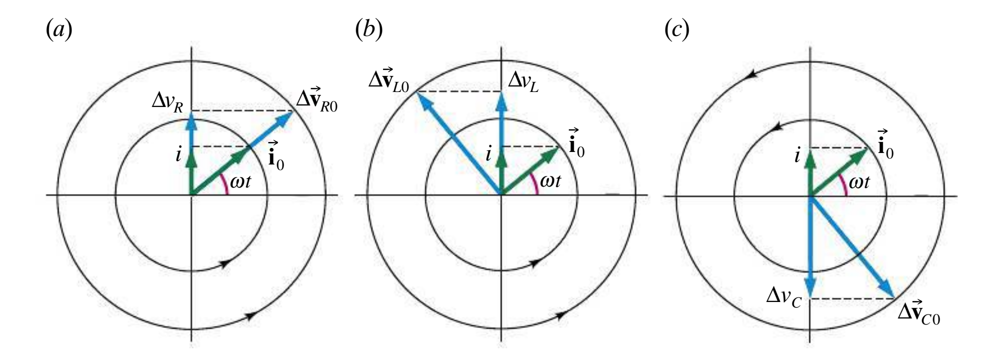
angulaire ω. Comme le montre la figure 12.14*a*, ce vecteur a pour longueur la valeur maximale i_0 de la fonction. Pendant qu'il tourne, il forme avec l'horizontale un angle ωt (croissant), donc sa composante selon l'axe « vertical » représente la valeur instantanée du courant. La figure 12.14*b* montre comment obtenir la fonction $\Delta v = \Delta v_0 \sin(\omega t + \phi)$. L'orientation du vecteur tournant $\Delta\vec{\mathbf{v}}_0$ à $t = 0$ est déterminée par la constante de phase ϕ. En effet, à cet instant, $\omega t = 0$ et l'angle que forme alors le vecteur avec l'horizontale *est* la constante de phase.

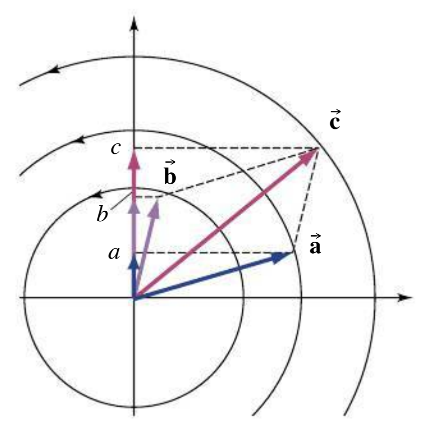
Soulignons que les vecteurs de Fresnel ne peuvent que représenter des grandeurs, comme le courant ou la tension, qui ne sont *pas* elles-mêmes des grandeurs vectorielles. Par contre, chacune des composantes d'une grandeur vectorielle peut être représentée par un vecteur de Fresnel.

La figure 12.15 représente les déphasages trouvés dans les trois sections précédentes entre le courant $i = i_0 \sin(\omega t)$ et la tension $\Delta v_X = \Delta v_{X0} \sin(\omega t + \phi)$ aux bornes de trois types $X = \{R,L,C\}$ d'éléments de circuit. Rappelons qu'un déphasage *positif* signifie que la tension est *en avance* sur le courant, ce dont on peut juger ici en constatant que son phaseur atteint un angle donné *avant* celui du courant. Comme on l'a vu précédemment, $\phi = 0$ pour une résistance, $\phi = +\pi/2$ pour une bobine et $\phi = -\pi/2$ pour un condensateur.

▶ Figure 12.15

Les déphasages entre le courant instantané et la tension instantanée pour (*a*) une résistance ; (*b*) une bobine ; (*c*) un condensateur.





▲ Figure 12.16

Les vecteurs de Fresnel permettent de trouver l'amplitude et la constante de phase d'une fonction sinusoïdale qui correspond à la somme de plusieurs fonctions sinusoïdales. Ici, la composante « verticale » du vecteur $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ correspond à la somme des sinusoïdes représentées par $\vec{\mathbf{a}}$ et $\vec{\mathbf{b}}$.

L'addition de vecteurs tournants

Soit les variables *a* et *b* qui peuvent être des tensions ou n'importe quelle grandeur physique qui oscille dans le temps de façon sinusoïdale. Si la fréquence des deux oscillations est la même, on sait que la somme $c = a + b$ oscillera aussi avec la même fréquence, mais avec quelle amplitude et quelle phase ?

La représentation de Fresnel permet de répondre à cette question. On représente sur un même **diagramme de Fresnel** (figure 12.16) le vecteur tournant $\vec{\mathbf{a}}$ dont la composante « verticale » est $a = a_0 \sin(\omega t + \phi_a)$, de même que le vecteur tournant $\vec{\mathbf{b}}$ dont la composante « verticale » est $b = b_0 \sin(\omega t + \phi_b)$. Le vecteur résultant $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ a une composante « verticale » qui est la somme des composantes « verticales » de $\vec{\mathbf{a}}$ et de $\vec{\mathbf{b}}$. Il suffit donc de trouver la longueur et l'orientation de ce vecteur, par une addition vectorielle habituelle, pour déterminer c_0 et ϕ_c, l'amplitude et la constante de phase de $c = c_0 \sin(\omega t + \phi_c)$.

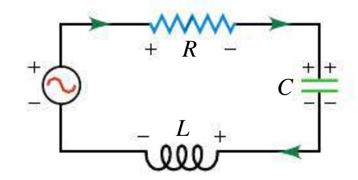
Soulignons que la notation $\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} + \vec{\mathbf{b}}$ *ne signifie pas* que les valeurs maximales vérifient $c_0 = a_0 + b_0$, comme on le constate facilement sur la figure 12.16 en comparant la longueur des vecteurs. La somme $c = a + b$ s'applique aux valeurs instantanées qu'on voit sur l'axe «vertical».

À la section suivante, nous utiliserons les vecteurs de Fresnel de cette façon pour additionner les tensions qui apparaissent dans la loi des mailles ou pour additionner les courants qui apparaissent dans la loi des nœuds.

12.6 LES CIRCUITS *RLC*

Le circuit *RLC* série

Nous allons maintenant considérer un circuit comprenant une résistance, une bobine et un condensateur, tous en série avec une source de tension sinusoïdale (figure 12.17). Nous cherchons à déterminer le courant instantané et son déphasage avec la tension alternative appliquée Δv. Le courant instantané $i = i_0 \sin(\omega t)$ est le *même* en tout point du circuit, puisque celui-ci ne comporte aucun nœud.



▲ **Figure 12.17**

Un circuit *RLC* série. Sur cette figure, toutes les polarités sont considérées comme positives, ce qui ne se produit *jamais* simultanément.

La figure 12.17 illustre les polarités des tensions et le sens du courant qui sont par convention *positifs*; il faut cependant noter qu'à *aucun* instant on ne trouve que des polarités positives dans le circuit, puisque Δv_L a la polarité illustrée si $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t > 0$ (voir la figure 12.7, p. 492), alors que Δv_C a la polarité illustrée si $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t < 0$ (voir la figure 12.11, p. 494).

Puisque la convention de signes adoptée est celle définie à la section 12.1 (voir la figure 12.1, p. 487), la loi des mailles relie les tensions instantanées, positives ou négatives, de la façon suivante:

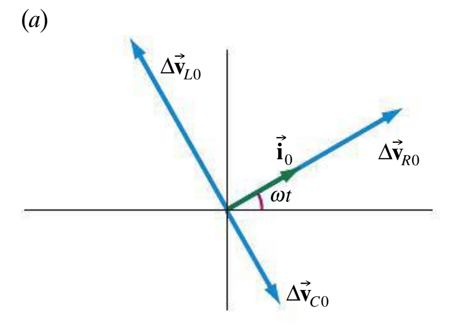
$$\Delta v - \Delta v_R - \Delta v_L - \Delta v_C = 0$$

Comme l'illustrera l'exemple 12.3, l'équation ci-dessus n'est valable que pour les tensions instantanées (et non pour les valeurs maximales). Or, chaque terme de la somme $\Delta v = \Delta v_R + \Delta v_L + \Delta v_C$ est une sinusoïde qui a une phase différente par rapport au courant. On sait que la somme a la forme de l'équation 12.2, $\Delta v(t) = \Delta v_0 \sin(\omega t + \phi)$, et il reste à déterminer Δv_0 et ϕ. Pour ce faire, nous devons donc trouver la somme (vectorielle) des vecteurs tournants représentant les tensions:

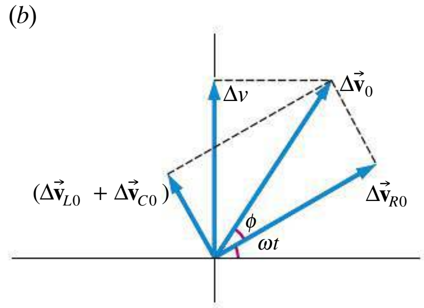
$$\Delta\vec{\mathbf{v}}_0 = \Delta\vec{\mathbf{v}}_{R0} + \Delta\vec{\mathbf{v}}_{L0} + \Delta\vec{\mathbf{v}}_{C0}$$

Puisque la composante «verticale» de $\Delta\vec{\mathbf{v}}_0$ représente la valeur instantanée Δv, la longueur de $\Delta\vec{\mathbf{v}}_0$ nous donne l'amplitude Δv_0, et l'angle entre $\Delta\vec{\mathbf{v}}_0$ et $\vec{\mathbf{i}}_0$ nous donne le déphasage ϕ entre la tension de la source et le courant.

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 12.18**

(*a*) Le vecteur tournant représentant le courant et ceux représentant la tension aux bornes de la résistance, du condensateur et de la bobine. (*b*) Le vecteur représentant la tension aux bornes de la source est $\Delta\vec{\mathbf{v}}_0 = \Delta\vec{\mathbf{v}}_{R0} + \Delta\vec{\mathbf{v}}_{L0} + \Delta\vec{\mathbf{v}}_{C0}$. Nous avons supposé que $\Delta v_{L0} > \Delta v_{C0}$; quand la situation inverse se produit, l'angle ϕ est négatif.

La figure 12.18*a* représente à un instant quelconque les vecteurs tournants correspondant aux tensions pour chacun des éléments, de même que le vecteur $\vec{\mathbf{i}}_0$ représentant le courant commun. On note sur cette figure que la tension aux bornes de la résistance est en phase avec le courant, ce que met en évidence le fait que ces deux vecteurs sont *superposés*. Pour tracer les deux autres vecteurs, on a supposé que Δv_{L0} est supérieur à Δv_{C0}, ce qui entraîne que l'angle ϕ est positif; la situation inverse peut aussi se produire, mais cela ne change pas le calcul qui suit.

Procédons à la somme vectorielle. À la figure 12.18*b*, $\|\Delta\vec{\mathbf{v}}_{L0} + \Delta\vec{\mathbf{v}}_{C0}\| = (\Delta v_{L0} - \Delta v_{C0})$. D'après le théorème de Pythagore, le carré du module de $\Delta\vec{\mathbf{v}}_0$ (c'est-à-dire le carré de la valeur maximale de la tension) est donné par

$$\begin{aligned}\Delta v_0^2 &= \Delta v_{R0}^2 + (\Delta v_{L0} - \Delta v_{C0})^2 \\ &= [R^2 + (Z_L - Z_C)^2] i_0^2\end{aligned}$$

Cela peut s'écrire sous une forme analogue à la loi d'Ohm :

Impédance et tension maximale et efficace

$$\Delta v_0 = Z i_0 \quad \text{ou} \quad \Delta V = ZI \tag{12.20}$$

où ΔV est la tension efficace appliquée par la source. La quantité

Impédance d'un circuit *RLC* série

$$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} \tag{12.21}$$

est l'*impédance* du circuit série, c'est-à-dire l'impédance aux bornes de la source de f.é.m. alternative.

Puisque la tension Δv_R est en phase avec le courant, $\Delta \vec{\mathbf{v}}_{R0}$ est toujours parallèle à $\vec{\mathbf{i}}_0$, donc l'angle ϕ de la figure 12.18*b* est aussi le déphasage entre $\Delta \vec{\mathbf{v}}_0$ et $\vec{\mathbf{i}}_0$. On voit d'après le diagramme sur cette figure que $\tan \phi = (\Delta v_{L0} - \Delta v_{C0})/\Delta v_{R0}$, ce qui revient à écrire

Déphasage dans un circuit *RLC* série

$$\tan \phi = \frac{Z_L - Z_C}{R} \tag{12.22}$$

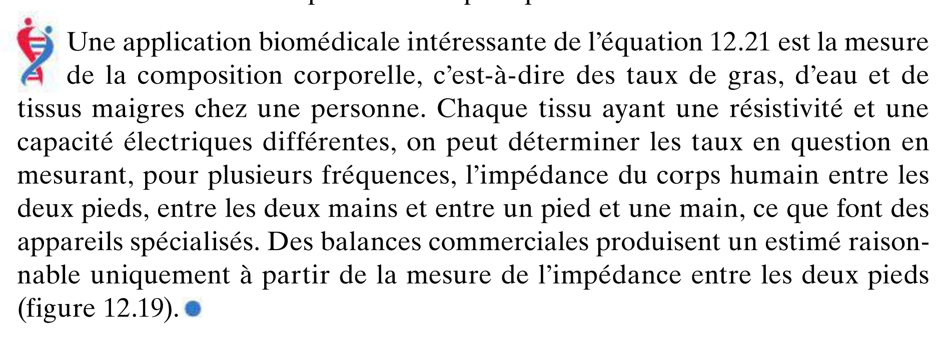
Une constante de phase ϕ positive, comme à la figure 12.18*b*, signifie que la tension de la source Δv est en avance de ϕ sur le courant i. Comme le montre l'équation 12.22, ce cas se produit quand $\Delta v_L > \Delta v_C$, c'est-à-dire quand $Z_L > Z_C$.

Les équations 12.21 et 12.22 sont valables exclusivement pour un circuit identique à celui illustré à la figure 12.17. Toutefois, il peut arriver qu'un circuit comporte plusieurs résistances (ou plusieurs condensateurs) pouvant être remplacées par une résistance équivalente (ou un condensateur équivalent). Il suffit alors d'appliquer les équations 12.21 et 12.22 en remplaçant R et C par $R_{éq}$ et $C_{éq}$. L'exemple 12.4 illustre notamment ce cas. De façon équivalente, on peut analyser n'importe quel circuit série en appliquant la loi des mailles où chaque terme est représenté par un vecteur tournant. On peut aussi calculer la différence de potentiel entre n'importe quels deux points d'une branche de circuit en additionnant les tensions aux bornes des éléments de circuit situés entre ces deux points, chacune étant représentée par un vecteur tournant. Pour un circuit parallèle, il faut plutôt appliquer la loi des nœuds et non la loi des mailles, comme nous le verrons après les exemples qui suivent.



▲ **Figure 12.19**

En mesurant l'impédance entre les deux pieds pour une gamme de fréquences, une balance Tanita évalue les taux de gras, d'eau et de tissus maigres.



Une application biomédicale intéressante de l'équation 12.21 est la mesure de la composition corporelle, c'est-à-dire des taux de gras, d'eau et de tissus maigres chez une personne. Chaque tissu ayant une résistivité et une capacité électriques différentes, on peut déterminer les taux en question en mesurant, pour plusieurs fréquences, l'impédance du corps humain entre les deux pieds, entre les deux mains et entre un pied et une main, ce que font des appareils spécialisés. Des balances commerciales produisent un estimé raisonnable uniquement à partir de la mesure de l'impédance entre les deux pieds (figure 12.19). ●

Exemple 12.2

Une source de f.é.m. alternative de fréquence 50 Hz et de tension maximale 100 V est placée dans un circuit *RLC* série où $R = 9\ \Omega$, $L = 0{,}04$ H et $C = 100\ \mu$F. Déterminer : (a) l'impédance du circuit ; (b) la constante de phase de la tension aux bornes de la source, en précisant si elle est en avance ou en retard sur le courant ; (c) la tension maximale aux bornes de chaque élément. (d) Illustrer à l'échelle les vecteurs de Fresnel représentant chacune de ces tensions.

Solution

(a) La fréquence angulaire est $\omega = 2\pi f = 100\pi$ rad/s. À cette fréquence, les impédances Z_L et Z_C sont

$$Z_L = \omega L = 4\pi = 12{,}6\ \Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{100}{\pi} = 31{,}8\ \Omega$$

D'après l'équation 12.21, l'impédance s'écrit

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$= \sqrt{81\ \Omega^2 + (-19{,}2\ \Omega)^2} = 21{,}2\ \Omega$$

(b) D'après l'équation 12.22, la constante de phase est donnée par

$$\tan\phi = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{-19{,}2\ \Omega}{9\ \Omega} = -2{,}13$$

Donc, $\phi = -1{,}31$ rad (ce qui correspond à $-64{,}8°$). Cela signifie que la tension de la source est en *retard* sur le courant.

(c) D'après l'équation 12.20, le courant maximal dans le circuit est

$$i_0 = \Delta v_0 / Z$$

$$= \frac{100\ \text{V}}{21{,}2\ \Omega} = 4{,}72\ \text{A}$$

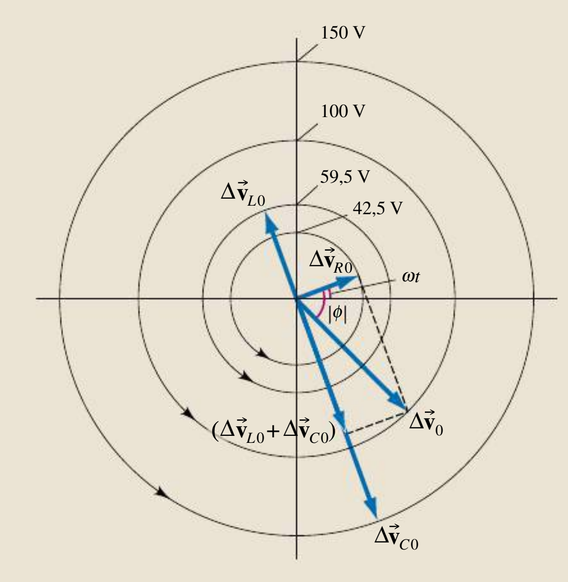
Il est le même pour tous les éléments. La tension maximale aux bornes de chaque élément autre que la source est donnée respectivement par les équations 12.4, 12.12 et 12.18, soit

$$\Delta v_{R0} = Ri_0 = 42{,}5\ \text{V}$$
$$\Delta v_{L0} = Z_L i_0 = 59{,}5\ \text{V}$$
$$\Delta v_{C0} = Z_C i_0 = 150\ \text{V}$$

On voit donc que $\Delta v_0 \neq \Delta v_{R0} + \Delta v_{L0} + \Delta v_{C0}$. On note même que le maximum de la tension aux bornes du condensateur est *supérieur* au maximum de la tension aux bornes de la source. La loi des mailles est tout de même vérifiée, puisque la tension aux bornes de la bobine est toujours de polarité inverse à celle du condensateur (différence de phase de π rad, soit 180°). ■

(d) Les vecteurs $\Delta\vec{\mathbf{v}}_{R0}$, $\Delta\vec{\mathbf{v}}_{L0}$ et $\Delta\vec{\mathbf{v}}_{C0}$ ont respectivement pour longueur les trois valeurs maximales de tension obtenues en (c). De plus, la rotation des vecteurs de Fresnel se faisant en sens antihoraire, l'avance de $\pi/2$ rad de $\Delta\vec{\mathbf{v}}_{L0}$ par rapport à $\Delta\vec{\mathbf{v}}_{R0}$ se traduit par le fait que son angle avec l'horizontale est supérieur de 90° à celui de $\Delta\vec{\mathbf{v}}_{R0}$ (et inversement pour $\Delta\vec{\mathbf{v}}_{C0}$). La figure 12.20 illustre ces vecteurs ainsi que leur résultante $\Delta\vec{\mathbf{v}}_0$. (Vérifiez chaque valeur numérique.)

On note que la résultante a bel et bien une longueur de 100 V et que son angle avec l'horizontale est *inférieur* à celui du courant (donc de $\Delta\vec{\mathbf{v}}_{R0}$). Cela correspond bien à la constante de phase $\phi < 0$ calculée en (b). ■



▲ **Figure 12.20**

La résultante des vecteurs de Fresnel qui représentent les tensions aux bornes des trois éléments du circuit a bel et bien une longueur de 100 V, et on note qu'elle est en retard sur le courant.

Exemple 12.3

Dans le circuit *RLC* série de l'exemple précédent, on a déterminé qu'à une fréquence angulaire de $\omega = 100\pi$ rad/s et avec $\Delta v_0 = 100$ V, on a $\Delta v_{R0} = 42{,}5$ V, $\Delta v_{L0} = 59{,}5$ V, $\Delta v_{C0} = 150$ V et $\phi = -1{,}13$ rad. (a) Écrire l'équation de la tension en fonction du temps aux bornes de chaque élément de circuit. Utiliser ces équations pour vérifier la loi des mailles pour chacun des instants suivants, exprimés en fonction de la période T : (b) $t = 0$; (c) $t = T/8$; (d) $t = 2T/8$; (e) $t = 3T/8$; (f) $t = 4T/8$. (g) Pour chacun de ces instants, illustrer les polarités

sur un schéma du circuit; comparer le résultat obtenu avec la figure 11.11 (p. 469).

Solution

(a) La tension instantanée Δv_R est en phase avec le courant (équation 12.1), donc vaut

$$\Delta v_R = 42{,}5 \sin(100\pi t)$$

Les tensions aux bornes de L et de C sont respectivement en avance et en retard de $\pi/2$ rad sur le courant, d'où

$$\Delta v_L = 59{,}5 \sin(100\pi t + \pi/2)$$

$$\Delta v_C = 150 \sin(100\pi t - \pi/2)$$

Enfin, la tension aux bornes de la source retarde de $|\phi| = 1{,}13$ rad (soit 64,8°) sur le courant, d'où

$$\Delta v = 100 \sin(100\pi t - 1{,}13)$$

Dans chacune de ces équations, la tension est en volts et t est en secondes.

(b) Puisque $\omega t = 0$, on a facilement $\Delta v_R = 0$ V, $\Delta v_L = 59{,}5$ V, $\Delta v_C = -150$ V et $\Delta v = 100 \sin(-1{,}13) = -90{,}5$ V. Les polarités s'interprètent avec la convention de signes adoptée à la section 12.1, la figure 12.17 (p. 497) représentant les signes positifs. En utilisant les polarités ainsi déduites, illustrées à la figure 12.21*a*, on vérifie facilement la loi des mailles:

$$-90{,}5 \text{ V} - 0 + 150 \text{ V} - 59{,}5 \text{ V} = 0$$

On peut aussi substituer directement les tensions avec leur signe conventionnel dans $\Delta v - \Delta v_R - \Delta v_C - \Delta v_L = 0$: on vérifie que (−90,5 V) − (0) − (−150 V) − (59,5 V) donne bel et bien zéro.

(c) Il est inutile de calculer T: puisque $\omega = 2\pi/T$, on a $\omega t = 2\pi/8 = \pi/4$. Par substitution directe,

$$\begin{aligned}
\Delta v_R &= 42{,}5 \sin(\pi/4) &&= 30{,}1 \text{ V}\\
\Delta v_L &= 59{,}5 \sin(\pi/4 + \pi/2) &&= 42{,}1 \text{ V}\\
\Delta v_C &= 150 \sin(\pi/4 - \pi/2) &&= -106 \text{ V}\\
\Delta v &= 100 \sin(\pi/4 - 1{,}13) &&= -33{,}9 \text{ V}
\end{aligned}$$

En utilisant les polarités illustrées à la figure 12.21*b*, la loi des mailles donne:

$$-33{,}9 \text{ V} - 30{,}1 \text{ V} + 106 \text{ V} - 42{,}1 \text{ V} = 0$$

On peut aussi substituer directement les tensions avec leur signe conventionnel dans $\Delta v - \Delta v_R - \Delta v_C - \Delta v_L = 0$, d'où (−33,9 V) − (30,1 V) − (−106 V) − (42,1 V) = 0.

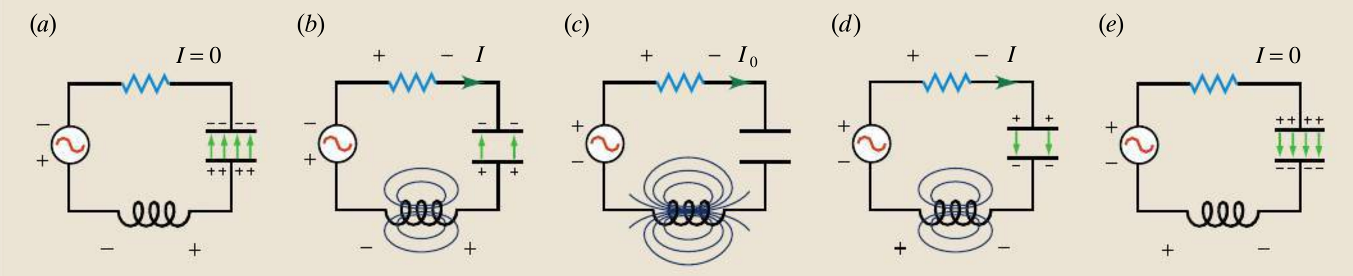
(d) Cette fois, $\omega t = \pi/2$, d'où $\Delta v_R = 42{,}5$ V, $\Delta v_L = 0$ V, $\Delta v_C = 0$ V et $\Delta v = 42{,}5$ V. La loi des mailles est vérifiée de façon évidente (figure 12.21*c*).

(e) À $t = 3T/8$, $\omega t = 3\pi/4$, d'où $\Delta v_R = 30{,}1$ V, $\Delta v_L = -42{,}1$ V, $\Delta v_C = 106$ V et $\Delta v = 94{,}1$ V. En utilisant les polarités illustrées à la figure 12.21*d*, on obtient bel et bien 94,1 V − 30,1 V − 106 V + 42,1 V = 0.

(f) On a $\omega t = \pi$, d'où $\Delta v_R = 0$ V, $\Delta v_L = -59{,}5$ V, $\Delta v_C = 150$ V et $\Delta v = 90{,}5$ V. En utilisant les polarités illustrées à la figure 12.21*e*, on obtient effectivement 90,5 V − 0 + 59,5 V − 150 V = 0.

(g) Les cas illustrés correspondent au demi-cycle pour lequel le courant est initialement nul, circule dans le sens positif, atteint un maximum, décroît puis redevient nul. La situation se répète ensuite avec le courant en sens inverse, pour le demi-cycle suivant (non illustré).

On remarque que le comportement du condensateur et de la bobine, schéma par schéma, est le même que celui des cinq premiers schémas de la figure 11.11 (p. 469). Ainsi, comme sur cette figure, le condensateur et la bobine ne font que s'échanger de l'énergie. Le rôle de la source est uniquement de compenser les pertes dans la résistance. ■



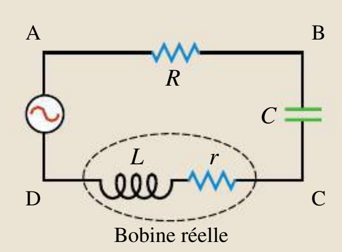
▲ **Figure 12.21**

Au cours d'un demi-cycle, le condensateur transmet son énergie à la bobine, qui la lui restitue ensuite. La source de f.é.m. ne sert qu'à compenser les pertes dans la résistance. (Comparez avec la figure 11.11, p. 469.)

Exemple 12.4

Le circuit RLC série illustré à la figure 12.22 contient une bobine réelle ayant une inductance $L = 0{,}08$ H et une résistance $r = 30\ \Omega$. Les autres éléments sont un condensateur ($C = 10\ \mu$F) et une résistance ($R = 50\ \Omega$).

La source a une tension maximale de 100 V et une fréquence de 200 Hz. (a) Quelle est la valeur maximale du courant ? Quelle tension mesurerait un voltmètre en mode c.a. s'il était relié : (b) entre les points A et B ; (c) entre les points C et D ; (d) entre les points B et D ; (e) entre les points A et D ? Dans chaque cas, donner aussi la valeur maximale atteinte par la tension.



▲ **Figure 12.22**

Quelles sont les tensions entre les différents points identifiés sur ce circuit ?

Solution

(a) La bobine réelle comporte une inductance et une résistance. La résistance de la bobine r et la résistance R sont en série, donc $R_{éq} = 80\ \Omega$. À la fréquence angulaire de $2\pi f = 400\pi$ rad/s, l'impédance qui correspond à la partie inductive de la bobine est

$$Z_L = \omega L = 100{,}5\ \Omega$$

et l'impédance du condensateur est

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = 79{,}58\ \Omega$$

Selon l'équation 12.21, l'impédance du circuit est

$$Z = \sqrt{R_{éq}^2 + (Z_L - Z_C)^2} = \sqrt{(80\ \Omega)^2 + (20{,}95\ \Omega)^2} = 82{,}7\ \Omega$$

La valeur maximale du courant est donc

$$i_0 = \Delta v_0/Z = (100\ \text{V})/(82{,}7\ \Omega) = 1{,}21\ \text{A}$$

Les tensions mesurées par un voltmètre en mode c.a. sont des tensions efficaces et non des tensions maximales. On a donc avantage à utiliser l'équation 12.6*a* pour convertir immédiatement le courant en valeur efficace : $I = 0{,}707 i_0 = 0{,}855$ A. ■

(b) Entre les points A et B, il y a uniquement la résistance R. La tension *efficace* mesurée entre ces points est donc $\Delta V_R = RI = 42{,}75$ V et la tension *maximale* est $\Delta v_{R0} = Ri_0 = 60{,}5$ V. On remarque que ces deux valeurs diffèrent d'un facteur $\sqrt{2}$ (voir le commentaire qui suit l'équation 12.6*b*).

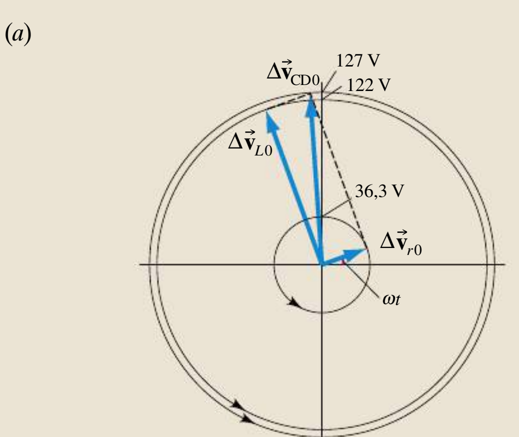
(c) Entre les points C et D, il y a la bobine réelle, c'est-à-dire un élément inductif L et un élément résistif r.

Pour obtenir la tension entre deux points d'un circuit, on procède comme au chapitre 7 : on part d'un point et on additionne les tensions jusqu'à ce que l'on parvienne à l'autre point, le chemin emprunté n'ayant aucune importance. La seule différence est que cette somme se fait ici *par l'addition de vecteurs de Fresnel* et non de nombres, car les tensions aux bornes des divers éléments de circuit ne sont pas en phase. ■

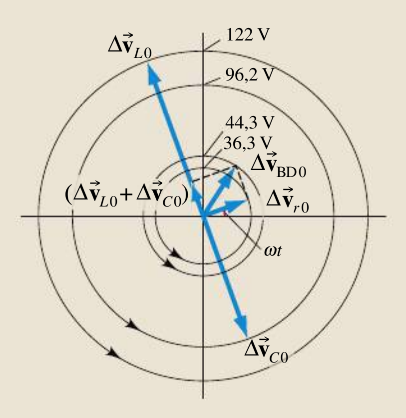
La figure 12.23*a* illustre la somme vectorielle appropriée. La longueur des vecteurs de Fresnel correspondant aux valeurs *maximales* des tensions, on obtient directement que la tension *maximale* entre les points C et D est

$$\Delta v_{CD0} = \sqrt{\Delta v_{L0}^2 + \Delta v_{r0}^2} = \sqrt{Z_L^2 + r^2}\, i_0 = \sqrt{(100{,}5\ \Omega)^2 + (30\ \Omega)^2}\,(1{,}21\ \text{A}) = 127\ \text{V}$$

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 12.23**

Pour obtenir la tension entre deux points d'un circuit, on part d'un point et on additionne les vecteurs de Fresnel qui représentent les tensions qu'on rencontre successivement jusqu'à l'autre point. Les longueurs des vecteurs de Fresnel représentent les valeurs *maximales* des tensions, mais on peut aussi en tirer les valeurs efficaces, car elles y sont proportionnelles. (*a*) La tension entre C et D. (*b*) La tension entre B et D.

La tension *efficace* correspondante (celle mesurée par un voltmètre c.a.) est $\Delta V_{\rm CD} = \sqrt{Z_L^2 + r^2}\, I = 89{,}7$ V. Cette dernière valeur ne peut pas être lue directement sur le diagramme de Fresnel de la figure 12.23*a*, mais ne diffère de $\Delta v_{\rm CD0}$ que d'un facteur $\sqrt{2}$.

(d) Cette fois, il y a trois éléments de circuit entre les points B et D, soit L, r et C. La figure 12.23*b* illustre la somme vectorielle appropriée. La tension *maximale* entre ces points est

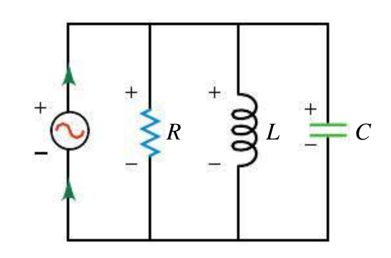
$$\begin{aligned}\Delta v_{\rm BD0} &= \sqrt{(\Delta v_{L0} - \Delta v_{C0})^2 + \Delta v_{r0}^2}\\ &= \sqrt{(Z_L - Z_C)^2 + r^2}\, i_0\\ &= \sqrt{(20{,}95\ \Omega)^2 + (30\ \Omega)^2}\,(1{,}21\ \text{A}) = 44{,}3\ \text{V}\end{aligned}$$

La tension *efficace* correspondante est $\Delta V_{\rm BD} = 31{,}3$ V. Soulignons que les valeurs efficaces ne s'additionnent pas ($\Delta V_{\rm BD} \neq \Delta V_{\rm BC} + \Delta V_{\rm CD}$) et qu'on a aussi $\Delta V_{\rm BD} \neq \sqrt{\Delta V_{\rm BC}^2 + \Delta V_{\rm CD}^2}$. En effet, la comparaison entre les figures 12.23*a* et 12.23*b* montre que les vecteurs $\Delta\vec{\mathbf{v}}_{\rm BC0}$ et $\Delta\vec{\mathbf{v}}_{\rm CD0}$ ne sont ni en phase, ni perpendiculaires entre eux.

Soulignons aussi que la tension efficace $\Delta V_{\rm BD}$ est nettement inférieure à la tension aux bornes de la bobine. Cela est dû au fait que la polarité aux bornes du condensateur est l'inverse de celle aux bornes de l'élément L (ce que montre, sur la figure 12.23*b*, le fait que les vecteurs sont en sens opposés). ■

(e) La tension entre les points A et D est tout simplement celle de la source. Sa valeur maximale étant de 100 V, sa valeur efficace est 70,7 V.

Le circuit *RLC* parallèle



▲ **Figure 12.24**
Un circuit *RLC* parallèle.

Nous allons maintenant considérer un circuit comprenant une résistance, une bobine et un condensateur, tous montés en parallèle avec une source c.a. (figure 12.24). Dans un circuit série, on mesurait le déphasage de chaque tension par rapport à un courant commun. Ici, la loi des mailles indique que la tension instantanée est la même aux bornes de tous les éléments du circuit. On mesure donc plutôt le déphasage φ de chaque courant par rapport à une tension commune $\Delta v = \Delta v_0 \sin(\omega t)$. Dans ce qui suit, nous établirons l'expression de l'impédance du circuit parallèle et nous déterminerons le déphasage entre le courant débité par la source et la tension de cette dernière.

Selon la loi des nœuds, les courants sont tels que

$$i = i_R + i_L + i_C$$

Cette équation n'est valable que pour les courants instantanés (et non pour les valeurs maximales). Chaque terme est en effet une sinusoïde qui a une phase différente par rapport à la tension. On sait que le courant total débité par la source a la forme $i = i_0 \sin(\omega t + \varphi)$, et il reste à déterminer i_0 et φ. Pour ce faire, nous allons à nouveau faire appel aux vecteurs de Fresnel, qui représentent ici les courants :

$$\vec{\mathbf{i}}_0 = \vec{\mathbf{i}}_{R0} + \vec{\mathbf{i}}_{L0} + \vec{\mathbf{i}}_{C0}$$

Puisque la composante « verticale » de $\vec{\mathbf{i}}_0$ représente la valeur instantanée i, le module de $\vec{\mathbf{i}}_0$ nous donne l'amplitude i_0, et l'angle entre $\vec{\mathbf{i}}_0$ et $\Delta\vec{\mathbf{v}}_0$ nous donne le déphasage φ entre le courant et la tension de la source.

La figure 12.25*a* représente à un instant quelconque les vecteurs tournants correspondant aux courants dans chaque branche, de même que le vecteur $\Delta\vec{\mathbf{v}}_0$ représentant la tension commune. Puisque la tension commune est en phase avec le courant traversant la résistance, ces deux vecteurs sont *superposés*, comme à la figure 12.18 (p. 497). Puisque la tension aux bornes d'une bobine est en avance de $\pi/2$ sur le courant qui la traverse, le vecteur $\vec{\mathbf{i}}_{L0}$ est en retard de $\pi/2$ sur celui qui représente la tension commune. De même, puisque la tension aux bornes du condensateur est en retard de $\pi/2$ sur son courant, le vecteur $\vec{\mathbf{i}}_{C0}$ est en avance de $\pi/2$ sur celui représentant la tension commune.

Notez qu'on a supposé ici que i_{C0} est supérieur à i_{L0}, ce qui entraîne que l'angle φ est positif ; la situation inverse peut aussi se produire, mais cela ne change pas le calcul qui suit.

Procédons à la somme vectorielle. À la figure 12.25*b*, $\|\vec{\mathbf{i}}_{C0} + \vec{\mathbf{i}}_{L0}\| = (i_{C0} - i_{L0})$. D'après le théorème de Pythagore, le carré du module de $\vec{\mathbf{i}}_0$ est donné par

$$i_0^2 = i_{R0}^2 + (i_{C0} - i_{L0})^2$$

En substituant les équations 12.4, 12.12 et 12.18, puis en mettant en évidence la valeur maximale de la tension qui est de Δv_0 pour chacun des éléments, on peut réécrire l'expression précédente comme suit :

$$i_0^2 = \Delta v_0^2\left[\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{Z_c} - \frac{1}{Z_L}\right)^2\right]$$

En utilisant le concept d'impédance du circuit, on peut exprimer cela sous une forme analogue à la loi d'Ohm (voir l'équation 12.20). Ainsi, dans un circuit *RLC* parallèle, on calcule l'impédance par :



Impédance d'un circuit *RLC* parallèle

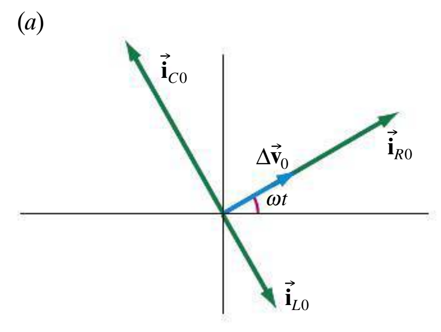
$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{Z_C} - \frac{1}{Z_L}\right)^2} \qquad (12.23)$$

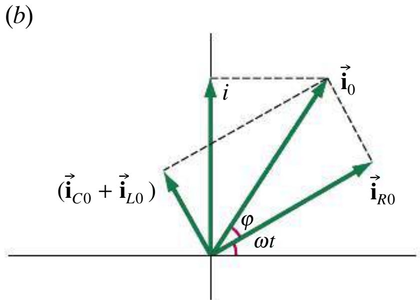
À la figure 12.25*b*, on voit que $\tan \varphi = (i_{C0} - i_{L0})/i_{R0}$, ce qui revient à écrire

Déphasage dans un circuit *RLC* parallèle

$$\tan \varphi = \frac{\dfrac{1}{Z_C} - \dfrac{1}{Z_L}}{\dfrac{1}{R}} \qquad (12.24)$$

Un angle positif, comme à la figure 12.25*b*, signifie que le courant débité par la source est en *avance* sur la tension.





▲ **Figure 12.25**

(*a*) Le vecteur de Fresnel représentant la tension et les vecteurs représentant le courant aux bornes de la résistance, du condensateur et de la bobine.
(*b*) Les vecteurs de Fresnel représentant le courant sont liés par la relation $\vec{\mathbf{i}}_0 = \vec{\mathbf{i}}_{R0} + \vec{\mathbf{i}}_{L0} + \vec{\mathbf{i}}_{C0}$. Nous avons supposé que $i_{C0} > i_{L0}$.

Exemple 12.5

Reprendre les éléments de circuit de l'exemple 12.2, en imaginant cette fois qu'ils sont tous montés en parallèle. Pour la même fréquence de 50 Hz, déterminer (a) l'impédance du circuit ; (b) la constante de phase du courant débité par la source, en précisant s'il est en avance ou en retard sur la tension ; (c) le courant maximal débité par la source ; (d) le courant maximal qui traverse chaque branche.

Solution

(a) Les impédances de la bobine et du condensateur sont

$$Z_L = \omega L = 4\pi = 12{,}6\ \Omega$$

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{100}{\pi} = 31{,}8\ \Omega$$

D'après l'équation 12.23, l'impédance du circuit s'obtient par

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{Z_C} - \frac{1}{Z_L}\right)^2}$$

d'où $Z = 8{,}26\ \Omega$.

(b) D'après l'équation 12.24, la constante de phase s'obtient par

$$\tan \varphi = \frac{\frac{1}{Z_C} - \frac{1}{Z_L}}{\frac{1}{R}}$$

d'où $\varphi = -0{,}407$ rad (ce qui correspond à $-23{,}3°$).

Le signe négatif indique que le courant débité par la source est en *retard* sur la tension.

(c) Le courant maximal débité par la source est $i_0 = \Delta v_0/Z = (100 \text{ V})/(8{,}26\ \Omega) = 12{,}1$ A.

(d) Le courant maximal dans chaque branche s'obtient par les impédances selon

$$i_{R0} = \frac{\Delta v_0}{R} = \frac{100 \text{ V}}{9\ \Omega} = 11{,}1 \text{ A}$$

$$i_{L0} = \frac{\Delta v_0}{Z_L} = \frac{100 \text{ V}}{12{,}6\ \Omega} = 7{,}94 \text{ A}$$

$$i_{C0} = \frac{\Delta v_0}{Z_C} = \frac{100 \text{ V}}{31{,}8\ \Omega} = 3{,}14 \text{ A}$$

12.7 LA RÉSONANCE DANS UN CIRCUIT *RLC* SÉRIE

Dans un circuit RLC série, pour une valeur donnée de la tension efficace ΔV fournie par la source, l'intensité efficace du courant I est donnée par l'équation 12.20 :

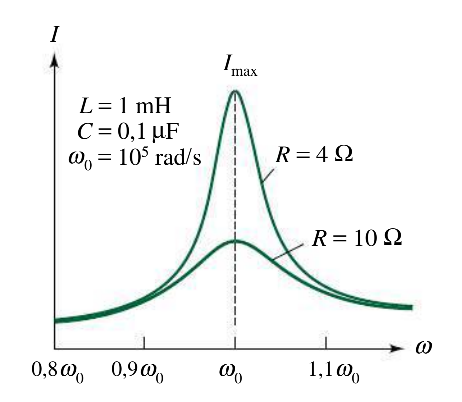
$$I = \frac{\Delta V}{Z} = \frac{\Delta V}{\sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2}} = \frac{\Delta V}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

où le dernier membre montre comment l'impédance Z est fonction de la fréquence. Quand on fait varier la fréquence de la source, l'impédance atteint une valeur minimale quand le dénominateur est minimal. Cela se produit lorsque $Z_L = Z_C$, c'est-à-dire lorsque $\omega L = 1/\omega C$, et on a alors $Z = R$. Cette condition définit la **fréquence angulaire de résonance** :

Fréquence angulaire de résonance

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (12.25)$$

Cette expression est identique à la fréquence angulaire propre des oscillations d'un circuit LC sans résistance et sans source (voir la section 11.6).



▲ **Figure 12.26**

Lorsqu'on fait varier la fréquence angulaire ω de la source, on observe une résonance du courant pour la fréquence angulaire propre ω_0. La courbe de résonance est d'autant plus large que la résistance est grande. Notez que cette courbe n'est pas tout à fait symétrique : par exemple, la valeur du courant quand $\omega = 0{,}9\omega_0$ est plus faible que celle du courant quand $\omega = 1{,}1\omega_0$.

La figure 12.26 montre le courant en fonction de la fréquence angulaire, quand l'amplitude de la source est constante. On y voit que, lorsque la fréquence angulaire ω de la source varie, l'intensité efficace I du courant donne lieu à un phénomène de **résonance**, c'est-à-dire que le courant présente un maximum pour une fréquence bien précise, celle donnée par l'équation 12.25. Pour $\omega = \omega_0$, I atteint sa valeur maximale donnée par

$$I_{max} = \frac{\Delta V}{R} \qquad (12.26)$$

La largeur de la courbe de résonance dépend de la valeur de la résistance, la courbe étant d'autant plus pointue que la résistance est faible.

À la fréquence de résonance, la condition $Z_L = Z_C$ implique que le courant est maximal, mais signifie aussi, d'après l'équation 12.22, qu'on a $\tan \phi = 0$, donc $\phi = 0$. À la fréquence de résonance, le courant instantané et la tension instantanée sont en phase. De plus, comme $Z_L = Z_C$, les tensions aux bornes de L et

de C sont égales. (Notons que ces tensions peuvent avoir une valeur maximale nettement supérieure à celle de la source, puisqu'elles ont en tout temps des polarités opposées.)

On utilise la résonance d'un circuit RLC série pour la détection des signaux de radio. En effet, le signal provenant directement de l'antenne peut être vu comme une source de f.é.m. où des tensions de plusieurs fréquences différentes sont superposées (c'est-à-dire les fréquences de chacune des stations de radio, reçues sans distinction par l'antenne). Quand cette « source » est branchée à un circuit RLC, le courant produit dans ce circuit est la somme des courants qui seraient causés individuellement par la tension de chaque fréquence. Or, une seule de ces fréquences correspond à la fréquence de résonance et produira un courant très important. Les courants des autres fréquences étant négligeables, on peut considérer qu'ils ont été « filtrés ». Si l'élément L ou C du circuit est variable, on peut ajuster la fréquence de résonance de façon à choisir la fréquence qui est conservée. Lorsque la courbe de résonance est étroite, le récepteur de radio ou de télévision est plus sélectif, c'est-à-dire capable de rejeter des signaux dont la fréquence est proche de ω_0.



Cette gigantesque batterie de condensateurs, conçue en 1976, est le « Capacitor Tree » du Fermilab: placée en série avec l'inductance des transformateurs du circuit qui alimente l'accélérateur de particules principal, elle forme le plus volumineux circuit *RLC* au monde. Son rôle est de permettre au circuit d'alimentation d'entrer en résonance, ce qui maximise le courant circulant dans le circuit et augmente de 50% la puissance.

12.8 LA PUISSANCE DANS UN CIRCUIT *RLC* SÉRIE

La puissance instantanée fournie par la source de f.é.m. est

$$p = i\Delta v = i_0 \Delta v_0 \sin(\omega t)\sin(\omega t + \phi)$$

Si on développe le second facteur sinus à l'aide de l'identité trigonométrique $\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$ (voir les rappels mathématiques de l'annexe B), on obtient:

$$p = i_0 \Delta v_0 [\sin^2(\omega t)\cos\phi + \sin(\omega t)\cos(\omega t)\sin\phi]$$

Seul le premier terme contribue à la puissance moyenne, puisque la moyenne de $\sin^2(\omega t)$ sur un cycle est égale à $\frac{1}{2}$, alors que la moyenne de $\sin(\omega t)\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\sin(2\omega t)$ est égale à zéro. La puissance moyenne est donc

$$p_{\text{moy}} = \frac{1}{2} i_0 \Delta v_0 \cos\phi$$

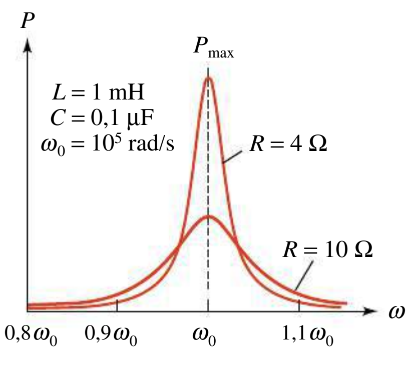
D'après le diagramme de Fresnel de la figure 12.18*b* (p. 497), on voit que $\Delta v_0 \cos\phi = \Delta v_{R0} = Ri_0$. Exprimée en fonction des valeurs efficaces, la puissance moyenne fournie par la source est

Puissance moyenne ou efficace fournie par la source dans un circuit *RLC* série

$$P = I\Delta V \cos\phi = RI^2 \qquad (12.27)$$

Cette équation est identique à celle donnant la puissance dissipée par la résistance (équation 12.5*b*). En effet, la seule puissance moyenne que la source doit fournir est celle dissipée dans la résistance, puisque le condensateur et l'inducteur restituent toute l'énergie qu'ils emmagasinent. Notons que ΔV dans l'équation 12.27 est la valeur efficace de la tension de la *source* et non la tension aux bornes de la résistance.

La quantité $Q = \cos\phi$ est appelée **facteur de puissance**. (Attention ! Il ne s'agit pas de la charge accumulée dans le condensateur du circuit.) Dans l'expression



▲ **Figure 12.27**

La puissance moyenne fournie par la source donne également lieu à une résonance. Notez que cette courbe, comme celle de la figure 12.26, n'est pas tout à fait symétrique.

$p_{moy} = \frac{1}{2}\Delta v_0 i_0 \cos\phi$, on peut dire que seule la composante de $\Delta\vec{\mathbf{v}}_0$ sur $\vec{\mathbf{i}}_0$, c'est-à-dire $\Delta v_0 \cos\phi$, contribue à la perte moyenne de puissance. Si $Q = \cos\phi = 1$, la puissance moyenne prend sa valeur maximale $P = I\Delta V$. Dans ce cas, la source « voit » le circuit comme étant purement résistif. Si $Q = \cos\phi = 0$, la source voit le circuit comme étant soit purement inductif, soit purement capacitif.

L'équation 12.27 permet aussi d'écrire la puissance moyenne fournie par la source, $P = RI^2 = R(\Delta V/Z)^2$, comme

$$P = \frac{R\Delta V^2}{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{12.28}$$

Comme le montre la figure 12.27, on observe également une résonance de la puissance moyenne. En effet, elle atteint une valeur maximale P_{max} pour la fréquence angulaire propre $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. D'après l'équation 12.28, cette valeur maximale est $P_{max} = \Delta V^2/R$.

Exemple 12.6

Dans un circuit RLC série, $R = 50\ \Omega$, $C = 80\ \mu$F et $L = 30$ mH. La source de 60 Hz fournit une tension efficace de 120 V. Déterminer: (a) les valeurs efficaces du courant et de la tension pour chaque élément ; (b) le facteur de puissance ; (c) la puissance moyenne fournie par la source ; (d) la fréquence de résonance ; (e) les valeurs maximales du courant et de la tension pour chaque élément à la fréquence de résonance. (f) Quelle est la puissance moyenne fournie par la source à la fréquence de résonance ?

Solution

(a) Pour calculer l'intensité efficace du courant, $I = \Delta V/Z$, identique pour tous les éléments, nous devons d'abord déterminer l'impédance du circuit. À cette fréquence, les impédances sont

$$Z_L = \omega L = (120\pi \text{ rad/s})(3 \times 10^{-2} \text{ H}) = 11{,}3\ \Omega$$
$$Z_C = 1/\omega C = 1/(120\pi \text{ rad/s})(8 \times 10^{-5} \text{ F}) = 33{,}2\ \Omega$$

et l'impédance du circuit est

$$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} = 54{,}6\ \Omega$$

Donc, $I = \Delta V/Z = (120 \text{ V})/(54{,}6\ \Omega) = 2{,}20$ A.

Les tensions efficaces aux bornes de chaque élément sont

$$\Delta V_R = RI = 110 \text{ V}$$
$$\Delta V_L = Z_L I = 24{,}9 \text{ V}$$
$$\Delta V_C = Z_C I = 72{,}8 \text{ V}$$

On remarque que $\Delta V \neq \Delta V_R + \Delta V_L + \Delta V_C$. Puisqu'un voltmètre en mode c.a. mesure les valeurs efficaces, la somme des valeurs mesurées aux bornes des trois éléments n'est pas égale à la valeur mesurée aux bornes de la source. ■

(b) Pour déterminer le facteur de puissance $\cos\phi$, nous devons d'abord trouver ϕ. La relation

$$\tan\phi = \frac{Z_L - Z_C}{R} = \frac{11{,}3\ \Omega - 33{,}2\ \Omega}{50\ \Omega} = -0{,}438$$

donne $\phi = -0{,}413$ rad (ce qui correspond à $-23{,}6°$). Le facteur de puissance est $\cos(-0{,}413) = 0{,}916$.

(c) La puissance moyenne fournie par la source est

$$P = I\Delta V \cos\phi = RI^2 = 242 \text{ W}$$

(d) La fréquence de résonance est

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 103 \text{ Hz}$$

(e) À la fréquence de résonance, on a $Z = R$; l'intensité maximale du courant est donc

$$i_0 = \Delta v_0/R = \sqrt{2}\,\Delta V/R = (170 \text{ V})/(50\ \Omega) = 3{,}40 \text{ A}$$

et est la même dans chaque élément de circuit. À la fréquence de résonance, les impédances de L et de C sont égales :

$$Z_L = Z_C = \sqrt{\frac{L}{C}} = 19{,}4\ \Omega$$

Les tensions maximales sont

$$\Delta v_{R0} = Ri_0 = 170 \text{ V}$$
$$\Delta v_{L0} = \Delta v_{C0} = \sqrt{\frac{L}{C}}\, i_0 = 65{,}8 \text{ V}$$

(f) $P = RI_{max}^2 = Ri_0^2/2 = (50\ \Omega)(3{,}40 \text{ A})^2/2 = 288$ W.

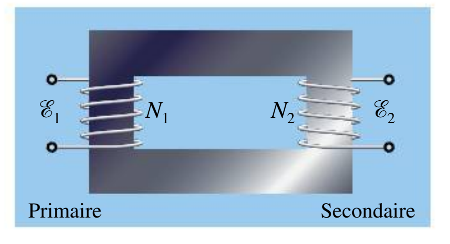
12.9 LE TRANSFORMATEUR

Le **transformateur** est un dispositif qui permet d'augmenter ou de diminuer l'amplitude des tensions c.a. La puissance étant maintenue, le courant subit la variation inverse.

Par exemple, dans les lignes électriques, on utilise des transformateurs pour produire une haute tension (une valeur efficace de 735 kV, par exemple), ce qui minimise le courant, donc les pertes thermiques. Quand les lignes atteignent une zone résidentielle, un autre transformateur réduit la tension : pour des raisons de sécurité et de simplicité de conception, la puissance est fournie à basse tension aux usagers commerciaux et aux particuliers (en général 120 V en valeur efficace).

De nombreux circuits électroniques qui se branchent sur les prises électriques ordinaires ont aussi besoin d'un transformateur (voir, par exemple, la photographie de la page titre du chapitre). Enfin, dans les hôpitaux, on se sert également des transformateurs pour isoler les appareils de surveillance électronique des malades et les protéger de toute interférence causée par d'autres circuits ou dispositifs. ●

La figure 12.28 représente un transformateur simple constitué de deux bobines enroulées sur un noyau en fer doux. La bobine *primaire* reliée à la source c.a. comporte N_1 spires, tandis que la bobine *secondaire* comporte N_2 spires. Le noyau de fer doux sert à augmenter le flux et à le canaliser : essentiellement tout le champ magnétique créé par l'enroulement primaire traverse l'enroulement secondaire*, et le flux magnétique Φ_B à travers *une spire* du primaire est égal au flux à travers *une spire* du secondaire. Les f.é.m. qui apparaissent au primaire et au secondaire sont donc



▲ **Figure 12.28**
Un transformateur simple. Les enroulements primaire et secondaire sont bobinés sur un noyau laminé en fer doux.

$$\mathscr{E}_1 = -N_1 \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}; \qquad \mathscr{E}_2 = -N_2 \frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}$$

où Φ_B est le flux à travers une spire. Le rapport des f.é.m. est égal à



Rapport des f.é.m. dans un transformateur

$$\frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1} = \frac{N_2}{N_1} \qquad (12.29)$$

En somme, le rapport des f.é.m. dans le primaire et dans le secondaire est simplement égal au rapport de leur nombre de spires. Selon la valeur de ce rapport, que l'on nomme **rapport de transformation**, on obtient un transformateur élévateur de tension (**survolteur**) ou abaisseur de tension (**dévolteur**). Si la résistance des fils électriques qui alimentent le circuit primaire est négligeable, la tension Δv_1 aux bornes de l'enroulement primaire est égale à tout instant à la f.é.m. $\mathscr{E}_1$. De même, $\mathscr{E}_2 = \Delta v_2$.

Si on branche une résistance R aux bornes de l'enroulement secondaire, un courant induit i_2 y circulera. Si le transformateur est idéal, il y aura transfert complet de puissance entre le primaire et le secondaire : $p_1 = p_2$, d'où $i_1\Delta v_1 = i_2\Delta v_2$ ou encore

$$i_1\mathscr{E}_1 = i_2\mathscr{E}_2 \qquad (12.30)$$

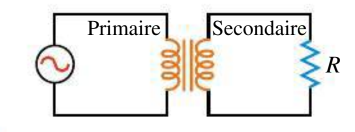
* En pratique, le couplage par flux entre les deux bobines n'est jamais parfait et un transformateur est caractérisé par son *facteur de couplage*. Dans cette section, nous allons négliger ces pertes et considérer que le couplage est parfait.

En combinant les équations 12.29 et 12.30, on trouve

Rapport des courants dans un transformateur

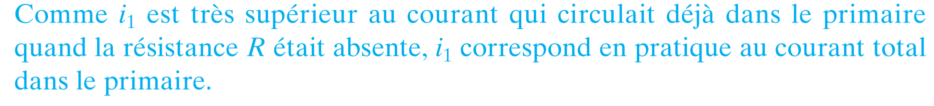
$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2} \quad (12.31)$$

Ainsi, dans un transformateur idéal, les tensions aux bornes du transformateur sont *proportionnelles* au nombre de tours des enroulements (équation 12.29), tandis que les courants de part et d'autre du transformateur sont *inversement proportionnels* au nombre de tours des enroulements (équation 12.31). Il est important de remarquer qu'un transformateur ne peut pas fonctionner en courant continu, car il n'y aurait alors pas de variation de flux magnétique et donc pas d'induction électromagnétique entre l'enroulement primaire et l'enroulement secondaire.



▲ Figure 12.29
Représentation schématique d'un transformateur qui transmet la puissance d'une source c.a. à une résistance (R).

Examinons la situation plus en détail. En l'absence de résistance R branchée au secondaire, il n'y a pas de transfert d'énergie : le circuit est ouvert. Lorsqu'on branche une résistance R (figure 12.29), un courant induit i_2 circule dans le secondaire. D'après la loi de Lenz, i_2 a tendance à s'opposer aux variations de flux magnétique dans le noyau. À son tour, cet effet a tendance à diminuer la valeur de la f.é.m. dans le primaire. Mais, comme la f.é.m. du primaire doit être à tout instant égale à la f.é.m. de la source (que nous supposons inchangée), le courant dans le primaire augmente d'une quantité i_1 pour compenser la f.é.m. induite par i_2 (i_1 est déphasé de π rad, soit 180°, par rapport à i_2). D'après l'équation 11.6, on sait que $N_1\Phi_{12} = Mi_2$ et $N_2\Phi_{21} = Mi_1$. Si l'on suppose qu'il n'y a pas de pertes de flux, $\Phi_{12} = \Phi_{21}$ et on trouve l'équation 12.31.



Comme i_1 est très supérieur au courant qui circulait déjà dans le primaire quand la résistance R était absente, i_1 correspond en pratique au courant total dans le primaire.

D'après le principe de conservation de l'énergie, l'énergie supplémentaire fournie par la source de f.é.m. apparaît dans la résistance reliée au secondaire.

Dans la pratique, le rendement du transfert de puissance peut atteindre 99 %. L'emploi d'un noyau de fer doux limite les pertes d'hystérésis (voir la section 9.6) et les fuites magnétiques. Pour réduire les pertes par effet Joule dues aux courants de Foucault dans le noyau, on utilise un noyau constitué de plaques de fer superposées entre lesquelles on intercale un matériau isolant comme de la gomme laque ou une couche d'oxyde. Ce *feuilletage* augmente considérablement la résistance sur le parcours des courants de Foucault. Comme les f.é.m. induites ne changent pas, la perte de puissance est ainsi nettement réduite.

L'adaptation d'impédances

Nous allons maintenant examiner une autre caractéristique utile des transformateurs. Les valeurs efficaces des tensions aux bornes du primaire et du secondaire sont $\Delta V_1 = Z_1 I_1$ et $\Delta V_2 = Z_2 I_2$. Si l'on exprime l'équation 12.29 en fonction de ces valeurs efficaces et qu'on substitue l'équation 12.31, on obtient

$$\frac{Z_2}{Z_1} = \left(\frac{N_2}{N_1}\right)^2 \quad (12.32)$$

Le courant primaire est donc donné par

$$I_1 = \frac{\Delta V_1}{Z_1} = \frac{\Delta V_1}{(N_1/N_2)^2 Z_2}$$

Pour la source primaire, l'impédance équivalente est $Z_1 = (N_1/N_2)^2 Z_2$. Autrement dit, le transformateur « transforme » également l'impédance du secondaire. Cette caractéristique permet d'effectuer un transfert maximal de puissance à partir d'une source de f.é.m.

Le transformateur nous permet de présenter à la source une impédance optimale. Il transmet ensuite la puissance aux éléments du circuit secondaire avec un rendement pratiquement idéal. On utilise les transformateurs pour adapter l'impédance de l'étage de sortie des amplificateurs audio à l'impédance des haut-parleurs.

Il est nécessaire d'effectuer un type similaire d'adaptation pour transmettre une onde d'un milieu à un autre, d'un solide à un liquide par exemple. L'onde transmise a une amplitude maximale lorsque les « impédances acoustiques » des milieux sont adaptées. Par exemple, lors d'une échographie, on enduit la sonde d'un gel qui permet une meilleure adaptation d'impédance que si l'onde devait passer par une couche d'air entre la sonde et la peau. ●

Exemple 12.7

Un haut-parleur de 8 Ω et de puissance moyenne 20 W est relié par l'intermédiaire d'un transformateur idéal à un amplificateur dont l'impédance de sortie est égale à 1 kΩ. Déterminer: (a) la valeur que doit avoir le rapport du nombre de spires; (b) le courant et la tension dans le secondaire; (c) le courant et la tension dans le primaire.

Solution

(a) D'après l'équation 12.32, nous avons besoin d'un transformateur abaisseur de tension, dont le rapport de transformation, ou rapport du nombre de spires, est

$$\frac{N_2}{N_1} = \sqrt{\frac{Z_2}{Z_1}} = \sqrt{\frac{8}{1000}} \approx 0{,}09$$

(b) La puissance dans le secondaire est $P_2 = R_2 I_2^2$ et donc $I_2 = \sqrt{(20/8)} = 1{,}58$ A. La tension aux bornes du secondaire est $\Delta V_2 = R_2 I_2 = 12{,}6$ V.

(c) Sachant que le transformateur a un rendement de 100 %, on peut utiliser l'équation 12.31 pour déterminer les valeurs de la tension et du courant dans le primaire à partir des valeurs correspondantes dans le secondaire:

$$I_1 = \frac{N_2}{N_1} I_2 \approx (0{,}09)(1{,}58\ \text{A}) = 0{,}142\ \text{A}$$

$$\Delta V_1 = \frac{N_1}{N_2} \Delta V_2 \approx \left(\frac{1}{0{,}09}\right)(12{,}6\ \text{V}) = 140\ \text{V}$$

On remarque que $\Delta V_1 I_1 = 20$ W.

SUJET CONNEXE

L'électricité domestique

L'installation d'un système électrique, que ce soit à l'échelle d'un pays, d'une province ou simplement d'une maison, se fait conformément à des normes précises pour des raisons d'efficacité et de sécurité. Grâce à ces normes, quel que soit l'endroit où on le branche, un appareil électrique fonctionnera adéquatement sur le territoire entier de l'Amérique du Nord. Dans ce qui suit, nous allons voir comment ces normes se traduisent concrètement dans plusieurs aspects d'un réseau d'alimentation électrique.

Le réseau d'alimentation

Construits autour de 1879, les premiers réseaux d'alimentation électrique commerciaux produisaient du courant continu à tension unique. Pour assurer la sécurité des usagers et réduire le plus possible les pertes dues aux effets résistifs, la tension électrique de ces premiers réseaux était limitée à 110 V. L'énergie transportée était donc faible, et chaque réseau ne pouvait répondre qu'à une partie de la demande.

►►►

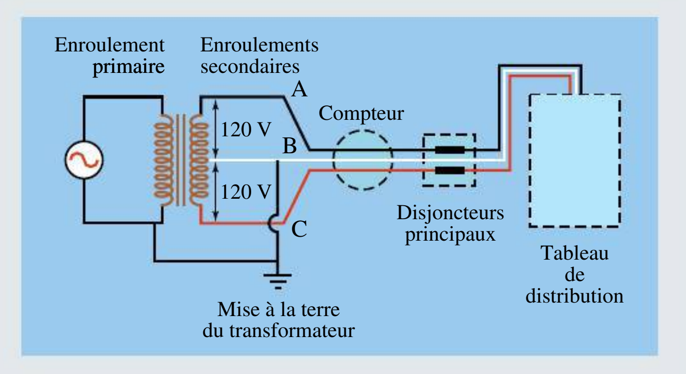
En 1885, l'invention du transformateur allait rendre caduques les tentatives d'exploitation de ces réseaux à échelle réduite. Les grands promoteurs de l'époque, notamment George Westinghouse (1846-1914) et Thomas Edison (1847-1931), comprirent comment l'utilisation du courant alternatif et du transformateur pouvait augmenter la puissance disponible tout en éliminant les contraintes de distance entre les centrales de production et les abonnés. De nos jours, tous les réseaux de distribution d'énergie électrique fonctionnent en tension alternative*. En Amérique, la fréquence d'oscillation du courant alternatif est de 60 Hz, donc sa fréquence angulaire est $\omega = 120\pi$ rad/s. Qu'elle soit produite dans une centrale thermique, nucléaire ou hydraulique, l'énergie électrique est issue d'alternateurs qui fonctionnent à une tension d'environ 15 kV. Toute une batterie de transformateurs *survolteurs* élève ensuite cette tension à plusieurs centaines de kilovolts. Au Québec, entre les centrales et les grandes villes, l'énergie électrique franchit de longues distances à une tension de 735 kV. Le circuit de transport est surtout résistif, de sorte que la puissance électrique transmise est liée à la tension et au courant qui traverse les fils par $P = I\Delta V$. L'utilisation d'une tension de transport élevée ne sert donc qu'un but : réduire le plus possible le courant et les pertes en chaleur associées à la résistance des fils.

À proximité des centres urbains, une autre batterie de transformateurs *dévolteurs* réduit la tension à 25 kV. C'est à ce niveau que l'énergie électrique voyage dans les rues et atteint un dernier transformateur qui, du haut d'un poteau ou du bord de la route (selon que les fils sont souterrains ou non), alimente un groupe de maisons à une tension de 120 V ou de 240 V.

Du transformateur à la maison

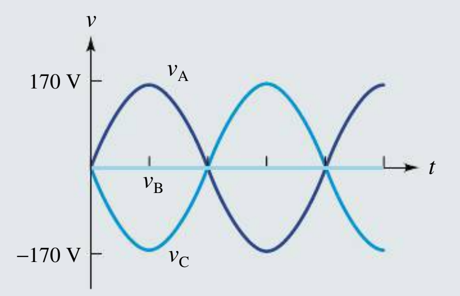
À la différence de celui qui est illustré à la figure 12.28, le transformateur d'alimentation des maisons comporte trois enroulements : un primaire et deux secondaires. La figure 12.30 en donne une version schématisée qui montre comment les deux enroulements secondaires sont branchés bout à bout. Le point de contact des deux enroulements est mis à la terre, de sorte que le fil B qui en émerge est « neutre » : il est à une tension constante de 0 V. Le rapport entre le nombre de spires du primaire et le nombre de spires de l'un ou l'autre des enroulements secondaires est fixé de manière à ce qu'une tension efficace de 120 V, c'est-à-dire une tension qui oscille entre −170 V et +170 V, soit induite dans les fils A et C. Par opposition au fil « neutre », on dit que ces deux fils sont « vivants** ».

Comme on le voit à la figure 12.31, le branchement en série des deux enroulements du secondaire fait en sorte que l'oscillation de la tension est déphasée d'un



▲ **Figure 12.30**

Un transformateur d'alimentation électrique et le système à trois fils branchés à une maison. Les fils A et C sont « vivants » (120 V en valeur efficace), tandis que le fil B est neutre, à 0 V.



▲ **Figure 12.31**

Valeurs instantanées de la tension dans les fils A, B et C branchés aux enroulements secondaires du transformateur d'alimentation.

demi-cycle dans les fils A et C. Par rapport au fil B, la différence de potentiel s'exprime ainsi :

$$\Delta v_{AB} = v_A - v_B = (170\text{ V})\sin(\omega t) - 0\text{ V} = (170\text{ V})\sin(\omega t)$$

On peut aussi brancher le fil A directement au fil C. Dans ce cas, la différence de potentiel sera de

$$\Delta v_{AC} = v_A - v_C = (170\text{ V})\sin(\omega t) - (170\text{ V})\sin(\omega t + \pi) = (340\text{ V})\sin(\omega t)$$

Pour alimenter la plupart des appareils électriques utilisés dans une maison, qui fonctionnent à une tension efficace de 120 V, on utilise le fil B et l'un des deux fils

* Les problèmes d'adaptation d'impédance entre certains grands réseaux ont, depuis quelques années, favorisé le développement du transport de l'énergie électrique en tension continue. C'est le cas, entre autres, pour les lignes à haute tension qui permettent le branchement entre le réseau québécois et ceux de la Nouvelle-Angleterre. Après le transfert, toutefois, le courant électrique revient en mode alternatif.

** Comme nous l'avons dit dans l'aperçu historique de la section 7.2, l'usage veut que cet anglicisme soit très utilisé ; en français correct, on devrait dire qu'il s'agit de fils « sous tension ».

«vivants». En revanche, lorsqu'on branche l'appareil à la fois aux fils A et C, on obtient une tension efficace de 240 V, nécessaire pour alimenter les appareils de grande puissance comme la cuisinière, la sécheuse, le chauffe-eau et les plinthes électriques : pour une puissance donnée, la tension plus élevée permet de maintenir le courant dans les fils à une faible valeur, ce qui évite leur échauffement.

L'alimentation électrique d'une maison nécessite donc trois fils : un «neutre» (0 V) et deux «vivants» (120 V). À leur entrée dans la résidence (figure 12.30), ces trois fils traversent d'abord le compteur électrique, puis la boîte des disjoncteurs principaux, avant d'atteindre le tableau de distribution. Dans le cas d'une installation normale, les disjoncteurs principaux limitent la valeur du courant efficace dans les fils d'alimentation A et C à 100 A ou 150 A, une limite sécuritaire.

Le tableau de distribution

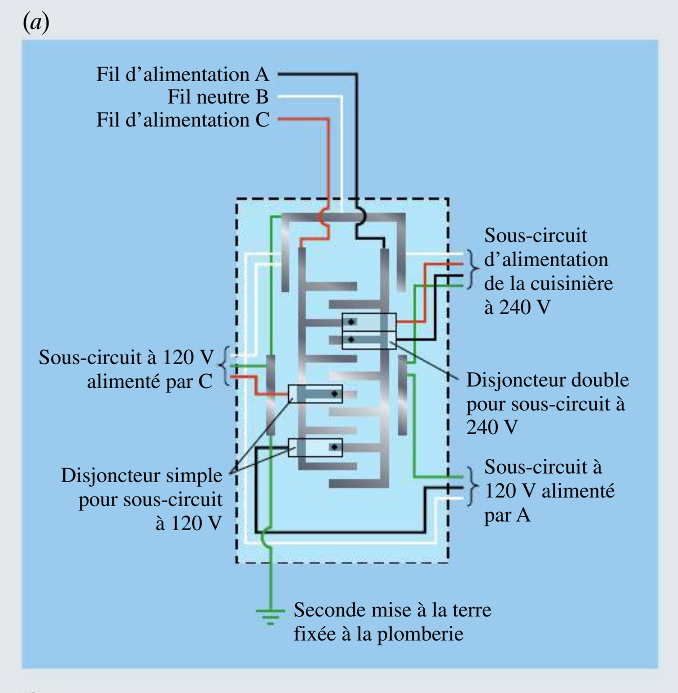
Le tableau de distribution (figure 12.32) permet de subdiviser la tension des fils d'alimentation A et C en plusieurs sous-circuits, chacun étant protégé par un disjoncteur. À chaque sous-circuit de 120 V correspondent trois fils qui partent du tableau pour alimenter un groupe d'appareils.

D'après les normes de couleur, le fil blanc est branché au fil neutre B à 0 V. Le deuxième fil de chaque sous-circuit est noir ou rouge, selon qu'il est branché au fil d'alimentation A ou C. Mais, comme le montre la figure 12.32, la connexion n'est pas directe. Entre le fil du sous-circuit et celui de l'alimentation, on insère un disjoncteur de 10 A, 15 A ou 20 A. Les fils du sous-circuit ont un diamètre tel que, tant que le courant est maintenu à une valeur inférieure au maximum qu'impose le disjoncteur, la chaleur dissipée dans les fils ne pose aucun risque. Si, pour une raison ou une autre, le courant circulant dans le sous-circuit dépasse le maximum permis, le disjoncteur ouvre le circuit et empêche toute surchauffe à l'intérieur des murs. Il ne reste alors qu'à débrancher certains appareils et à remettre le sous-circuit en marche en basculant la manette du disjoncteur.

Un troisième fil accompagne le sous-circuit. Il est vert ou dénudé et est branché directement au boîtier du tableau de distribution. Comme on a pris soin de connecter le boîtier à l'un des tuyaux métalliques de la plomberie, ce fil constitue une seconde mise à la terre. Nous verrons plus loin quelle en est l'utilité.

Chaque gros appareil électrique (cuisinière, chauffe-eau ou sécheuse) accapare un sous-circuit du tableau en raison de la tension de 240 V requise. Dans le cas du chauffage, on subdivise l'ensemble des plinthes électriques en un nombre approprié de sous-circuits, chacun étant limité à un courant efficace de 40 A. Qu'il s'agisse

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 12.32**

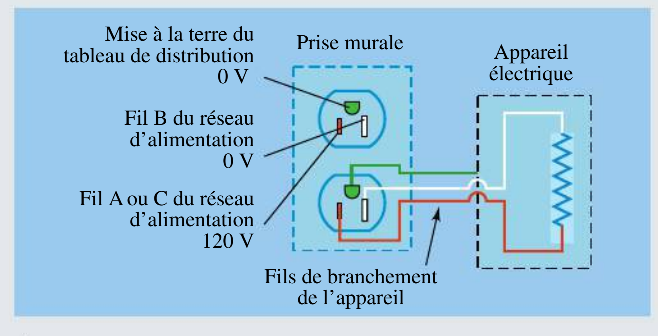
(*a*) Schéma du tableau de distribution d'une maison. On distingue deux sous-circuits à 120 V ainsi qu'un sous-circuit à 240 V alimentant la cuisinière. Le contact derrière chaque disjoncteur (point noir) relie la barrette horizontale qui lui touche au fil rouge ou noir émergeant du disjoncteur. (*b*) Photo du même équipement. La rangée gauche de disjoncteurs a été retirée pour montrer les barrettes horizontales.

►►►

d'un gros appareil ou du chauffage, le branchement aux deux fils d'alimentation A et C est nécessaire pour produire une tension de 240 V. Comme on le voit à la figure 12.32, la géométrie des barrettes horizontales du tableau permet de placer, l'un au-dessus de l'autre, deux disjoncteurs branchés sur chacune des fils d'alimentation A et C. De ce disjoncteur double émergent un fil noir et un fil rouge, chacun étant soumis à la tension décrite à la figure 12.31. Dans le cas du chauffage et du chauffe-eau, ces deux fils suffisent, avec la mise à la terre (fil vert), à l'alimentation des appareils. En ce qui concerne la cuisinière et la sécheuse, un fil blanc fixé à la barrette horizontale (0 V) s'ajoute et permet que certaines des composantes de l'appareil fonctionnent sous une tension de 120 V. Dans la cuisinière, les éléments chauffants de la plaque de cuisson fonctionnent sous une tension de 120 V, mais le four nécessite 240 V. Dans une sécheuse, on alimente le moteur et l'éclairage à 120 V, mais les éléments chauffants du tambour sont à 240 V.

La sécurité

Quel que soit l'appareil branché au réseau domestique, le courant ne doit circuler que *dans* l'appareil et ses fils de branchement. Ceux-ci sont donc adéquatement isolés pour éviter tout contact avec un conducteur extérieur au circuit, en particulier le corps de l'utilisateur. Mais qu'advient-il lorsqu'un bris survient et que l'un des fils « vivant » dans l'appareil vient en contact avec le boîtier ? Dans le cas de certains appareils, comme le téléviseur ou la chaîne stéréo, la fiche de branchement au mur comporte trois connecteurs (figure 12.33). Quand on branche l'appareil, les deux connecteurs plats sont mis en contact, respectivement, avec le fil blanc (0 V) et le fil « vivant » (ΔV = 120 V) du sous-circuit. L'autre connecteur, cylindrique, raccorde le fil vert (ou dénudé) de mise à la terre au boîtier de l'appareil branché. Advenant une défaillance, les courants indésirables y sont canalisés, évitant que l'utilisateur ne serve de court-circuit…



▲ **Figure 12.33**

Branchement d'un appareil électrique au moyen d'une fiche comportant trois fils. On distingue les fils d'alimentation, la prise murale, les fils de branchement de l'appareil et un schéma simplifié de son circuit. En général, le code de couleur des fils ne s'applique pas à ceux du cordon d'alimentation d'un appareil.

Dans le cas d'autres appareils, comme les perceuses et les scies électriques que l'on tient à la main, cette deuxième mise à la terre peut s'avérer dangereuse, dans l'éventualité peu probable mais possible où le boîtier viendrait en contact avec un autre fil « vivant ». On préfère donc isoler doublement le circuit de ces appareils et éviter de faire appel à la mise à la terre que procure le fil vert. Leur fiche de branchement ne comporte ainsi que les deux connecteurs plats.

Parfois, la pièce où sont branchés les appareils électriques est elle-même une source de danger : la salle de bain, dont le plancher est souvent mouillé et où abondent des tuyaux pouvant servir de mise à la terre accidentelle, mérite une attention particulière. Il est obligatoire d'équiper cette pièce d'une prise à *disjoncteur de fuite à la terre*, ou *disjoncteur différentiel*. Ce dernier dispositif, reconnaissable à ses deux petits boutons, est muni d'un disjoncteur sensible à toute différence d'intensité du courant dans le fil « neutre » (fil blanc) et le fil « vivant » (fil rouge ou noir). Dès qu'une brutale hausse de courant se produit, le disjoncteur réagit en une fraction de seconde et ouvre le circuit, évitant ainsi que l'utilisateur de l'appareil ne serve de conducteur.

Le compteur d'électricité

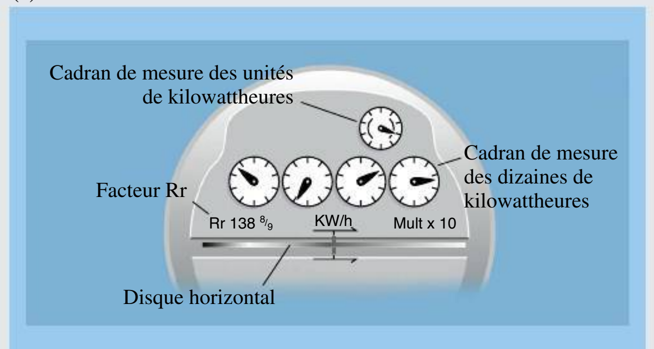
Du point de vue du fournisseur de service, l'élément le plus important de tout le circuit d'alimentation d'une maison est son compteur d'électricité, ou *wattheuremètre*. Traversé par les trois fils d'alimentation, cet appareil détecte le passage du courant et évalue la quantité d'énergie utilisée sur une période de temps donnée. Par exemple, un appareil qui fonctionne à une puissance de 1000 W durant une heure consomme $P\Delta t$ = 1000 J/s × 3600 s = 3 600 000 J. Cette quantité d'énergie, appelée un kilowattheure (kWh), est l'unité de base utilisée dans la tarification de l'électricité.

La figure 12.34*a* montre les éléments essentiels d'un compteur d'électricité analogique, tel qu'on les fabriquait jusqu'en 2010. Le disque horizontal, dont la rotation témoigne de la dépense énergétique, est l'élément principal du mécanisme. Le disque est traversé de courants de Foucault (induits par un transformateur placé à proximité) qui entraînent sa rotation à une vitesse qui est directement proportionnelle à la puissance électrique totale consommée dans une maison. Cinq cadrans à aiguilles, dont la rotation est entraînée par celle du disque, forment un nombre indiquant en kilowattheures la consommation depuis l'installation du compteur (figure 12.34*b*). (On arrondit à la dizaine la plus près, car le cadran correspondant aux unités n'est pas chiffré.) L'aiguille du cadran des unités avance d'une

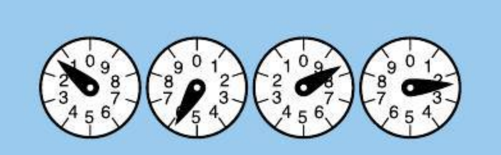
graduation chaque fois que le disque horizontal effectue un nombre donné de tours appelé facteur Rr du compteur. Grâce à des engrenages, chaque rotation complète d'un cadran entraîne la progression du cadran suivant par une graduation.

Jusqu'à récemment, Hydro-Québec devait faire la lecture directe du compteur pour établir les factures de consommation d'électricité. Mais entre 2013 et 2018, les compteurs analogiques sont remplacés par des compteurs intelligents (figure 12.34*c*). Ceux-ci ont un fonctionnement interne différent et peuvent émettre l'information de consommation (par onde radio), évitant ainsi le déplacement d'un employé. Ces nouveaux compteurs permettent aussi de détecter et de rapporter immédiatement chaque panne.


(*a*)



(*b*)




(*c*)



▲ **Figure 12.34**

(*a*) Illustration simplifiée d'un compteur d'électricité analogique. La rotation du disque horizontal entraîne l'aiguille de chacun des cinq cadrans gradués. (*b*) Agrandissement des quatre cadrans gradués permettant de lire que 15 820 kWh ont été consommés depuis l'installation. (*c*) Les compteurs intelligents ont un fonctionnement numérique et leur affichage est plus simple.

RÉSUMÉ



Dans un circuit c.a., le courant instantané et la tension instantanée aux bornes de la source sont donnés par

$$i(t) = i_0 \sin(\omega t) \qquad (12.1)$$

$$\Delta v(t) = \Delta v_0 \sin(\omega t + \phi) \qquad (12.2)$$

où i_0 et Δv_0 sont les valeurs maximales et ϕ est la constante de phase de la tension, mesurée par rapport à la phase du courant.

Dans un circuit, une résistance R, un inducteur L et un condensateur C ont respectivement à leurs bornes les tensions suivantes en fonction du temps :

$$\Delta v_R = \Delta v_{R0} \sin(\omega t) \qquad (12.3)$$

$$\Delta v_L = \Delta v_{L0} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad (12.11)$$

$$\Delta v_C = \Delta v_{C0} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \qquad (12.17)$$

La valeur efficace du courant est

$$I = \sqrt{(i^2)_{\text{moy}}} = \frac{i_0}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 i_0 \qquad (12.6a)$$

De même, la valeur efficace ΔV de la tension aux bornes d'un élément de circuit est reliée à sa valeur maximale ΔV_0 par une relation identique. Par exemple, la tension efficace aux bornes de la résistance est

$$\Delta V_R = \sqrt{(\Delta v_R^2)_{\text{moy}}} = \frac{\Delta v_{R0}}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 \Delta v_{R0} \qquad (12.6b)$$

Les grandeurs efficaces permettent d'exprimer de façon simple la puissance dissipée par la résistance, laquelle correspond à la puissance fournie par la source :

$$P_R = RI^2 = \Delta V_R^2 / R = I \Delta V_R \qquad (12.5b)$$

En général, les valeurs maximales (ou efficaces) de la f.é.m. et du courant sont reliées par une équation de même forme que la loi d'Ohm :

$$\Delta v_0 = Z i_0; \quad \Delta V = ZI \qquad (12.20)$$

où Z est l'impédance du circuit. Cette équation ne s'applique toutefois *pas* aux valeurs instantanées, car elles ont des phases différentes : $\Delta v(t) \neq Zi(t)$.

L'impédance inductive associée à la présence d'une bobine d'induction est donnée par

$$Z_L = \omega L \qquad (12.13)$$

L'impédance capacitive associée à la présence d'un condensateur est donnée par

$$Z_C = \frac{1}{\omega C} \qquad (12.19)$$

Dans un circuit RLC série, l'impédance totale est donnée par

$$Z = \sqrt{R^2 + (Z_L - Z_C)^2} \qquad (12.21)$$

Dans un circuit parallèle, elle est donnée par

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{Z_C} - \frac{1}{Z_L}\right)^2} \qquad (12.23)$$

Dans un circuit série, la constante de phase de la tension, mesurée par rapport à la phase du courant, est donnée par

$$\tan \phi = \frac{Z_L - Z_C}{R} \qquad (12.22)$$

Si ϕ est positif, la tension est en avance sur le courant.

Dans un circuit parallèle, c'est la phase du courant qui est mesurée par rapport à celle de la tension commune à tous les éléments. Sa constante de phase est donnée par

$$\tan \varphi = \frac{\frac{1}{Z_C} - \frac{1}{Z_L}}{\frac{1}{R}} \qquad (12.24)$$

Si φ est positif, le courant est en avance sur la tension.

Lorsqu'on fait varier la fréquence d'excitation, on observe un phénomène de résonance du courant dans le circuit *RLC* série, c'est-à-dire que le courant présente un maximum pour une fréquence bien précise. L'intensité efficace I du courant atteint une valeur maximale $I_{max} = \Delta V/R$ lorsque $Z_L = Z_C$, ce qui a lieu à la fréquence angulaire de résonance

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (12.25)$$

Cette valeur correspond à la fréquence angulaire propre des oscillations dans un circuit *LC*.

La puissance moyenne fournie par la source de f.é.m. est

$$P = I\Delta V \cos \phi = RI^2 \qquad (12.27)$$

La quantité $Q = \cos \phi$ est le facteur de puissance.

Un transformateur est composé d'un enroulement primaire et d'un enroulement secondaire bobinés sur un noyau commun en fer doux. Le rapport des f.é.m. dans le primaire et dans le secondaire est égal au rapport du nombre de spires de chaque enroulement :

$$\frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1} = \frac{N_2}{N_1} \qquad (12.29)$$

Le transformateur transmet la puissance avec un rendement quasiment idéal ; ainsi,

$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{N_1}{N_2} \qquad (12.31)$$

TERMES IMPORTANTS

constante de phase (p. 486)
courant alternatif (p. 485)
courant continu (p. 485)
courant efficace (p. 489)
déphasage (p. 486)
dévolteur (p. 507)
diagramme de Fresnel (p. 496)
différence de phase (p. 486)
facteur de puissance (p. 505)
fréquence angulaire de résonance (p. 504)
impédance (p. 493)
phase (p. 486)
phase initiale (p. 486)
phaseur (p. 495)
puissance efficace (p. 489)
puissance moyenne (p. 489)
rapport de transformation (p. 507)
représentation de Fresnel (p. 495)
résonance (p. 504)
survolteur (p. 507)
tension (p. 486)
transformateur (p. 507)
vecteur tournant (p. 495)

RÉVISION

R1. Vrai ou faux ? La puissance efficace dissipée aux bornes d'une résistance est égale à la moitié de la puissance moyenne.

R2. Tracez sur un même graphique le courant et la tension aux bornes d'une bobine en fonction du temps.

R3. Tracez sur un même graphique le courant et la tension aux bornes d'un condensateur en fonction du temps.

R4. Vrai ou faux ? La tension est toujours en avance sur le courant dans une bobine.

R5. Vrai ou faux ? La tension est toujours en avance sur le courant dans un condensateur.

R6. Expliquez en termes de physique pourquoi la tension aux bornes d'une bobine est nulle au moment où le courant qui la traverse est maximal.

R7. Expliquez en termes de physique pourquoi le courant doit être nul au moment où la tension aux bornes d'un condensateur est maximal.

R8. Vrai ou faux ? La puissance moyenne fournie à un condensateur est nulle.

R9. Expliquez en termes de physique pourquoi l'impédance d'une bobine est proportionnelle (a) à son inductance L ; (b) à la fréquence angulaire.

R10. Expliquez physiquement pourquoi l'impédance d'un condensateur est inversement proportionnelle (a) à sa capacité ; (b) à la fréquence angulaire.

R11. Tracez les vecteurs de Fresnel représentant les tensions dans un circuit RLC série et expliquez à partir de votre dessin l'origine de l'expression mathématique donnant le déphasage entre le courant et la tension.

R12. Tracez les vecteurs de Fresnel représentant les courants dans un circuit RLC parallèle et expliquez à partir de votre dessin l'origine de l'expression mathématique donnant le déphasage entre le courant et la tension.

R13. Expliquez pourquoi dans un circuit RLC parallèle ce sont les courants et non les tensions qu'on représente à l'aide des vecteurs de Fresnel.

R14. Vrai ou faux ? Dans un circuit RLC parallèle, le déphasage calculé est positif lorsque la tension est en avance sur le courant débité par la source.

R15. Vrai ou faux ? Lorsqu'un circuit RLC série est en résonance, son impédance est maximale.

R16. Un transformateur peut-il fonctionner en courant continu ? Si non, pourquoi ?

QUESTIONS

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

Q1. Pourquoi un condensateur se comporte-t-il comme un court-circuit à haute fréquence et comme un circuit ouvert à basse fréquence ?

Q2. Pourquoi une bobine d'induction est-elle parfois appelée « bobine d'arrêt » ? Qu'arrête-t-elle ?

Q3. Dans quels cas est-il préférable d'utiliser une source c.a. au lieu d'une source c.c. ? Quand la source c.c. est-elle préférable à la source c.a. ?

Q4. L'intensité moyenne du courant fourni à un circuit par une source c.a. est nulle, mais la puissance moyenne fournie n'est pas nulle si le circuit contient une résistance. Expliquez pourquoi.

Q5. Une source c.a. peut-elle être reliée à un circuit sans toutefois lui fournir de l'énergie ? Si oui, dans quelles circonstances ?

Q6. Quatre fils non identifiés sortent d'un transformateur. Que devez-vous faire pour déterminer le rapport des nombres de spires ?

Q7. L'enroulement primaire d'un transformateur est conçu pour fonctionner à 120 V et à 60 Hz. Il risque pourtant d'être endommagé si on le branche sur une tension continue de 50 V. Pourquoi ?

Q8. La puissance des générateurs c.a. est indiquée en volt-ampères (V·A) et non en watts (W). Pourquoi ?

Q9. Une ampoule conçue pour fonctionner sur une tension efficace de 120 V est reliée en série avec une bobine d'induction, un condensateur et une source c.a. efficace de 120 V. L'ampoule donne-t-elle son intensité lumineuse normale ?

Q10. Un facteur de puissance peut-il être négatif ? Si oui, quelle implication cela a-t-il quant à la puissance fournie par la source ?

Q11. Pourquoi la puissance fournie par une centrale électrique est-elle transmise sous une tension très élevée ?

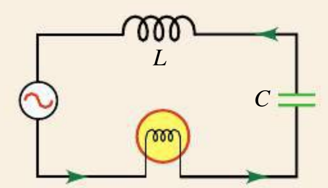
Q12. Les compagnies d'électricité préfèrent en général que l'installation électrique du consommateur ait un facteur de puissance égal à un. Pourquoi ?

Q13. Vrai ou faux ? (a) Au-dessus de la fréquence de résonance, la tension est en avance sur le courant. (b) Un facteur de puissance négatif signifie que la tension est en avance sur le courant.

Q14. Si l'impédance d'un circuit RLC série décroît lorsque la fréquence augmente, la constante de phase est-elle positive ou négative ?

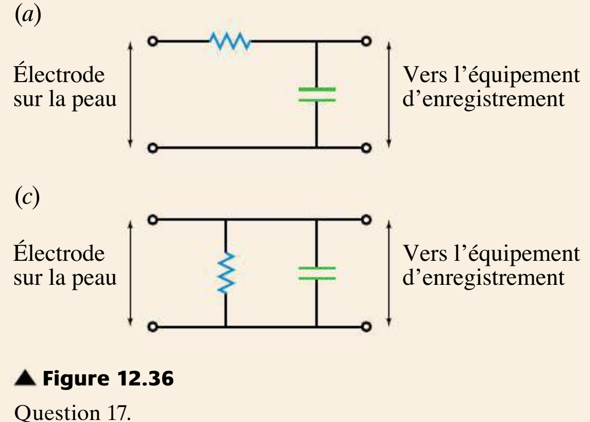
Q15. Dans un circuit RLC série, la tension efficace aux bornes de L ou de C peut-elle être supérieure à la tension efficace de la source ?

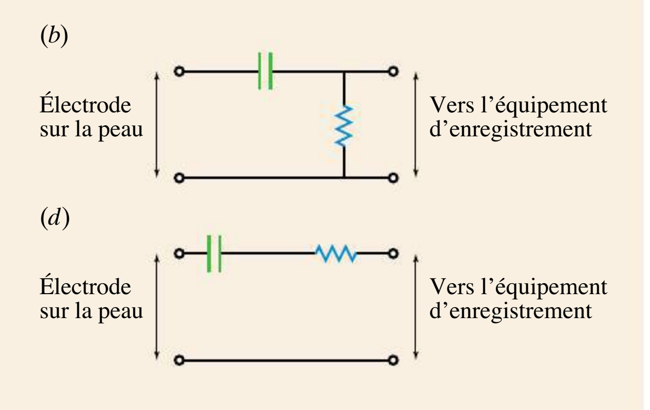
Q16. Considérons le circuit de la figure 12.35. La fréquence de la source est constante. Quel est l'effet produit sur l'intensité lumineuse de l'ampoule lorsqu'on fait varier la capacité ?



▲ **Figure 12.35**
Question 16.

Q17. Lors d'un examen médical nécessitant de brancher des électrodes sur la peau, la sueur peut agir comme l'électrolyte d'une pile et générer une légère f.é.m. constante qui se superpose au signal qu'on veut mesurer. Un simple condensateur permet de filtrer ce signal c.c. sans bloquer les signaux c.a. Lequel des circuits illustrés à la figure 12.36 représente la façon dont il faut le brancher pour obtenir ce résultat ?





▲ **Figure 12.36**
Question 17.

EXERCICES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

12.1 à 12.4 Résistances, bobines idéales et condensateurs

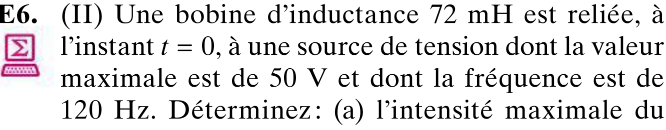
E1. (I) Une bobine d'inductance $L = 40$ mH est reliée à une source caractérisée par une tension maximale de 120 V et une fréquence de 60 Hz. (a) Déterminez l'intensité maximale du courant. (b) Si la tension maximale ne change pas, à quelle fréquence l'intensité maximale du courant est-elle égale à 30 % de la valeur trouvée à la question (a) ?

E2. MonLab (I) Un condensateur de 50 μF est relié à une source de tension dont la valeur maximale est de 70 V et dont la fréquence est de 50 Hz. (a) Déterminez l'intensité maximale du courant. (b) Pour la même tension maximale, à quelle fréquence l'intensité maximale du courant serait-elle de 30 % supérieure à celle de la question (a) ?

E3. (I) Étant donné un condensateur de capacité $C = 0{,}1$ μF et une bobine d'inductance $L = 10$ mH, déterminez la fréquence à laquelle : (a) $Z_L = Z_C$; (b) $Z_L = 5Z_C$; (c) $Z_C = 5Z_L$.

E4. (I) L'impédance d'une bobine d'induction est de 37,7 Ω à 60 Hz. On branche la bobine sur une source de 50 Hz et de tension efficace 120 V. Quelle est l'intensité maximale du courant ?

E5. MonLab (I) Un condensateur de 50 μF est relié à une source de 60 Hz qui fournit une tension efficace de 24 V. Trouvez : (a) la charge maximale du condensateur ; (b) l'intensité maximale du courant dans les fils.



E6. (II) Une bobine d'inductance 72 mH est reliée, à l'instant $t = 0$, à une source de tension dont la valeur maximale est de 50 V et dont la fréquence est de 120 Hz. Déterminez : (a) l'intensité maximale du courant ; (b) l'intensité du courant lorsque la tension a son amplitude maximale (positive) ; (c) l'intensité du courant lorsque la tension est égale à la moitié de sa valeur maximale (positive) (il y a deux réponses possibles) ; (d) la puissance instantanée fournie à la bobine à $t = 1$ ms. (e) Superposez les graphes du courant, de la tension et de la puissance instantanée fournie à la bobine sur un intervalle de temps allant de 0 s à une période d'oscillation. La superposition de ces graphes confirme-t-elle les réponses données aux questions (b), (c) et (d) ?

E7. (II) Un condensateur de capacité 108 μF est relié, à l'instant $t = 0$, à une source qui fonctionne à 80 Hz avec une tension maximale de 24 V. Trouvez : (a) l'intensité maximale du courant ; (b) l'intensité du courant lorsque la tension prend sa valeur maximale ; (c) l'intensité du courant lorsque la tension est égale à la moitié de sa valeur maximale (positive) (il y a deux réponses possibles) ; (d) la puissance instantanée fournie au condensateur à $t = 1$ ms. (e) Superposez les graphes du courant, de la tension et de la puissance instantanée fournie au condensateur sur un intervalle de temps allant de 0 s à une période d'oscillation. Ces graphes confirment-ils les réponses données aux questions (b), (c) et (d) ?

E8. (I) Un condensateur de 6 μF a une impédance de 11 Ω. (a) Quelle serait l'impédance d'une bobine d'inductance 0,2 mH à la même fréquence ? (b) À quelle fréquence les impédances seraient-elles égales ?

E9. (I) Une bobine d'inductance idéale L = 80 mH est reliée à une source dont la tension maximale vaut 60 V à t = 0. (a) Si la fréquence est de 50 Hz, quelle est l'intensité du courant à t = 2 ms ? Quelle est la puissance instantanée fournie à la bobine à cet instant ? (b) À quelle fréquence l'intensité maximale du courant est-elle égale à 1,8 A ?

E10. (I) Une source dont la tension maximale vaut 72 V est reliée, à l'instant t = 0, à un condensateur de capacité C = 80 μF. (a) Si la fréquence est de 50 Hz, quelle est l'intensité du courant à t = 2 ms ? Quelle est la puissance instantanée fournie au condensateur à cet instant ? (b) À quelle fréquence l'intensité maximale du courant est-elle égale à 4 A ?

12.6 et 12.7 Circuits *RLC* et résonance

E11. (I) Une résistance et un condensateur sont en série avec une source c.a. L'impédance est Z = 10,8 Ω à 390 Hz et Z = 18,8 Ω à 200 Hz. Trouvez R et C.

E12. (I) Dans un circuit comprenant une résistance et une bobine en série, Z = 28,3 Ω à 100 Hz et Z = 22,9 Ω à 75 Hz. Trouvez R et L.

E13. MonLab (I) Dans un circuit RLC série, la source a une tension efficace ΔV = 60 V et une fréquence de 250/π Hz ; on donne R = 50 Ω et C = 10 μF. Si la tension maximale aux bornes de R vaut 25 V, trouvez L (il y a deux valeurs possibles).

E14. (I) Une bobine réelle, que l'on peut assimiler à une bobine et à une résistance en série, est reliée en série avec un condensateur et une source c.a. La tension efficace aux bornes de la bobine est égale à 45 V et ΔV_C = 60 V pour une fréquence de 200/π Hz. Si C = 25 μF et R = 50 Ω, trouvez L.

E15. (I) Dans un circuit RLC série, la tension efficace fournie par la source est ΔV = 120 V et la fréquence est f = 200/π Hz. Sachant que L = 0,2 H, C = 20 μF et ΔV_R = 50 V, trouvez : (a) I ; (b) R ; (c) ΔV_L ; (d) ΔV_C.

E16. À la figure 12.17 (p. 497), un voltmètre relié aux bornes de L et C indique une tension efficace de 80 V. Si L = 0,2 H, C = 50 μF et que la tension fournie par la source vaut 120 V pour une fréquence égale à 200/π Hz, trouvez : (a) Z_L ; (b) Z_C ; (c) I ; (d) R ; (e) la puissance moyenne fournie par la source.

E17. (I) Une résistance de 100 Ω est reliée en série avec un condensateur de 25 μF et une bobine. La tension efficace aux bornes de la source est de 240 V et sa fréquence est de 800/π Hz. Sachant que ΔV_R = 80 V, trouvez : (a) Z ; (b) L ; (c) ϕ.

E18. (I) Dans un circuit RLC série, Z_L = 20 Ω et Z_C = 8 Ω pour une certaine fréquence. La fréquence de résonance est égale à 2000 Hz. Trouvez L et C.

E19. MonLab (I) Une résistance (R = 10 Ω) et une bobine (L = 40 mH) sont reliées en série avec un condensateur. La tension efficace de la source vaut 120 V à 60 Hz. La tension efficace aux bornes de la résistance est égale à 30 V. (a) Que vaut C ? (b) Quelle est la fréquence propre f_0 ?

E20. (I) Un circuit RLC série comporte les éléments suivants : R = 25 Ω, L = 320 mH et C = 18 μF. La tension maximale aux bornes de la source vaut 170 V et la fréquence vaut 60 Hz. Trouvez : (a) l'impédance ; (b) la valeur efficace de l'intensité du courant ; (c) la constante de phase de la tension. (d) Si on monte les mêmes éléments en parallèle, que deviennent l'impédance, la valeur efficace de l'intensité du courant débité par la pile et la constante de phase (du courant) ?

E21. MonLab (II) Dans un circuit RLC série, on donne R = 40 Ω, L = 20 mH, C = 60 μF. Trouvez pour quelle fréquence la tension est en avance de π/6 rad sur le courant.

E22. (II) Lorsqu'une source c.a. de tension maximale 48 V est reliée en série avec un circuit RLC série, l'intensité maximale du courant vaut 2 A. Le condensateur a une capacité C = 10 μF, la fréquence vaut 50 Hz et le courant est en avance de π/4 rad sur la tension. Trouvez : (a) la résistance ; (b) l'inductance.

E23. (II) Une bobine (L = 3 mH), une résistance (R = 8 Ω) et un condensateur (C = 10 μF) sont reliés en série avec une source c.a. dont la tension efficace vaut 25 V. Trouvez : (a) la fréquence de résonance f_0 ; (b) les fréquences pour lesquelles la valeur efficace de l'intensité du courant est égale à 50 % de sa valeur à f_0. (c) Tracez le graphe de I en fonction de la fréquence d'oscillation f de la tension sur un intervalle allant de 0,2f_0 à 2f_0. Ce graphe confirme-t-il la réponse obtenue en (b) ?

E24. (II) Une bobine d'inductance 80 mH est reliée en série avec une résistance de 120 Ω et un condensateur. La fréquence de la source c.a. vaut 600 Hz. (a) Pour quelle(s) valeur(s) de C aura-t-on une impédance de 200 Ω ? (b) Pour chacune des valeurs de C que vous venez de trouver, calculez l'impédance qu'aurait le circuit si le condensateur était monté en parallèle avec les autres éléments du circuit.

12.8 Puissance dans un circuit *RLC* série

E25. MonLab (I) Un générateur c.a. fonctionnant à 90 Hz a une tension efficace de 100 V. Il est relié à un circuit série comportant les éléments R = 20 Ω,

$C = 80$ μF et $L = 9$ mH. Trouvez: (a) le facteur de puissance; (b) la puissance moyenne fournie par le générateur.

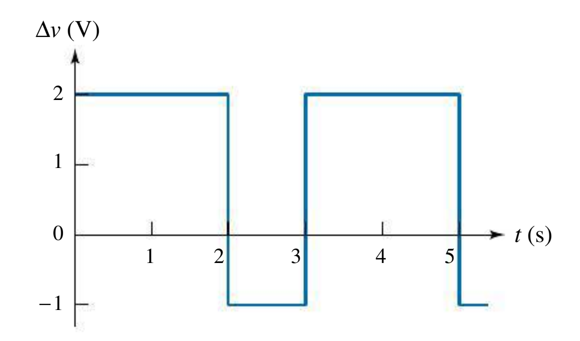
E26. (I) Dans un circuit *RLC* série, la source a une tension efficace de 120 V. L'impédance vaut 110 Ω et la résistance 40 Ω. Trouvez: (a) la puissance moyenne fournie par la source; (b) le facteur de puissance.

E27. (I) Dans un circuit *RLC* série, la source a une tension maximale de 200 V et une fréquence de $50/\pi$. On donne $R = 15$ Ω, $C = 200$ μF et $L = 0{,}2$ H. Trouvez: (a) Z_L et Z_C; (b) la constante de phase de la tension; (c) la puissance moyenne fournie par la source; (d) le facteur de puissance.

E28. (I) Une source de tension efficace 120 V fait circuler un courant de 8 A dans un moteur. Si le moteur consomme une puissance moyenne de 800 W, quel est son facteur de puissance ?

E29. (I) Dans un circuit *RLC* série, la source de tension efficace 100 V fonctionne à 60 Hz. La résistance vaut 24 Ω et la constante de phase de la tension, 0,925 rad (+53°). Quelle est la puissance moyenne fournie par la source ?

E30. (II) Pour la fonction représentée à la figure 12.37, trouvez (a) la tension moyenne; (b) la tension efficace.



▲ **Figure 12.37**

Exercice 30.

E31. (I) Montrez que la puissance moyenne fournie à un circuit *RLC* série peut s'écrire $P = (\Delta V \cos \phi)^2/R$, où ΔV est la tension efficace fournie par la source.

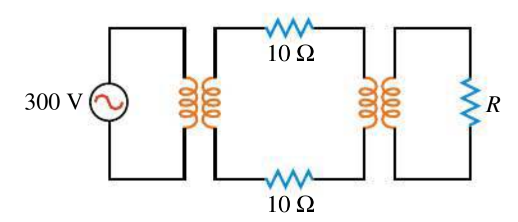
E32. (II) Un radiateur purement résistif de 1 kW (résistance pure) est alimenté par une source de tension efficace 120 V à 60 Hz. (a) Quelle bobine reliée en série avec le radiateur permet de réduire de moitié la puissance fournie ? (b) Quelle est alors la constante de phase ?

E33. (II) Le courant instantané dans un circuit *RLC* série est donné par $i = 0{,}06 \sin(320t)$, où t est en secondes et i en ampères. Les trois éléments sont $R = 24$ Ω, $L = 18$ mH et $C = 70$ μF. Écrivez l'expression de la tension instantanée aux bornes de la source.

12.9 Transformateur

E34. (II) Un transformateur idéal abaisseur de tension dans le rapport 5:1 fournit à un édifice une puissance moyenne de 40 kW sous une tension efficace de 240 V. Si la ligne de transmission électrique (reliée au primaire) a une résistance totale de 1,2 Ω, quelle est la valeur moyenne du taux de dissipation thermique dans la ligne ? On suppose que le circuit de l'édifice, qui joue le rôle de secondaire, est purement résistif.

E35. (II) La figure 12.38 représente un dispositif simple de transmission de puissance. Un générateur c.a. fournit 15 A (valeur efficace) sous une tension efficace de 300 V. Un transformateur survolteur élève cette tension et la puissance est transmise par des lignes dont la résistance totale est égale à 20 Ω. Un transformateur abaisseur de tension alimente une résistance *R*. Quelle est la valeur moyenne du taux de dissipation thermique dans les lignes si la tension du générateur subit une élévation jusqu'à (a) 5 kV; (b) 20 kV ?



▲ **Figure 12.38**

Exercice 35.

E36. (I) Dans un transformateur abaisseur de tension dans le rapport 5:1, la tension efficace aux bornes du primaire est égale à 120 V et le rendement vaut 90 %. Le courant efficace circulant dans le primaire a une intensité de 2 A et il est en retard de $\pi/30$ rad sur la tension. (a) Quelle est la puissance à l'entrée ? (b) Quelle est la puissance à la sortie ? (c) Si le circuit secondaire a un facteur de puissance de 0,75, quelle est la valeur efficace de l'intensité du courant dans le secondaire ?

E37. (I) Dans un transformateur abaisseur de tension, la tension aux bornes du primaire est égale à 600 V et la tension aux bornes du secondaire à 120 V. Le secondaire comporte 80 spires. (a) Quel est le nombre de spires de l'enroulement primaire ? (b) Si la résistance de charge au secondaire est $R_2 = 10$ Ω, quel est le courant dans le primaire ?

E38. MonLab (I) Un transformateur idéal comporte 400 spires dans l'enroulement primaire et 50 spires dans le secondaire. Lorsque la tension efficace aux bornes du primaire vaut 120 V, l'intensité efficace du courant vaut 2,4 A. Déterminez la valeur efficace de l'intensité du courant et la tension efficace au secondaire.

PROBLÈMES

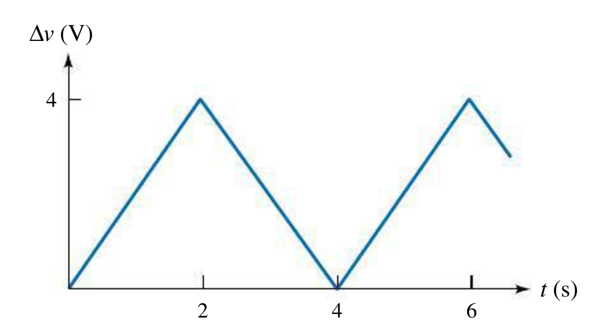
(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

P1. (I) Montrez que la puissance moyenne fournie à un circuit RLC série peut s'écrire

$$P = \frac{\omega^2 R \Delta V^2}{\omega^2 R^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2 L^2}$$

P2. (II) L'équation 12.28 exprime la puissance moyenne fournie à un circuit RLC série. Pour quelle valeur de la fréquence angulaire cette puissance est-elle maximale ? (*Indice*: Trouvez dP/dω.)

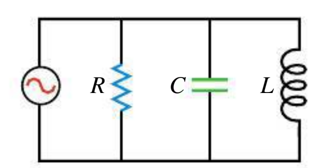
P3. (I) Pour la fonction représentée à la figure 12.39, déterminez: (a) la tension moyenne; (b) la tension efficace.



▲ **Figure 12.39**

Problème 3.

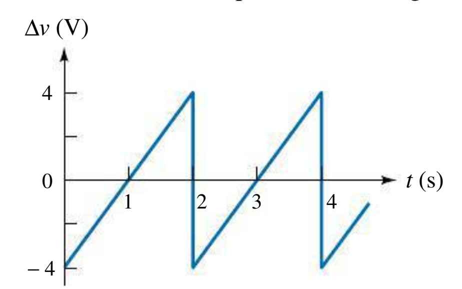
P4. (I) Dans un circuit RLC parallèle, comme celui de la figure 12.40, une source c.a. de tension maximale 100 V est branchée à trois éléments dont les caractéristiques sont $R = 15\ \Omega$, $C = 200\ \mu$F et $L = 0{,}3$ mH. Si la fréquence angulaire de la source est de 60 Hz, trouvez (a) l'impédance du circuit; (b) la fréquence de résonance du circuit; (c) la puissance moyenne fournie au circuit.



▲ **Figure 12.40**

Problème 4.

P5. (I) Quelle est la tension efficace correspondant à la fonction en dents de scie représentée à la figure 12.41 ?



▲ **Figure 12.41**

Problème 5.

P6. (I) L'impédance d'un circuit RLC série est minimale à la fréquence de résonance f_0. Une impédance donnée Z est supérieure à sa valeur minimale lorsque la fréquence est égale à f_B, inférieure à f_0 ou f_H, supérieure à f_0 (figure 12.42). Montrez que f_0 est la moyenne géométrique des deux autres fréquences, c'est-à-dire que

$$f_0 = \sqrt{f_B f_H}$$

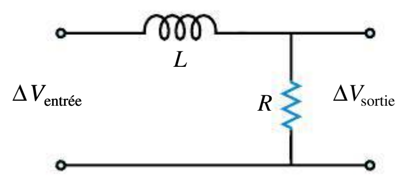
▲ **Figure 12.42**

Problème 6.

P7. (I) La figure 12.43 représente un circuit qui tient lieu de filtre rudimentaire. Si la tension d'entrée contient un intervalle de fréquences, la sortie est essentiellement composée des fréquences les plus élevées ou les plus basses. (a) Montrez que

$$\frac{\Delta V_{\text{sortie}}}{\Delta V_{\text{entrée}}} = \frac{R}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}}$$

On donne $R = 10\ \Omega$, $L = 25$ mH et $\Delta V_{\text{entrée}} = 100$ V. Déterminez ΔV_{sortie} pour les valeurs suivantes des fréquences de la tension d'entrée: (b) 40 Hz; (c) 400 Hz; (d) 4000 Hz. (e) Pour mieux comprendre le fonctionnement du filtre, tracez le graphe de ΔV_{sortie} en fonction de ω sur l'intervalle allant de 0 à 5000 rad/s. (f) Pour quelle valeur de ω le taux de changement de ΔV_{sortie} est-il le plus élevé ? (g) S'agit-il d'un filtre passe-bas ou d'un filtre passe-haut ?



▲ **Figure 12.43**

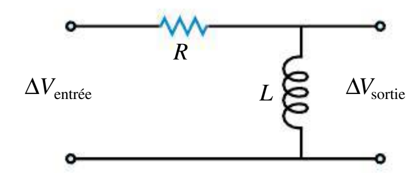
Problème 7.

P8. (I) Soit le circuit-filtre représenté à la figure 12.44. (a) Montrez que

$$\frac{\Delta V_{\text{sortie}}}{\Delta V_{\text{entrée}}} = \frac{\omega L}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}}$$

Utilisez les mêmes données que celles du problème P7 et déterminez ΔV_{sortie} pour les valeurs suivantes des fréquences de la tension d'entrée: (b) 40 Hz;

(c) 400 Hz ; (d) 4000 Hz. (e) Pour mieux comprendre le fonctionnement du filtre, tracez le graphe de ΔV_{sortie} en fonction de ω sur l'intervalle allant de 0 à 5000 rad/s. (f) Pour quelle valeur de $\omega \Delta V_{\text{sortie}}$ est-il supérieur à 90 V ? (g) S'agit-il d'un filtre passe-bas ou d'un filtre passe-haut ?



▲ **Figure 12.44**

Problème 8.

P9. (I) Une source c.a. fournit à un circuit RLC série un courant d'intensité $i = 4 \sin(377t)$ et une tension $\Delta v = 160 \sin(377t + \phi)$, où t est en secondes, i en ampères et Δv en volts. Sachant que $R = 12{,}5\ \Omega$, $Z_C = 52\ \Omega$ et $\phi < 0$, trouvez L.

P10. (II) (a) Montrez que la charge maximale Q_0 du condensateur dans un circuit RLC série est $Q_0 = \Delta v_0/\omega Z$, où Δv_0 est la tension maximale de la source, ω la fréquence angulaire et Z l'impédance. (b) Montrez que Q_0 prend sa valeur maximale lorsque la fréquence angulaire est égale à

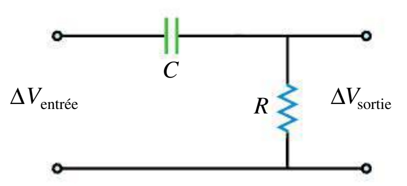
$$\omega_{\max} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{2L^2}}$$

P11. (I) Dans le circuit RLC série de la figure 12.17 (p. 497), on donne $R = 8\ \Omega$, $L = 40$ mH, $C = 20\ \mu$F, la tension maximale de la source $\Delta v_0 = 100$ V et $f = 200/\pi$ Hz. Trouvez la tension maximale aux bornes de (a) R, C et L séparément ; (b) R et C combinés ; (c) C et L combinés.

P12. (I) La figure 12.45 représente un circuit-filtre simple. La tension c.a. d'entrée, $\Delta V_{\text{entrée}}$, est mesurée aux bornes de R et C, alors que la tension de sortie, ΔV_{sortie}, est mesurée aux bornes de R. (a) Montrez que le rapport $\Delta V_{\text{sortie}}/\Delta V_{\text{entrée}}$ s'écrit

$$\frac{\Delta V_{\text{sortie}}}{\Delta V_{\text{entrée}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/\omega^2 R^2 C^2}}$$

(b) Donnez des valeurs raisonnables à R et à C, et tracez le graphe du rapport $\Delta V_{\text{sortie}}/\Delta V_{\text{entrée}}$ en fonction de ω sur l'intervalle allant de 0 à $3/(RC)$. (c) S'agit-il d'un filtre passe-haut ou d'un filtre passe-bas ?



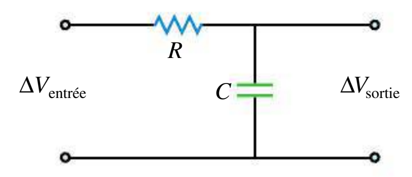
▲ **Figure 12.45**

Problème 12.

P13. (I) Soit le circuit-filtre de la figure 12.46. (a) Montrez que

$$\frac{\Delta V_{\text{sortie}}}{\Delta V_{\text{entrée}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

(b) Donnez des valeurs raisonnables à R et à C, et tracez le graphe du rapport $\Delta V_{\text{sortie}}/\Delta V_{\text{entrée}}$ en fonction de ω sur l'intervalle allant de 0 à $3/(RC)$. (c) S'agit-il d'un filtre passe-bas ou d'un filtre passe-haut ?



▲ **Figure 12.46**

Problème 13.

PROBLÈMES SUPPLÉMENTAIRES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

P14. (II) (a) À partir des données du problème P11, mais en supposant qu'il s'agit d'un circuit RLC parallèle, trouvez l'impédance du circuit. (b) Trouvez la valeur maximale du courant dans la résistance, la bobine et le condensateur.

P15. (I) (a) Servez-vous des données apparaissant à la figure 12.26 (p. 504) pour tracer, en les superposant, les deux graphes de $I(\omega)$ qui y sont présentés. Obtenez-vous le même résultat ? Les deux courbes sont ici relativement symétriques par rapport à la fréquence de résonance, mais ce n'est pas toujours le cas. (b) Modifiez la valeur de R, de C ou de L et explorez les conditions pour lesquelles la symétrie observée précédemment disparaît. Quelle relation doit exister entre les trois paramètres pour que la courbe de $I(\omega)$ soit symétrique par rapport à la fréquence de résonance ?

P16. (I) Servez-vous des données apparaissant à la figure 12.27 (p. 506) pour tracer, en les superposant, les deux graphes de $P(\omega)$ qui y sont présentés. Obtenez-vous le même résultat ?

CHAPITRE 13

LES ÉQUATIONS DE MAXWELL ; LES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES



SOMMAIRE



Pour le plus grand plaisir du campeur, ce feu de camp émet de la lumière visible, beaucoup de radiation infrarouge et une très faible quantité d'autres radiations. Comme nous le verrons dans ce chapitre, toutes ces « émissions » ont un point commun : chacune peut être représentée par le modèle de l'onde électromagnétique. Ce modèle fournit donc une interprétation de la nature de la lumière.

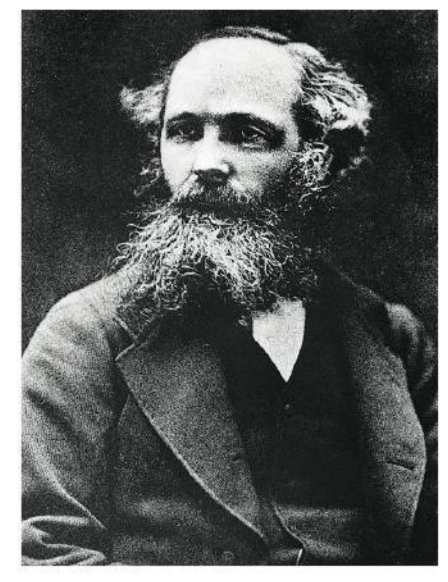
Ce chapitre amorce l'étude de la lumière qui se poursuivra dans la majorité du tome 3, puisque nous y étudierons un premier modèle de la lumière, celui de l'onde électromagnétique. Comme nous le verrons, ce modèle représente la lumière comme des champs électrique et magnétique qui oscillent en s'induisant l'un l'autre.

La nature de la lumière a fait l'objet d'un débat qui figure parmi les plus longs de l'histoire des sciences. Au XVIIe siècle, René Descartes (1596-1650) et Isaac Newton (1642-1727) envisageaient la lumière comme un flux de particules, tandis que Christiaan Huygens (1629-1695) soutenait qu'il s'agissait d'une perturbation dans un milieu matériel que l'on nommait « éther ». Huygens savait

que deux faisceaux lumineux pouvaient se croiser sans avoir d'effet mutuel et il ne pouvait imaginer qu'un flux de particules puisse en faire autant sans provoquer de collisions.

Ce n'est que vers 1820 que des travaux expérimentaux et théoriques ont achevé de convaincre les physiciens que la lumière, lorsqu'elle se propage, se comporte comme une onde transversale. Mais la nature précise des ondes demeurait inconnue. En 1845, Michael Faraday (1791-1867) montra qu'un champ magnétique peut produire un effet sur un rayon lumineux, ce qui lui fit supposer que la lumière est faite de champs électriques et magnétiques. Malheureusement, ses connaissances en mathématiques n'étaient pas suffisantes pour lui permettre de poursuivre dans cette voie d'une façon quantitative.

C'est une expérience apparemment sans rapport, réalisée en 1856, qui vint apporter un indice supplémentaire du lien existant entre l'électromagnétisme et la lumière. Il faut savoir qu'au XIXe siècle, on utilisait deux systèmes d'unités en électromagnétisme : les unités électrostatiques, définies à partir de la loi de Coulomb donnant la force entre des charges, et les unités électromagnétiques, définies à partir d'une expression analogue donnant la « force entre des pôles magnétiques ». Le rapport entre les unités de charge dans ces deux systèmes est égal à $1/(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$ et il a les dimensions d'une vitesse. Or, en 1856, Wilhelm Weber (1804-1891) et Rudolf Hermann Kohlrausch (1809-1858) réussirent à déterminer expérimentalement que ce rapport a pour valeur $3{,}11 \times 10^8$ m/s, une valeur presque identique à la vitesse de la lumière telle que mesurée par Hippolyte Fizeau (1818-1896) en 1849, soit $3{,}15 \times 10^8$ m/s.



▲ **Figure 13.1**
James Clerk Maxwell (1831-1879).

Un jeune admirateur de Faraday nommé James Clerk Maxwell (figure 13.1), qui était convaincu que la proximité de ces deux nombres n'était pas une simple coïncidence, décida d'exploiter l'hypothèse audacieuse de Faraday. Comme nous le verrons à la section 13.1, il apporta au théorème d'Ampère (équation 9.15) une modification subtile et pourtant capitale qui lui permit, en 1865, de prédire l'existence d'ondes électromagnétiques se propageant à la vitesse de la lumière (section 13.3). Sa conclusion inévitable était que la lumière elle-même peut être représentée comme une onde électromagnétique et même qu'elle *est* une onde électromagnétique. Nous étudierons plusieurs propriétés de ces ondes aux sections 13.3 à 13.5 et ensuite le spectre électromagnétique complet (section 13.7).

Deux siècles après que Newton eut expliqué le mouvement des corps par l'inertie et les forces, Maxwell obtenait un succès théorique aussi important : l'explication des phénomènes lumineux et la synthèse entre les disciplines jusqu'alors distinctes de l'optique et de l'électromagnétisme. La vérification expérimentale de cette théorie par Heinrich Hertz (1857-1894) en 1887 et son exploitation commerciale, entre autres par Guglielmo Marconi (1874-1937), sont à l'origine de la radio, de la télévision et des communications par satellite.

Bien que Maxwell faisait de son modèle une interprétation de la *nature* de la lumière, il avait essentiellement tort, car on sait aujourd'hui que son modèle n'explique pas toutes les propriétés de la lumière. À ce jour, les physiciens arrivent à expliquer les observations qui touchent à la *propagation* de la lumière lorsqu'ils représentent celle-ci comme une onde électromagnétique, conformément à la théorie de Maxwell. Toutefois, nous verrons au chapitre 9 du tome 3 que l'*émission* et l'*absorption* de la lumière ne se produisent pas toujours comme Maxwell l'envisageait pour les ondes électromagnétiques. Cela conduira à modifier le modèle de la lumière à l'aide de la notion de photon. Bien qu'il ne soit pas parfait, le modèle de l'onde électromagnétique fonctionne dans une vaste gamme de situations et est encore de la plus grande utilité.

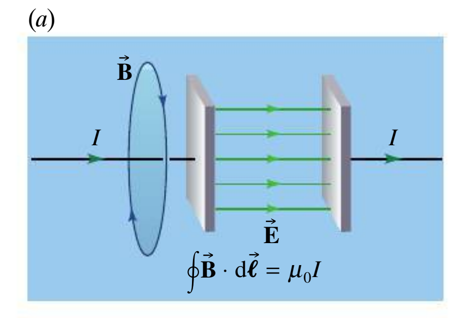
13.1 LE COURANT DE DÉPLACEMENT

À la section 9.4, nous avons vu que, conformément au théorème d'Ampère,

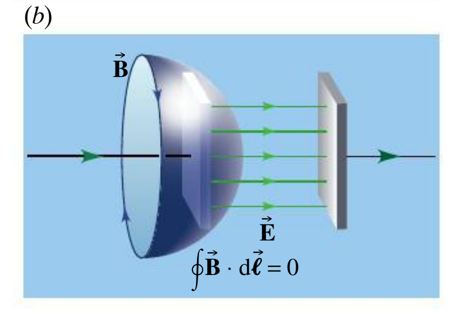
$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \Sigma I$$

l'intégrale curviligne de $\vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell}$ sur un contour fermé est égale à $\mu_0 \Sigma I$, ΣI étant le courant total traversant une surface délimitée par le contour. Lorsque nous avons présenté cette équation, nous avons souligné qu'elle était incomplète (voir la page 379). En effet, elle est incompatible avec l'idée qu'une charge électrique puisse s'accumuler en un endroit de l'espace. Pour illustrer cette difficulté, considérons un courant en train de charger un condensateur (figure 13.2). Si on trace un contour circulaire autour du fil, l'intégrale $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell}$ devrait être non nulle puisqu'il y a un champ magnétique. C'est effectivement ce que donne la version incomplète du théorème d'Ampère si on utilise la surface *plane* délimitée par ce contour (figure 13.2*a*), laquelle est traversée par le courant I. Par contre, considérons la surface illustrée à la figure 13.2*b* : cette surface est délimitée par le même contour, mais englobe une armature du condensateur, de telle sorte qu'elle n'est traversée *par aucun courant électrique*. En conséquence, l'équation ci-dessus appliquée à cette surface prédit que $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = 0$, ce qui contredit nettement le premier résultat !

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 13.2**

Lorsqu'on calcule l'intégrale curviligne $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell}$ sur un contour fermé, la surface que traverse le courant peut englober ou non l'armature du condensateur. Le théorème d'Ampère ne donne pas de réponse cohérente pour ces deux possibilités.

En 1861, Maxwell fut le premier à se rendre compte que le théorème d'Ampère devait être modifié, mais pour des raisons complètement différentes. Maxwell se représentait le champ magnétique comme une succession de tourbillons dans un milieu matériel appelé « éther », et le courant électrique, comme des mouvements de particules dus à ces tourbillons. Bien que l'on considère aujourd'hui cette vision mécaniste comme farfelue, Maxwell put l'utiliser pour prédire avec succès le théorème d'Ampère, de même que l'équation donnant la force magnétique. Les difficultés survinrent quand il voulut utiliser son approche pour expliquer les phénomènes électrostatiques : c'est là qu'il découvrit que le théorème d'Ampère était incompatible avec l'accumulation de charges électrostatiques. Huit mois plus tard, il trouva une solution : en attribuant une propriété d'élasticité à ses tourbillons, il les rendait responsables de deux types de courant : le courant électrique ordinaire I, attribué à leur rotation, et le **courant de déplacement** I_D, attribué à leurs déformations élastiques. Le théorème d'Ampère devait donc être modifié pour tenir compte de ce deuxième type de courant et devenait

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 (I + I_D)$$

Le courant de déplacement imaginé par Maxwell ne circulait que dans les matériaux diélectriques. Il aurait donc traversé la surface illustrée à la figure 13.2*b*, ce qui éliminait le problème. En se basant sur des arguments mécaniques, Maxwell montra que I_D était relié à la variation dans le temps du flux du champ électrique dans le diélectrique par

Courant de déplacement

$$I_D = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \qquad (13.1)$$

Évidemment, les bases conceptuelles qui conduisirent à l'équation ci-dessus sont considérées comme désuètes aujourd'hui et le courant de déplacement tel que le concevait Maxwell n'existe pas. Il avait toutefois vu juste : un terme ayant

les unités d'un courant doit être ajouté au théorème d'Ampère et il s'avère que l'équation ci-dessus est *toujours considérée comme valable aujourd'hui*. En hommage à Maxwell, ce terme est encore appelé aujourd'hui « courant de déplacement », mais il ne désigne qu'un phénomène relié à la variation dans le temps du champ électrique et non plus à quoi que ce soit qui « se déplace ».

En ajoutant ce nouveau terme au théorème d'Ampère, celui-ci prend la forme généralisée suivante :

Théorème d'Ampère-Maxwell

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 \left(\Sigma I + \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t} \right) \qquad (13.2)$$

Appliquons cette équation aux deux surfaces de la figure 13.2, pour montrer qu'elle résoud le problème décrit plus tôt. Dans le cas de la figure 13.2*a*, la surface n'est traversée que par le courant de conduction I, donc l'équation prédit que l'intégrale de ligne $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ est égale à $\mu_0 I$. À la figure 13.2*b*, la surface est traversée par un flux électrique Φ_E. Le champ dans le condensateur étant $E = Q/\varepsilon_0 A$, ce flux est $\Phi_E = EA = Q/\varepsilon_0$. Puisque le condensateur se fait charger, $\varepsilon_0 \mathrm{d}\Phi_E/\mathrm{d}t = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ est non nul et on obtient que l'intégrale de ligne $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$ est égale à $\mu_0 \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$. Or, $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$, le taux de variation de la charge portée par le condensateur, est égal au courant de conduction I qui charge le condensateur. L'intégrale de ligne obtenue selon les deux surfaces est donc la même, comme il se doit.

L'interprétation moderne de l'équation 13.2 est la suivante : on postule qu'un champ électrique variable (celui dont le flux apparaît dans l'équation du courant de déplacement) est responsable, au même titre qu'un courant de conduction, de la *production d'un champ magnétique*. Cette possibilité pour un champ électrique variable de produire un **champ magnétique induit*** est un comportement symétrique à celui formulé par la loi de Faraday, soit la production d'un champ électrique induit par un champ magnétique variable (voir l'équation 10.11). En d'autres termes, dans l'équation 13.2, le premier terme du membre de droite correspond à la production d'un champ magnétique par un courant, telle qu'étudiée au chapitre 9, alors que le second terme du membre de droite correspond à la production d'un champ magnétique par un champ électrique variable. Dans certains cas, par exemple si un condensateur laisse passer des charges entre ses armatures, le contour fermé peut englober à la fois un courant de conduction et un courant de déplacement, auquel cas les deux termes contribuent à la production du champ magnétique.

La modification apportée par Maxwell au théorème d'Ampère, l'une de ses grandes innovations, est un excellent exemple de découverte qui fut faite sur des bases purement théoriques, qui s'avéra par la suite conforme à l'expérience d'une façon inattendue, et qui eut des répercussions extrêmement importantes dans la pratique.

---

* Ne pas confondre ce champ avec $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ind}}$, le champ magnétique produit par le courant induit dont nous avons discuté au chapitre 10. Un champ magnétique induit n'est produit que par un $\vec{\mathbf{E}}$ variable, alors que $\vec{\mathbf{B}}_{\text{ind}}$ est un champ magnétique « ordinaire » produit par un courant de conduction, le courant induit.

Exemple 13.1

(a) Utiliser le théorème d'Ampère-Maxwell pour déterminer en fonction de E le champ magnétique entre les armatures circulaires d'un condensateur plan qui se fait charger. Le rayon des armatures est R. On néglige les effets de bords. (b) Obtenir l'expression de B pour un point à une distance $r > R$ de l'axe des plaques.

Solution

(a) Puisqu'on néglige les effets de bords, le champ électrique est uniforme. La situation a donc une symétrie cylindrique (cette symétrie est encore meilleure si on suppose que les fils sont raccordés au centre des armatures et sont longs et rectilignes). Pour profiter de cette symétrie, on choisit comme parcours d'intégration une boucle circulaire de rayon r normale aux lignes de champ $\vec{\mathbf{E}}$ (figure 13.3). ■

Le champ magnétique induit a la même symétrie cylindrique que sa source, le champ électrique variable (voir la section 3.3). On en déduit que $\vec{\mathbf{B}}$ a le même module en tout point du parcours d'intégration circulaire. De plus, $\vec{\mathbf{B}}$ est toujours parallèle à $d\vec{\ell}$. Par conséquent,

$$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = B\oint d\vec{\ell} = B(2\pi r)$$

Le flux électrique traversant la boucle étant $\Phi_E = E(\pi r^2)$, l'équation 13.2 (avec $\sum I = 0$) devient

$$B(2\pi r) = \mu_0\varepsilon_0(\pi r^2)\frac{dE}{dt}$$

$$(r < R) \qquad B = \frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0\left(\frac{dE}{dt}\right)r$$

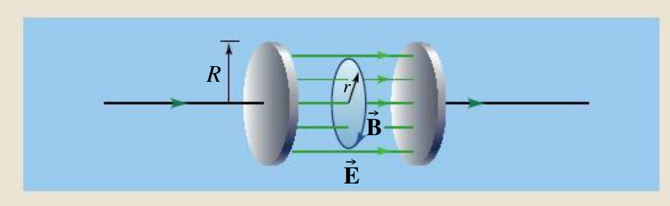
Notons que $B \propto r$, tout comme à l'*intérieur* d'un fil parcouru par un courant (voir la figure 9.33*c*, p. 381). ■

(b) Sur un contour circulaire où $r > R$, l'intégrale curviligne de $\vec{\mathbf{B}}$ est encore $B(2\pi r)$, mais le flux électrique n'est plus $E(\pi r^2)$. En effet, les effets de bords ayant été négligés, le champ électrique conserve sa valeur uniforme jusqu'à une distance $r = R$ du centre, puis chute ensuite à zéro. Son flux devient donc $\Phi_E = E(\pi R^2)$. En utilisant ces expressions dans l'équation 13.2 (avec $\sum I = 0$), on obtient

$$B = \mu_0\varepsilon_0\frac{R^2}{2r}\frac{dE}{dt}$$

On note cette fois que le champ décroît en $1/r$, tout comme à l'*extérieur* d'un fil parcouru par un courant (voir la figure 9.33*c*, p. 381). ■

Vérifier que pour $r = R$ cette expression concorde avec l'expression trouvée en (a).



▲ **Figure 13.3**

Pour calculer le module B du champ correspondant à un champ électrique variable entre deux armatures circulaires de condensateur, on choisit un parcours circulaire.

13.2 LES ÉQUATIONS DE MAXWELL

En tenant compte de la modification apportée par Maxwell, nous pouvons maintenant écrire toutes les équations fondamentales de l'électromagnétisme. Il y en a quatre :

Équations de Maxwell

Gauss $$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0} \qquad (13.3)$$

Gauss $$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \qquad (13.4)$$

Faraday $$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad (13.5)$$

Ampère-Maxwell $$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0\left(\Sigma I + \varepsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt}\right) \qquad (13.6)$$

Ces quatre équations sont suffisantes pour décrire tous les comportements des champs électrique et magnétique *dans le vide*. Pour qu'elles soient aussi valables dans un matériau diélectrique ou magnétisé, on doit leur appliquer de petites modifications, ou alors tenir compte de toutes les sources microscopiques de champ dans le matériau (voir la section 3.6, par exemple). Sous la présente forme, elles s'appliquent à des surfaces ou à des parcours d'intégration considérés comme immobiles. Rappelons rapidement leur origine, leur sens et la façon dont elles doivent être appliquées :

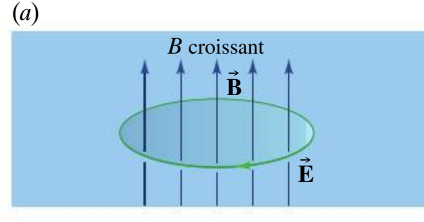
- Le théorème de Gauss (équation 13.3) a été démontré au chapitre 3 à partir de la loi de Coulomb. Dans une situation électrostatique, il est effectivement équivalent à cette dernière loi. Toutefois, il s'applique aussi aux champs électriques induits produits par des $\vec{\mathbf{B}}$ variables, puisque ceux-ci ont des lignes de champ qui forment des boucles fermées (donc un flux nul). Le théorème de Gauss définit donc une relation *générale* entre le champ électrique et la charge. Rappelons qu'il faut considérer qu'un flux est positif quand il *quitte* la surface fermée.

- L'équation 13.4, souvent appelée « théorème de Gauss pour le champ magnétique », indique que le flux magnétique traversant toute surface fermée est nul, ce qui équivaut à dire que les lignes de champ magnétique forment toujours des boucles fermées. Un peu comme le théorème de Gauss qui a initialement été démontré à partir de la loi de Coulomb, cette équation pourrait être démontrée sur la base du fait que des monopôles magnétiques n'ont jamais été observés (voir la figure 8.2, p. 309). Toutefois, elle s'applique aussi aux champs magnétiques induits produits par des $\vec{\mathbf{E}}$ variables, puisque ceux-ci ont aussi des lignes de champ formant des boucles fermées. Elle définit donc un comportement *général* du champ magnétique.

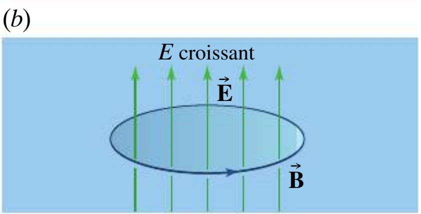
- La loi de Faraday (équation 13.5) découle directement de l'expérience comme nous l'avons montré aux sections 10.1 et 10.5 : un champ électrique induit est produit par un champ magnétique variable dans le temps. Rappelons que cette équation obéit à une convention de signes : avec le pouce de la main droite placé le long du champ magnétique, le sens dans lequel s'enroulent les doigts est celui dans lequel il faut réaliser l'intégrale. Le signe négatif dans cette équation signifie que le champ électrique induit est de sens opposé à celui de l'intégrale, comme on le voit à la figure 13.4*a*.

- Selon le théorème d'Ampère-Maxwell (équation 13.6), un champ magnétique est produit par un courant de conduction I ou induit par un champ électrique variable. Dans le cas du champ magnétique induit, la règle de la main droite et le champ électrique déterminent le sens de l'intégration selon la même convention de signes que celle qui prévaut pour la loi de Faraday. Le signe positif dans cette équation signifie que le champ magnétique induit est de même sens que celui de l'intégrale, comme on le voit à la figure 13.4*b*.

(*a*)



(*b*)



▲ **Figure 13.4**

(*a*) Le sens du champ électrique prédit par la loi de Faraday lorsque le flux magnétique augmente. (*b*) Le sens du champ magnétique prédit par le théorème d'Ampère-Maxwell lorsque le flux électrique augmente.

Les quatre équations ci-dessus sont collectivement appelées les **équations de Maxwell**. Avec l'équation donnant la force de Lorentz, $\vec{\mathbf{F}} = q(\vec{\mathbf{E}} + \vec{\mathbf{v}} \times \vec{\mathbf{B}})$, ces quatre équations décrivent tous les phénomènes électromagnétiques dans le vide.

Les quatre équations portent le nom de Maxwell en raison du rôle que celui-ci a joué dans leur unification. En utilisant son interprétation mécanique de la nature des champs, Maxwell parvint en 1862 à démontrer un résultat équivalent à chacune de ces quatre équations. Une décennie plus tard, il dépouilla toute sa théorie des artifices mécaniques qui en avaient permis l'élaboration : il utilisa plutôt une approche fondée sur l'énergie et parvint à prédire la forme exacte

des quatre équations ci-dessus. (Il avait en réalité présenté vingt équations. En 1885, Oliver Heaviside (1850-1925) réussit à réduire leur nombre à quatre en utilisant la notation vectorielle qu'il avait élaborée.)

13.3 LES ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

Nous verrons au chapitre 2 du tome 3 qu'une onde mécanique qui se propage sur l'axe des x à la vitesse de phase v, comme celle qu'on obtiendrait en agitant l'extrémité d'une très longue corde tendue, vérifie l'équation d'onde :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

où y est la variable affectée par la déformation associée au passage de l'onde. La solution la plus simple de cette équation d'onde est l'onde $y = A \sin(kx - \omega t)$, qu'on peut voir comme le profil $y = A \sin(kx)$ se déplaçant vers la droite à une vitesse $v = \omega/k$ (vérifiez par substitution qu'il s'agit d'une solution).

L'équation d'onde ci-dessus découle de la deuxième loi de Newton : quand le milieu matériel où se propage l'onde est déformé, les forces internes au milieu tendent à restituer l'équilibre, ce qui permet à l'onde de se propager. Fondamentalement, une onde mécanique nécessite donc un milieu de propagation matériel (capable d'exercer des forces sur les masses qui le composent).

En 1862, Maxwell utilisa les quatre équations que nous avons présentées à la section précédente pour démontrer que des champs électriques et magnétiques variables dans le temps *satisfont eux aussi à une équation d'onde* (voir la section 13.8). Cela permet de prédire qu'ils peuvent se propager comme se propage la déformation élastique dans une onde mécanique, en formant une **onde électromagnétique**. La différence fondamentale est la suivante : dans une onde mécanique, ce qui se propage est une déformation élastique et le mécanisme qui en assure la propagation est une force qui agit sur la masse des particules du milieu ; dans une onde électromagnétique, ce qui se propage est un champ et le mécanisme est celui de l'induction électromagnétique. En d'autres termes, d'après la loi de Faraday, la variation d'un champ $\vec{\mathbf{B}}$ fait apparaître un champ $\vec{\mathbf{E}}$, et d'après le théorème d'Ampère-Maxwell, la variation d'un champ $\vec{\mathbf{E}}$ fait apparaître un champ $\vec{\mathbf{B}}$. C'est ce couplage de champs électriques et magnétiques variables qui est à l'origine des ondes électromagnétiques. Or, cette induction mutuelle peut très bien se produire *en l'absence de milieu matériel*, donc les ondes électromagnétiques peuvent voyager dans le vide. Avoir imaginé ce nouveau type d'onde est le résultat le plus important de la théorie de Maxwell*.

Différence entre onde mécanique et onde électromagnétique

Comment obtenir l'équation d'onde pour des champs ? À partir des équations de Faraday et d'Ampère-Maxwell, il est possible d'établir, pour chaque type de champ, une équation générale décrivant sa variation dans l'espace et dans le temps, ce qui dépasse le cadre de ce manuel. Toutefois, en supposant que le champ électrique n'existe que dans la direction y, $\vec{\mathbf{E}} = E_y\vec{\mathbf{j}}$, et que le champ magnétique n'a qu'une composante selon z, $\vec{\mathbf{B}} = B_z\vec{\mathbf{k}}$; en ajoutant aussi que nous sommes dans le vide et loin des sources de champ, on peut montrer (voir

* Pour Maxwell, les ondes électromagnétiques n'étaient pas si différentes des ondes mécaniques puisque les champs étaient vus comme une déformation de l'éther. C'est seulement en 1905 que le concept d'éther a été abandonné et qu'on a accepté que des champs pouvaient s'établir dans le vide (voir le chapitre 8 du tome 3).

la section 13.8) que les champs satisfont aux équations suivantes, qui sont un cas particulier des **équations d'onde de Maxwell** :

Équations d'onde de Maxwell

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \right) \qquad (13.7)$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} \right) \qquad (13.8)$$

En comparant ces équations avec l'équation d'onde mécanique donnée au début de cette section, on constate que la vitesse de propagation de l'onde électromagnétique s'écrit

Vitesse de propagation d'une onde électromagnétique

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \qquad (13.9)$$

Sachant que $\mu_0 = 4\pi \times 10^7$ H/m et $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F/m, on trouve

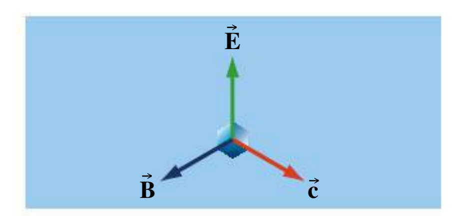
$$v = 3{,}00 \times 10^8 \text{ m/s}$$

Cette valeur correspond *exactement* à la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide, c. Il devient donc évident que la lumière peut être représentée comme une onde électromagnétique.

Au chapitre 2, nous avons dit qu'il serait impossible de concevoir l'existence d'ondes électromagnétiques si les champs pouvaient être modifiés sans délai (voir la page 34). Nous pouvons maintenant vérifier pourquoi : si on substitue l'équation 13.9 dans les équations d'onde de Maxwell, le facteur $\mu_0 \varepsilon_0$ devient $1/v^2$. Si la vitesse était infinie, le terme de droite des équations 13.7 et 13.8 deviendrait donc nul, ce qui ne correspond plus à la forme d'une équation d'onde.

Les solutions les plus simples des équations 13.7 et 13.8 sont

$$E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$$
$$B_z = B_0 \sin(kx - \omega t)$$



▲ **Figure 13.5**

Dans une onde électromagnétique plane, le champ électrique et le champ magnétique sont perpendiculaires entre eux et perpendiculaires à la direction de propagation.

où $k = 2\pi/\lambda$ est le *nombre d'onde* et λ est la *longueur d'onde* (voir le chapitre 2 du tome 3). D'après ces équations, on voit qu'en tout point $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ sont *en phase* et que les conditions imposées plus haut à ces vecteurs les rendent perpendiculaires. Puisque ces champs varient dans la direction x, il convient aussi de définir un vecteur $\vec{\mathbf{c}}$, représentant la propagation de l'onde électromagnétique et dont le module est donné par l'équation 13.9. Ce vecteur est perpendiculaire aux deux champs comme le montre la figure 13.5. Comme la direction de propagation reste fixe, on parle d'ondes électromagnétiques *planes*. De plus, nous verrons à la section 13.8 que les modules des champs sont liés par la relation suivante :

Relation entre les champs électrique et magnétique d'une onde

$$E = cB \qquad (13.10)$$

Il existe deux représentations courantes d'une onde électromagnétique plane. La première (figure 13.6) consiste à représenter un vecteur dont le module et le sens varient de façon sinusoïdale. Pour une onde plane qui se propage dans la direction des x, le module de $\vec{\mathbf{E}}$ ou de $\vec{\mathbf{B}}$ est le même en tout point d'un plan yz quelconque, alors il suffit de le représenter en chaque point d'une *droite*. Dans la seconde représentation (figure 13.7), la densité des lignes de champ correspond au module variable des champs.

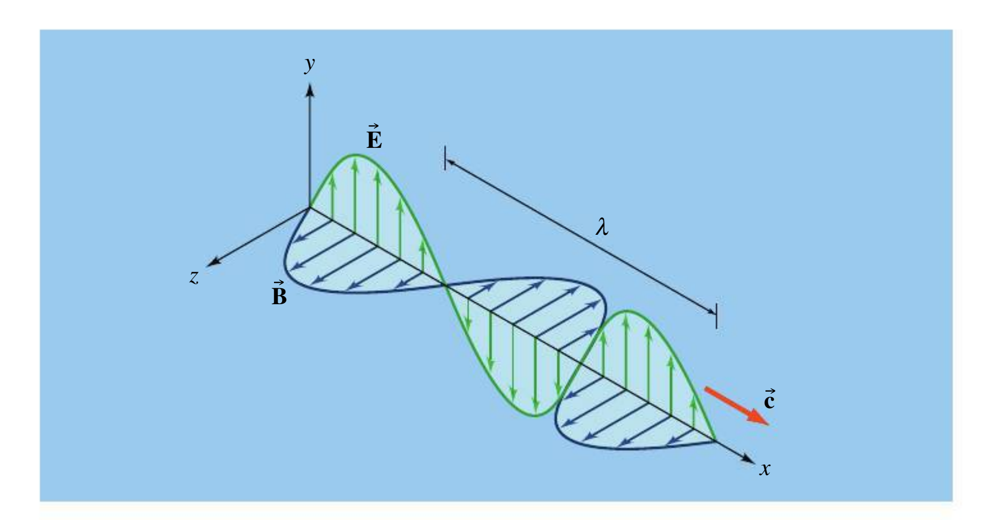


Figure 13.6

Une représentation d'ondes électromagnétiques se propageant le long de l'axe des x positifs. Dans une onde plane, les champs électrique et magnétique ont chacun un module en tout point d'un plan yz quelconque. Les variations des champs sont représentées par des fonctions sinusoïdales.

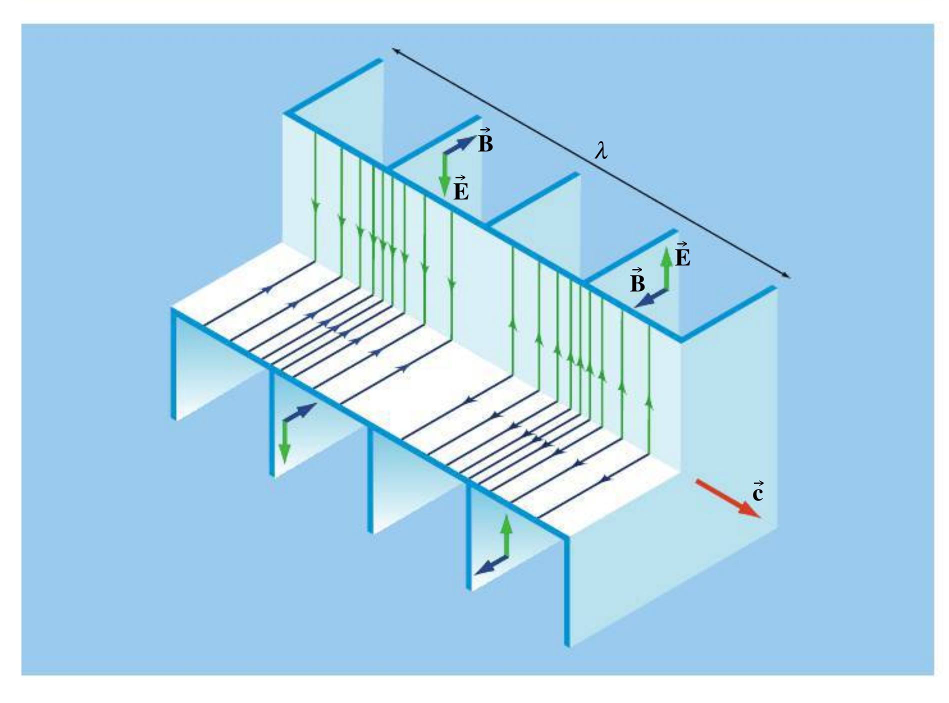


Figure 13.7

La représentation d'une onde électromagnétique plane dans laquelle la variation des champs est représentée par la densité variable des lignes de champ.

Ces représentations graphiques permettent de visualiser un effet important des ondes électromagnétiques : si l'on place un fil rectiligne parallèlement au champ $\vec{\mathbf{E}}$, un courant oscillant apparaît dans le fil. Si l'on place une spire dans un plan normal à $\vec{\mathbf{B}}$, la variation du flux magnétique va induire un courant oscillant. C'est pourquoi les distributeurs utilisent des antennes rectilignes et circulaires pour la réception (et l'émission) des ondes radio.

Au XIXe siècle, on envisageait les constantes μ_0 et ε_0 comme étant liées aux propriétés de l'*éther*, puisque c'était le milieu matériel dans lequel les champs étaient censés s'établir, et les ondes électromagnétiques, se propager. Toutefois, la notion d'éther ayant été abandonnée et remplacée par un concept de champs

pouvant s'établir dans le vide, ces constantes sont maintenant appelées *permittivité* et *perméabilité du vide*. Toutefois, lorsqu'ils se propagent dans une substance, les champs interagissent avec les charges des atomes. L'intensité de l'interaction dépend de la permittivité ε et de la perméabilité μ de la substance en question. Il en résulte une réduction de la vitesse de la lumière de c à $1/\sqrt{\mu\varepsilon}$. La permittivité d'une substance est tout simplement la permittivité du vide multipliée par sa constante diélectrique κ. De même, la perméabilité d'une substance est la perméabilité du vide multipliée par la perméabilité relative κ_m de la substance.

13.4 LA PROPAGATION DE L'ÉNERGIE ET LE VECTEUR DE POYNTING

La lumière et la chaleur que nous procurent les rayons du Soleil nous montrent que les ondes électromagnétiques transportent de l'énergie. Nous allons maintenant déterminer l'expression donnant la densité d'énergie transportée par une telle onde dans le vide.

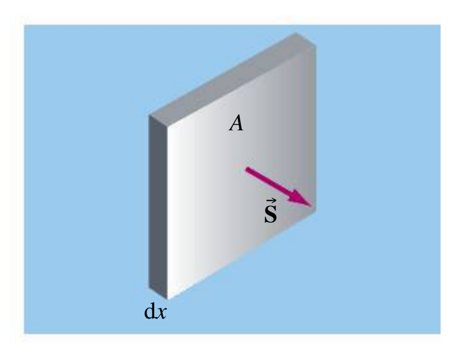
Premièrement, rappelons que tout champ électrique ou magnétique possède de l'énergie, qu'il forme ou non une onde électromagnétique. En effet, comme nous l'avons expliqué à la section 5.4, l'énergie électrique emmagasinée dans un système de charges *statiques* peut être exprimée indifféremment en fonction des charges sources ou en fonction du champ électrique qu'elles produisent. De même, nous avons vu à la section 11.5 que l'énergie magnétique produite par des courants *constants* peut être exprimée indifféremment en fonction des courants sources ou en fonction du champ magnétique qu'ils produisent. Toutefois, les situations (non statiques et constantes) où il y a production d'un champ électrique ou magnétique *induit* sont révélatrices. En particulier, si on représente la lumière comme une onde électromagnétique, alors on doit concevoir que les champs induits qui la constituent peuvent posséder de l'énergie, puisque celle-ci ne peut clairement plus être exprimée en fonction des charges sources qui sont très distantes. C'est cet argument qui nous a poussés, aux sections 5.4 et 11.5, à interpréter que *toute* énergie électrique ou magnétique était portée par les champs et non par les charges ayant produit ces champs. Les densités d'énergie des champs électrique et magnétique dans le vide sont données par l'équation 5.10 et l'équation 11.16, tirées respectivement de ces deux sections :

$$u_E = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2; \quad u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \tag{13.11}$$

Ces équations expriment la densité d'énergie portée par tout champ, qu'il soit rencontré tant dans une situation de charges statiques, de courants constants, d'induction ou dans une onde électromagnétique.

Deuxièmement, considérons le cas particulier d'une onde électromagnétique plane. Puisque $E = cB = B/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ pour une telle onde, les valeurs instantanées des densités d'énergie données par l'équation 13.11 sont égales. La *densité d'énergie totale* $u = u_E + u_B$, est donc

$$u = \varepsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} EB \tag{13.12}$$



▲ **Figure 13.8**

L'énergie contenue entre deux plans d'aire A et distants de dx est d$U = u(A\,\mathrm{d}x)$, où u est la densité d'énergie de l'onde électromagnétique.

Considérons deux surfaces planes, ayant chacune une aire A, qui sont séparées d'une distance dx et normales à la direction de propagation de l'onde (figure 13.8).

L'énergie totale dans le volume compris entre leurs plans est $dU = u(A\ dx)$. Le taux S auquel cette énergie traverse une aire unitaire normale à la direction de propagation est

$$S = \frac{1}{A}\frac{dU}{dt} \qquad (13.13)$$

Puisque l'énergie est transportée par les champs et que l'onde électromagnétique voyage à la vitesse c, l'énergie se propage également à cette vitesse. Par conséquent, $dU/dt = uA\ dx/dt = uAc$ et donc $S = uc$. En substituant l'équation 13.12 et $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$, on trouve

$$S = uc = \frac{EB}{\mu_0} \qquad (13.14)$$

On remarque (figure 13.8) que ce flux d'énergie est perpendiculaire à la fois à $\vec{\mathbf{E}}$ et à $\vec{\mathbf{B}}$. En 1884, John Henry Poynting (1852-1914) utilisa l'analyse vectorielle pour rendre compte de cet aspect et de l'équation 13.14, sans même avoir à supposer que les champs formaient une onde. La discussion de la « situation générale » qui termine cette section présentera brièvement sa démarche, qui lui permit d'obtenir une forme vectorielle de l'équation 13.14. Ce **vecteur de Poynting** est défini par

Vecteur de Poynting

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}}{\mu_0} \qquad (13.15)$$

Le module de $\vec{\mathbf{S}}$ correspond à une intensité, c'est-à-dire à la puissance instantanée qui traverse une aire unitaire normale à la direction de propagation. L'orientation de $\vec{\mathbf{S}}$ correspond à celle du flux d'énergie. Pour une onde électromagnétique, le module de $\vec{\mathbf{S}}$ à un endroit donné fluctue rapidement dans le temps. L'intensité moyenne de l'onde, qui est la valeur moyenne de S, est souvent plus utile. En tout point de l'espace (par exemple en $x = 0$), le produit EB dans l'équation 13.14 est égal à $|E_y B_z| = E_0 B_0 \sin^2(\omega t)$. La moyenne de $\sin^2(\omega t)$ sur une période est égale à $\frac{1}{2}$. L'**intensité moyenne** pour une onde électromagnétique plane s'écrit donc

Intensité moyenne d'une onde électromagnétique

$$S_{\text{moy}} = u_{\text{moy}}c = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} \qquad (13.16a)$$

La grandeur S_{moy}, mesurée en watts par mètre carré (W/m^2), est la puissance moyenne incidente par aire unitaire normale à la direction de propagation. L'intensité moyenne d'une onde *plane* ne diminue pas pendant qu'elle se propage.

D'après l'équation 13.10, les amplitudes sont reliées par $E_0 = cB_0$. Si on substitue ce dernier résultat dans l'équation 13.16*a*, on obtient

$$S_{\text{moy}} = \frac{1}{2c\mu_0}E_0^2 = \frac{c}{2\mu_0}B_0^2 \qquad (13.16b)$$

On note donc que *l'intensité véhiculée par une onde électromagnétique est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'un ou l'autre des champs qui la*

composent. Ce résultat sera très important dans notre étude de l'optique ondulatoire aux chapitres 6 et 7 du tome 3. De plus, dans les chapitres 2 et 3 du tome 3, nous verrons que les ondes mécaniques véhiculent elles aussi une puissance qui est proportionnelle au carré de leur amplitude.

Exemple 13.2

Une station de radio émet un signal de 10 kW à la fréquence de 100 MHz. On suppose, pour simplifier, qu'elle rayonne comme une source ponctuelle. Déterminer, à une distance de 1 km de l'antenne : (a) les amplitudes des champs électrique et magnétique ; (b) l'énergie incidente normale captée en 5 min sur une plaque carrée de 10 cm de côté.

Solution

(a) L'énergie des ondes émises par une source ponctuelle se propage sur des sphères de rayons croissants. L'aire d'une sphère de rayon r étant $4\pi r^2$, l'intensité des ondes à la distance r de la source est

$$S_{\text{moy}} = \frac{\text{puissance moyenne émise}}{4\pi r^2} \qquad \text{(i)}$$

Puisque $E = cB$ et qu'à 1 km de la source on peut supposer que l'onde sphérique ressemble plutôt à une onde plane, on peut écrire S_{moy} en fonction de E_0 :

$$S_{\text{moy}} = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} \qquad \text{(ii)}$$

En égalant les expressions (i) et (ii), on obtient

$$\frac{10^4 \text{ W}}{(4\pi)(10^3 \text{ m})^2} = \frac{E_0^2}{2(3 \times 10^8 \text{ m/s})(4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m})}$$

et l'on trouve

$$E_0 = 0{,}775 \text{ V/m}$$

L'amplitude du champ magnétique est

$$B_0 = \frac{E_0}{c} = 2{,}58 \times 10^{-9} \text{ T}$$

(b) D'après l'équation 13.13, l'énergie incidente dans la direction normale à une aire A pendant un temps Δt est

$$\begin{aligned} \Delta U &= S_{\text{moy}} A \Delta t \\ &= \frac{(10^4 \text{ W})}{(4\pi)(10^3 \text{ m})^2}(0{,}01 \text{ m}^2)(300 \text{ s}) \\ &= 2{,}39 \times 10^{-3} \text{ J} \end{aligned}$$

Exemple 13.3

Une onde électromagnétique plane de fréquence 25 MHz se propage dans le vide selon l'axe des z positifs. En un point donné dans l'espace et le temps, $\vec{\mathbf{E}} = -5\vec{\mathbf{i}}$ V/m. Quel est le champ $\vec{\mathbf{B}}$ en ce point ?

Solution

Le module de $\vec{\mathbf{B}}$ est $B = E/c = 1{,}67 \times 10^{-8}$ T. Le vecteur $\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ doit être dirigé selon l'axe des z positifs. Puisque $(-\vec{\mathbf{i}}) \times (-\vec{\mathbf{j}}) = +\vec{\mathbf{k}}$, on voit que $\vec{\mathbf{B}}$ est dirigé selon l'axe des y négatifs. On a donc $\vec{\mathbf{B}} = -1{,}67 \times 10^{-8}\vec{\mathbf{j}}$ T.

Le vecteur de Poynting en l'absence d'onde électromagnétique

Puisque les champs possèdent de l'énergie en toutes circonstances, on peut attribuer une signification physique au vecteur de Poynting même en l'absence d'ondes électromagnétiques. La démonstration que nous avons donnée de l'équation 13.14 ne rend pas cette idée, car elle se fondait sur une situation où les champs électrique et magnétique formaient une onde électromagnétique plane. Toutefois, l'équation 13.15 fut obtenue par Poynting uniquement à l'aide des équations de Maxwell et est donc entièrement générale. En conséquence, elle prédit que des champs électrique et magnétique non parallèles entre eux peuvent déplacer de l'énergie, même s'ils ne forment *pas* une onde électromagnétique.

La démarche de Poynting, en résumé, n'utilise ni l'équation 13.10 ni les raisonnements des sections 5.4 et 11.5 : elle se fonde exclusivement sur deux

des équations de Maxwell, soit les équations 13.5 et 13.6. À partir de ces deux équations, Poynting démontra une égalité mathématique appelée *théorème de Poynting*. Ce théorème exprime que le *flux* du vecteur $\vec{\mathbf{S}}$ au travers d'une surface fermée quelconque est toujours égal à la somme de deux quantités : 1) la puissance totale dissipée dans toute résistance électrique comprise dans le volume délimité par la surface fermée et 2) la dérivée par rapport au temps de l'énergie emmagasinée dans les champs électrique et magnétique compris dans le volume délimité par la surface fermée (telle que calculée à partir des densités d'énergie données par l'équation 13.11).

Théorème de Poynting

En soi, le théorème de Poynting n'est qu'une identité mathématique. Toutefois, si on interprète ce théorème comme un énoncé de la conservation de l'énergie, on peut s'en servir pour accorder une signification physique au vecteur $\vec{\mathbf{S}}$: le théorème prédit que le flux du vecteur $\vec{\mathbf{S}}$ au travers d'une surface fermée est positif quand la densité d'énergie des champs contenus dans le volume délimité par la surface décroît dans le temps. L'énergie étant conservée, une telle situation implique forcément que de l'énergie a quitté le volume. Le flux du vecteur $\vec{\mathbf{S}}$ est donc interprété comme *le taux avec lequel les champs véhiculent de l'énergie hors du volume*, c'est-à-dire la puissance quittant le volume. De même, le théorème prédit que le flux du vecteur $\vec{\mathbf{S}}$ est négatif si de l'énergie est dissipée par une résistance contenue dans le volume ou que la densité d'énergie des champs dans le volume s'accroît. Dans une telle situation, le flux du vecteur $\vec{\mathbf{S}}$ est interprété comme le taux avec lequel les champs véhiculent de l'énergie *dans le volume*. Comme le raisonnement ayant conduit au théorème de Poynting est général, les champs peuvent entraîner ces transferts d'énergie *même s'ils ne forment pas une onde électromagnétique*.

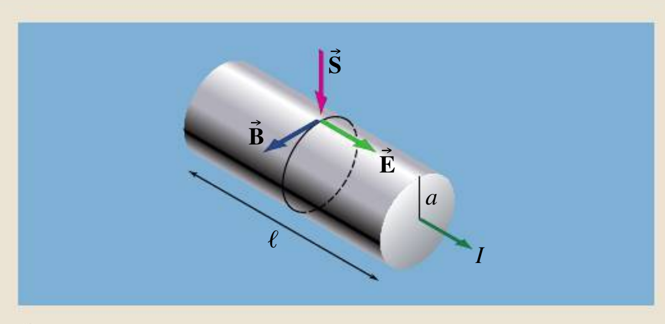
Ce dernier constat permet d'interpréter d'une nouvelle façon les transferts d'énergie dans un circuit électrique simple, où le courant est constant. Au chapitre 6, nous avons expliqué comment la pile établissait le long d'un conducteur une différence de potentiel dans laquelle la charge « tombait » sous l'effet de la force électrique. Cette explication reposait sur l'équation $\Delta U = q\Delta V$, qui exprime l'énergie électrique en fonction de la charge. Sachant que toute énergie est véhiculée par les champs et non par les charges, nous pouvons maintenant préciser la façon dont les champs fournissent de l'énergie à cette charge pour qu'elle poursuive son mouvement malgré les collisions avec les ions du réseau. Selon le théorème de Poynting, le taux auquel les champs fournissent de l'énergie au fil doit correspondre à la puissance électrique dissipée dans le fil. Dans l'exemple suivant, on vérifie cette prédiction en considérant une approximation selon laquelle le champ électrique demeure partout tangent au fil.

Exemple 13.4

Lorsqu'on branche un fil sur une pile, un champ électrique règne dans l'espace entourant le circuit. De plus, le courant dans le fil engendre un champ magnétique. Soit une portion du fil de longueur ℓ le long de laquelle le champ électrique est considéré comme tangent au fil (figure 13.9). Utiliser le vecteur de Poynting pour vérifier que le taux avec lequel les champs environnants fournissent de l'énergie à la portion de fil est égal à la puissance qui y est perdue en chaleur.

Solution

Supposer que le fil rectiligne, dont on considère une portion de longueur ℓ, a un rayon a et une résistance électrique R. On suppose qu'il est parcouru par un courant constant I. On cherche le flux du vecteur de Poynting au travers de la surface, de forme cylindrique, occupée par cette portion de fil. On note tout d'abord que ce flux est nul aux deux extrémités du cylindre,



▲ **Figure 13.9**
Les champs électrique et magnétique correspondant à un courant circulant dans un fil conducteur. Le vecteur de Poynting pour ces champs est orienté vers le fil.

puisque le vecteur de Poynting est partout radial. Le flux se réduit donc à celui au travers de la surface latérale du fil. Pour calculer le module du vecteur de Poynting en un point quelconque de cette surface latérale, nous avons besoin de déterminer le module du champ électrique et le module du champ magnétique à la surface du fil. Si la différence de potentiel aux bornes d'une longueur ℓ est $\Delta V = RI$, le module du champ électrique (constant) le long du fil, et donc à sa surface, s'écrit

$$E = \frac{\Delta V}{\ell} = \frac{RI}{\ell} \qquad \text{(i)}$$

D'après l'équation 9.16, on sait que le module du champ magnétique à la surface du fil est

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \qquad \text{(ii)}$$

Puisque les champs électrique et magnétique à la surface du fil sont perpendiculaires (figure 13.9), il s'ensuit que $\|\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}\| = EB$. Le module du vecteur de Poynting (équation 13.14) est

$$S = \frac{EB}{\mu_0} = \left(\frac{1}{\mu_0}\right)\left(\frac{RI}{\ell}\right)\left(\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\right) = \frac{RI^2}{2\pi a\ell} \qquad \text{(iii)}$$

Mais $A_l = 2\pi a\ell$ étant l'aire de la surface latérale de la portion de fil, l'équation (iii) peut se mettre sous la forme

$$SA_l = RI^2$$

On voit que le taux avec lequel l'énergie électromagnétique est fournie au fil (SA_l) par les champs à la surface est égal au taux de dissipation en chaleur (RI^2). ■

L'exemple précédent montre bel et bien que l'énergie fournie par la pile est acheminée au tronçon de fil par l'intermédiaire des champs *extérieurs* au tronçon. Il est toutefois problématique que le vecteur de Poynting soit radial à la surface du fil, puisque les bornes de la pile, qui fournissent ultimement l'énergie, sont situées aux extrémités du fil.

Une analyse plus rigoureuse aurait montré que le champ électrique à l'extérieur du fil possède bel et bien la composante tangente au fil que nous avons calculée dans l'exemple précédent, mais *possède aussi une composante radiale au fil*. En effet, le fil porte des charges distribuées sur sa surface (voir la figure 6.4*a*, p. 215). Dans le fil, ces charges produisent effectivement un champ électrique tangent au fil. Mais à l'extérieur du fil, la composante tangentielle du champ électrique n'est pas la seule : il est inévitable que les charges de surface *produisent aussi une composante radiale* de champ (voir la figure 6.4*b*, p. 215).

En conséquence, en plus de sa composante radiale au fil, le vecteur de Poynting possède *aussi* à l'extérieur du fil une composante tangente au fil. Cette dernière composante ne change pas la quantité d'énergie qui pénètre le tronçon de fil (donc, laisse inchangé le résultat numérique de l'exemple précédent), mais permet à l'énergie de *longer* le fil, ce qui est plus compatible avec le fait qu'elle provient des bornes de la pile situées aux extrémités du fil*.

* Pour une discussion plus détaillée (et accessible sans mathématiques de niveau postcollégial) de l'effet de ces charges sur le vecteur de Poynting aux environs d'un circuit, voir Galili et Goihbarg, « Energy transfer in electrical circuits : A qualitative account », *American Journal of Physics*, vol. 73, nº 2, février 2005.

13.5 LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT ET LA PRESSION DE RADIATION

Une onde électromagnétique transporte une certaine quantité de mouvement. Nous allons admettre, sans le démontrer, que le module de la *quantité de mouvement* transportée par une onde électromagnétique est lié à l'énergie qu'elle transporte par la relation suivante :

Quantité de mouvement transportée par une onde électromagnétique

$$p = \frac{U}{c} \tag{13.17}$$

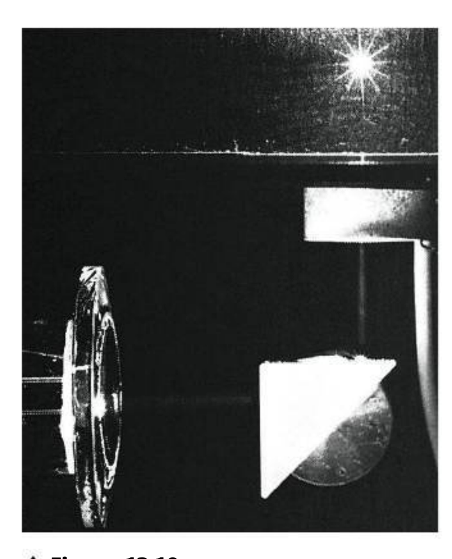
Si l'onde est incidente dans la direction perpendiculaire à une surface et qu'elle est complètement absorbée, l'équation 13.17 nous indique quelle est la quantité de mouvement transmise à la surface. Si la surface est parfaitement réfléchissante, la variation de quantité de mouvement de l'onde est le double, soit $2U/c$. Par conséquent, le module de la quantité de mouvement transmise à la surface est également $p = 2U/c$.

La force exercée par une onde électromagnétique sur une surface peut être reliée au vecteur de Poynting. Si on formule la deuxième loi de Newton sous la forme $F = \Delta p/\Delta t$ et qu'on y substitue l'équation 13.17, on obtient que le module de la force est $F = (1/c)(\Delta U/\Delta t)$. D'après l'équation 13.13, on a $\Delta U/\Delta t = SA$; donc $F = SA/c$. La valeur instantanée de la **pression de radiation** (force/aire) est, pour une incidence normale,

Pression de radiation

$$\frac{F}{A} = \frac{S}{c} = u \tag{13.18}$$

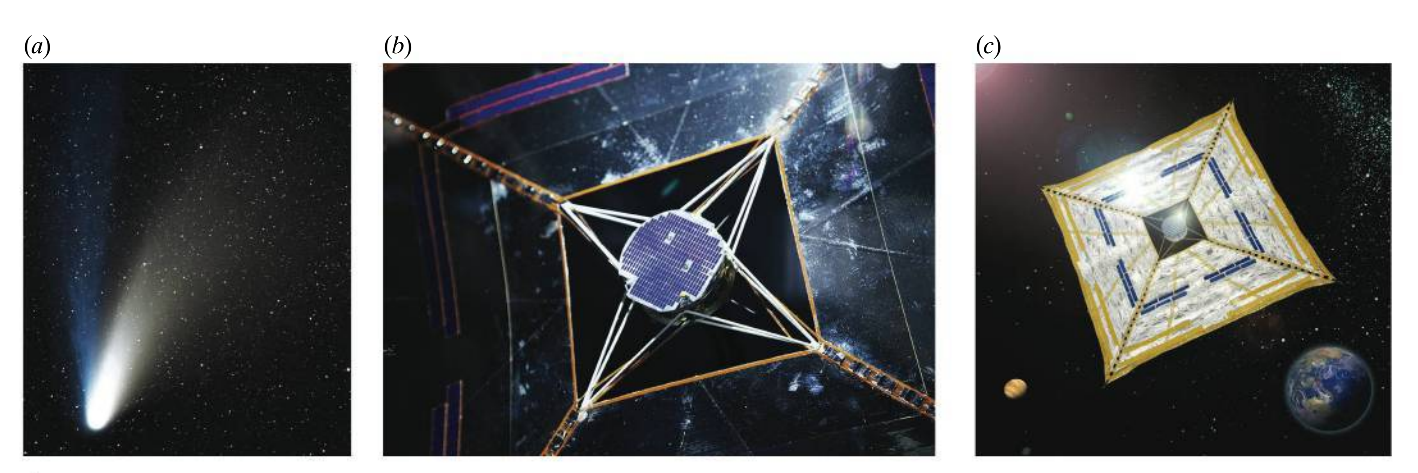
où l'on a utilisé $S = uc$ d'après l'équation 13.14. La pression de radiation est égale à la densité d'énergie ($N/m^2 = J/m^3$). Pour une surface parfaitement réfléchissante, la variation de la quantité de mouvement correspond au double de la valeur prescrite par l'équation 13.17 ; ainsi, la pression sur la surface est $2u$.



▲ **Figure 13.10**
Une particule en suspension sous l'effet de la pression de radiation d'un rayon laser.

Malgré sa valeur très faible, la pression de radiation fut détectée en 1899 par Pyotr Nikolayevich Lebedev (1866-1912) en Russie. La figure 13.10 montre un dispositif moderne qui illustre la force exercée par la lumière : un laser (à gauche) produit un faisceau qui est réfléchi à la verticale par un prisme (en bas à droite). Sous l'effet de la pression de radiation exercée par ce faisceau vertical ascendant, une minuscule particule (dont on voit le reflet brillant, en haut à droite) est immobilisée dans le vide.

Par ailleurs, c'est la pression de radiation des rayons solaires qui fait en sorte que les particules de la queue d'une comète sont déviées dans la direction opposée au Soleil (figure 13.11*a*). On peut même utiliser une voilure géante pour propulser un véhicule spatial grâce à la pression de radiation de la lumière solaire. Ce concept a été expérimenté pour la première fois en 2010 (figures 13.11*b* et 13.11*c*).



▲ **Figure 13.11**

(*a*) Les particules de la queue d'une comète sont déviées par la pression de radiation de la lumière solaire. L'autre queue visible est constituée d'ions beaucoup plus petits. (*b*) En 2010, la sonde *IKAROS* utilisa la première « voilure solaire » pour propulser un véhicule spatial grâce à la pression de radiation du Soleil. (*c*) Dessin de la sonde *IKAROS* avec toute sa voilure.

Exemple 13.5

L'intensité moyenne du rayonnement solaire à la surface de la Terre est de 1 kW/m². Sur un toit se trouve un panneau solaire carré de 10 m de côté qui absorbe intégralement le rayonnement. Quel est le module de la force moyenne qui s'exerce sur le panneau si on suppose que l'incidence de la lumière est perpendiculaire au panneau ?

Solution

D'après l'équation 13.18, le module de la force moyenne est

$$F_{\text{moy}} = \frac{S_{\text{moy}}A}{c} = \frac{(1 \times 10^3 \text{ W/m}^2)(100 \text{ m}^2)}{3 \times 10^8 \text{ m/s}}$$
$$= 0{,}333 \times 10^{-3} \text{ N}$$

On voit que la pression de radiation correspond à une force minime.



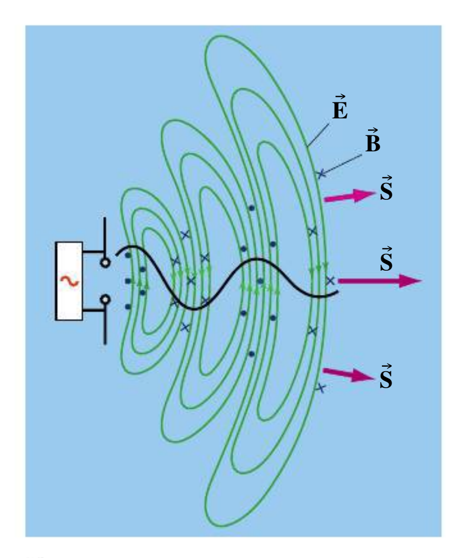
▲ **Figure 13.12**

Heinrich Hertz (1857-1894).

13.6 L'EXPÉRIENCE DE HERTZ

Lorsque les travaux de Maxwell furent publiés en 1867, ils ne reçurent qu'un accueil prudent. La notion de courant de déplacement et la validité expérimentale du concept d'onde électromagnétique rendaient sceptiques de nombreux physiciens. Mais, en 1887, Heinrich Hertz (figure 13.12) réalisa une expérience qui démontra cette validité de façon concluante. Maxwell avait prédit qu'un rayonnement électromagnétique est produit lorsqu'une charge *accélère* ou, ce qui est équivalent, lorsqu'un courant circulant dans un fil varie dans le temps. Une façon de mettre à profit cette prédiction pour produire des ondes électromagnétiques consiste à utiliser une **antenne**. La figure 13.13 illustre une antenne rudimentaire formée de deux tiges métalliques auxquelles on a relié une source de courant alternatif. Tandis que la polarité des tiges s'inverse alternativement dans le temps, les charges oscillent et produisent donc un rayonnement. Les champs à proximité de la source sont complexes, mais, à des distances importantes par rapport à la longueur d'onde du rayonnement, les champs de *radiation* varient comme le montre la figure 13.13. Les lignes du champ électrique sont les courbes fermées représentées dans le plan de la page, alors que les lignes du champ magnétique sont normales à la page et ne sont représentées que par des

points et des croix. Puisque la direction de $\vec{\mathbf{B}}$ varie avec celle de $\vec{\mathbf{E}}$, la figure montre aussi que le vecteur de Poynting, $\vec{\mathbf{S}} = \vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}/\mu_0$, est toujours radial et dirigé vers l'extérieur. Cela confirme bien que l'énergie est transportée au loin.



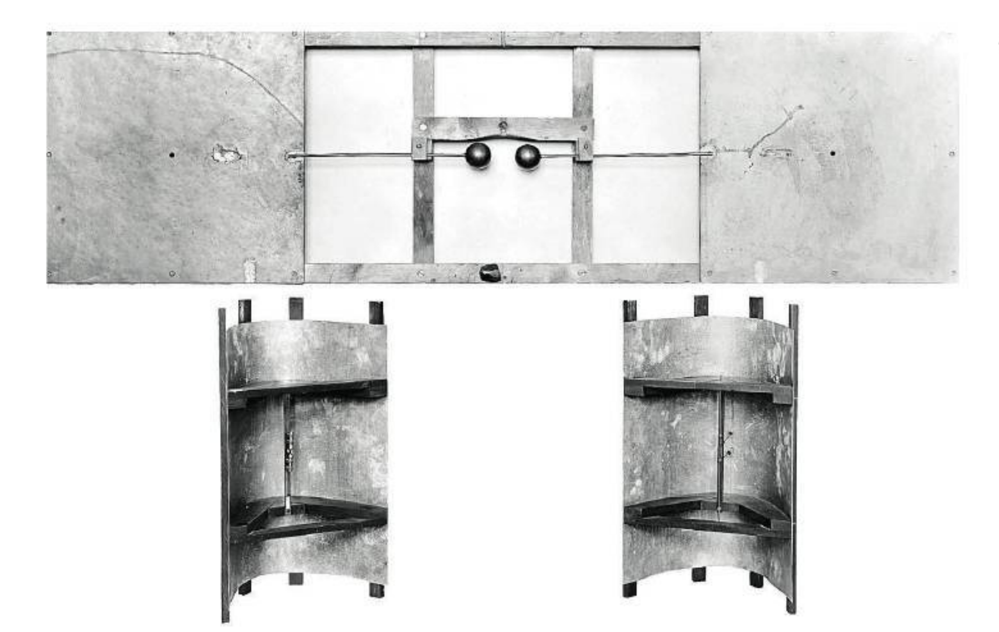
▲ **Figure 13.13**

On peut produire des ondes électromagnétiques en reliant deux tiges à une source de courant alternatif. Les charges en accélération dans les tiges produisent le champ de radiation représenté sur la figure. Le champ électrique est représenté par des boucles fermées, alors que le champ magnétique est normal à la page.

L'équipement dont se servit Hertz est différent (la figure 13.14 en illustre une partie) : il utilisa un circuit *LC* dans lequel la bobine d'induction était le secondaire d'un transformateur et dans lequel le condensateur était constitué de deux boules métalliques reliées à des armatures planes. Lorsqu'on coupait le courant dans le primaire, une grande différence de potentiel était induite au secondaire et provoquait l'ionisation de l'air entre les boules, le rendant provisoirement conducteur. Il en résultait quelques cycles d'oscillations *LC* amorties, qui faisaient osciller les charges dans l'espace rempli d'air et provoquaient l'émission d'un rayonnement.

Hertz utilisa un écran métallique concave pour réfléchir les ondes émises et les focaliser sur un point donné de l'espace. En ce point, il plaça un détecteur dont l'objectif était de démontrer que des ondes avaient bel et bien été émises. Ce détecteur (récepteur) était une simple boucle de fil conducteur, dans laquelle était aussi inséré un espace d'air. Hertz pouvait régler les dimensions de la boucle réceptrice et de l'espace d'air pour obtenir la résonance du système avec la radiation incidente. Quand une onde électromagnétique était dirigée sur le détecteur, son champ magnétique induisait dans la boucle du détecteur une f.é.m. suffisamment grande pour provoquer de petites étincelles dans l'espace à l'intérieur de la boucle réceptrice. L'observation de ces étincelles confirmait que des ondes électromagnétiques s'étaient bel et bien propagées de l'émetteur au récepteur.

À l'aide de cet équipement, Hertz étudia davantage les propriétés des ondes électromagnétiques. Il réussit à observer que la radiation émise avait tous les comportements caractéristiques des ondes, comme la réflexion, la réfraction et l'interférence. Il réussit en particulier à produire des ondes stationnaires (voir le chapitre 2 du tome 3) à partir d'ondes réfléchies sur une surface métallique. La longueur d'onde (≈33 cm) pouvait être déterminée à partir de la distance entre les nœuds ou les ventres et la fréquence était déterminée à partir du circuit *LC*. La relation $v = f\lambda$ lui permit de déduire que la vitesse des ondes était voisine de 3×10^8 m/s, ce qui correspond bien à la vitesse de la lumière.

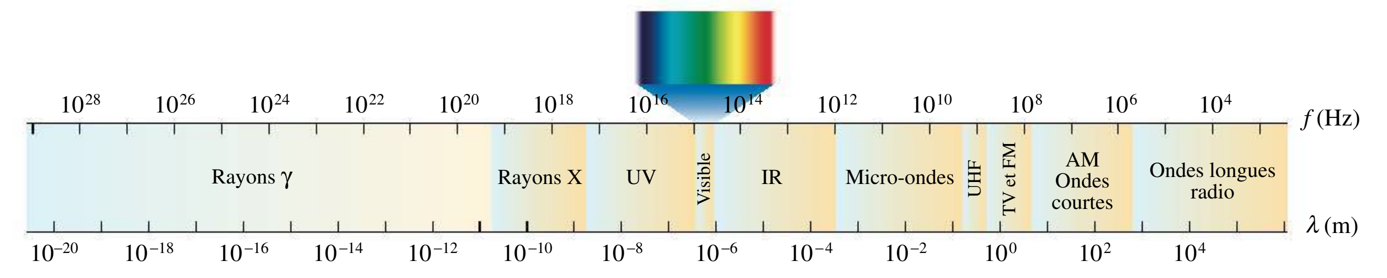


◀ **Figure 13.14**

Une partie de l'équipement utilisé par Hertz.

13.7 LE SPECTRE ÉLECTROMAGNÉTIQUE

Les ondes électromagnétiques couvrent une très large gamme de fréquences, depuis les ondes radio de très grande longueur d'onde, dont la fréquence est voisine de 100 Hz, jusqu'aux rayons γ de très haute énergie qui proviennent de l'espace, dont les fréquences sont voisines de 10^{23} Hz. L'ensemble de la gamme de fréquences se nomme **spectre électromagnétique** (figure 13.15). En musique, une octave représente un changement de fréquence d'un facteur 2 ; par analogie, on peut dire que le spectre électromagnétique couvre près de 100 octaves (le spectre sonore audible couvre 9 octaves environ), bien qu'il n'y ait théoriquement aucune fréquence minimale ou maximale à une onde électromagnétique.



▲ **Figure 13.15**

Le spectre électromagnétique. Les limites entre les diverses régions du spectre sont moins nettes que le diagramme ne le laisse supposer.

Comme l'indique la figure 13.15, le spectre électromagnétique est subdivisé en différentes régions. Bien que la figure semble définir chacune de ces régions comme un intervalle de fréquence précis, les limites entre les régions sont moins étanches. Par exemple, une même onde pourra être qualifiée de « rayonnement ultraviolet » ou de « rayon X » selon le contexte expérimental, soit la façon dont elle a été *produite* ou *absorbée* (détectée). Une description complète de ces méthodes de production ou de détection est toutefois impossible dans le cadre de la représentation de Maxwell.

En effet, dans le cadre de la théorie de Maxwell, des ondes électromagnétiques sont émises à chaque fois qu'une charge électrique accélère, notamment en oscillant. La réciproque est aussi valable : chaque fois qu'une onde électromagnétique est incidente sur une charge électrique, elle fait osciller ou accélérer celle-ci, ce qui permet de détecter cette onde (voir la section 13.6). Ces oscillations de charges, seules responsables selon Maxwell de l'émission et de l'absorption des ondes électromagnétiques, peuvent se produire à des échelles de grandeurs très différentes, depuis les oscillations au niveau atomique ou nucléaire jusqu'à celles dans les antennes mesurant plusieurs dizaines de mètres. En général, des charges qui oscillent sur une grande distance produiront une onde électromagnétique de fréquence plus basse, ce qui détermine plus ou moins la région du spectre à laquelle cette onde appartient.

Toutefois, cette représentation a des limites et nous verrons au chapitre 9 du tome 3 que le modèle électromagnétique n'est pas toujours adéquat : bien qu'il permette de prédire correctement la *propagation* de la lumière, il échoue lamentablement à décrire la plupart des phénomènes d'*émission* et d'*absorption* de la lumière. Expliquer aussi ces phénomènes nécessite d'utiliser le modèle quantique de la lumière, plus complet que le modèle électromagnétique. Dans le cadre de ce modèle, la lumière est émise un *photon* à la fois lorsque des charges (comme les électrons dans un atome) subissent une transition entre deux niveaux d'énergie. (Pendant cette transition, la *probabilité de présence* de ces charges oscille, ce qui rejoint indirectement la représentation de Maxwell.)

Les paragraphes ci-dessous décrivent chacune des régions du spectre électromagnétique. Pour chaque région, on donne une brève description (en recourant à la représentation quantique au besoin) de la façon dont sont émises ou détectées les ondes qui en font partie. Nous débutons avec la lumière visible, puis considérons les types de rayonnements dont la longueur d'onde est de plus en plus grande. Ensuite, nous reprenons à la frontière de la lumière visible et considérons ceux dont la longueur d'onde est de plus en plus courte.

La lumière visible

La partie visible du spectre électromagnétique couvre à peu près une octave, de 400 à 700 nm, ce qui correspond aux longueurs d'onde que les cellules tapissant la rétine de l'œil humain moyen sont en mesure de détecter le mieux. Une plage de longueurs d'onde correspond approximativement à chaque couleur : 400 à 450 nm pour le violet, 450 à 520 nm pour le bleu, 520 à 560 nm pour le vert, 560 à 600 nm pour le jaune, 600 à 625 nm pour l'orange et 625 à 700 nm pour le rouge. En 1704, Newton publia les résultats d'observations qui montraient qu'un mélange de toutes ces couleurs est perçu comme de la lumière blanche (voir le passage sur la synthèse additive de la lumière dans le sujet connexe de la section 2.4). Un objet éclairé par de la lumière blanche prend une couleur différente du blanc quand il absorbe certaines des couleurs présentes dans le blanc ; sa couleur apparente est composée par les couleurs qu'il n'absorbe pas (voir le passage sur la synthèse soustractive dans le même sujet connexe).

Notre sens de la vue et le processus de photosynthèse des végétaux ont évolué dans la gamme de longueurs d'onde du rayonnement solaire que notre atmosphère n'absorbe que très peu, c'est-à-dire entre 300 nm et 1100 nm, ce qui explique que la lumière pouvant être captée par l'être humain, les animaux et les plantes est approximativement la même.

Certaines sources de lumière visible comme les lasers, les aurores boréales ou les tubes à néon émettent une lumière d'une couleur bien spécifique, composée de seulement certaines longueurs d'onde précises. D'autres sources lumineuses sont des corps denses et chauds, comme les filaments d'ampoules électriques, la lave volcanique ou les métaux chauffés au rouge, et émettent une lumière couvrant une gamme continue de longueurs d'onde. (C'est pourquoi ils semblent blancs lorsqu'ils sont suffisamment chauds.) Dans le premier cas, on peut expliquer que la lumière est émise par des électrons qui ne quittent pas leur atome, alors que, dans le second cas, on peut se représenter aussi des électrons qui se déplacent aléatoirement, au sein des matériaux denses, sous l'effet de leur haute température. Dans les deux cas, seule la représentation quantique de la lumière et de l'atome permet de donner une description correcte (qui implique une transition de l'électron entre divers niveaux d'énergie ou bandes d'énergie de l'atome).

Le rayonnement infrarouge

La région infrarouge (IR) débute à 700 nm et s'étend jusqu'à près de 1 mm. Elle fut découverte en 1800 par William Herschel (1738-1822) qui plaça un thermomètre juste à côté de l'extrémité rouge du spectre visible et observa une élévation de température. Le rayonnement IR peut être émis par les mêmes procédés que la lumière visible. Sa particularité est d'être aussi associé à un intervalle de fréquences proche de la rotation et de la vibration des molécules. L'absorption de rayonnement IR par une molécule donnée provoque donc une augmentation de l'énergie cinétique de cette dernière. Or, comme l'énergie cinétique moyenne

des molécules qui composent un corps est une indication de sa température (voir le chapitre 18 du tome 1), l'absorption et l'émission de rayonnement IR par la matière permettent donc des *transferts de chaleur*. On utilise des satellites détectant les IR pour effectuer des relevés géophysiques et pour la détection des gaz d'échappement chauds lors du lancement des fusées.

Puisqu'il permet de détecter des variations minimes de température dans le corps humain, on utilise le rayonnement IR pour la détection précoce des tumeurs, qui sont plus chaudes que les tissus environnants. Les serpents et les instruments « de vision nocturne » (voir le chapitre 17 du tome 1) peuvent détecter les rayons IR émis par les corps chauds des animaux.

Les micro-ondes

Situées au-delà de l'infrarouge, les micro-ondes correspondent aux longueurs d'onde de 1 mm à 15 cm environ. On peut produire des micro-ondes allant jusqu'à une fréquence de 30 GHz ($\lambda \approx 1$ cm) en faisant osciller des électrons dans une sorte d'antenne appelée klystron. Dans les fours à micro-ondes que nous utilisons dans nos cuisines, le rayonnement a une fréquence voisine de 2450 MHz ($\lambda = 12{,}2$ cm). Les communications interurbaines modernes, comme la transmission de données numériques, les conversations téléphoniques et les émissions de télévision, se font souvent par l'intermédiaire d'un réseau d'antennes haute fréquence sur l'ensemble d'un territoire. C'est aussi le cas de la téléphonie cellulaire locale.

Par ailleurs, en focalisant des micro-ondes sur un tissu cancéreux, on arrive à en élever la température jusqu'à 46 °C environ. Alors que les cellules normales sont capables de dissiper l'énergie thermique rapidement, les cellules cancéreuses ont une circulation relativement mauvaise et sont par conséquent détruites.

Les signaux de radio

Ces signaux couvrent la gamme de longueurs d'onde, au-delà de celles des micro-ondes, comprises entre 15 cm et 2000 m environ. On utilise, pour leur émission et leur réception, des dipôles (comme les vieux dispositifs en « oreille de lapin ») ou des bobines de réception. Les radiotélescopes (figure 13.16)



Figure 13.16

Un radiotélescope est utilisé pour les télécommunications et pour la radioastronomie. Contrairement au télescope optique, il n'a pas besoin d'un ciel dégagé.

servent à communiquer avec les satellites et à capter les ondes radio émises par divers objets célestes. Dans tous ces dispositifs de réception, les ondes électromagnétiques incidentes font osciller les charges sous l'effet du champ électrique ou du champ magnétique, ce qui cause un courant alternatif. Ce courant, porteur de la même information que les ondes, peut ensuite être amplifié et décodé. Notez que cette explication est celle du modèle de Maxwell, puisque la représentation quantique est inutile quand la fréquence est très basse et que les photons sont très nombreux (voir le chapitre 9 du tome 3).

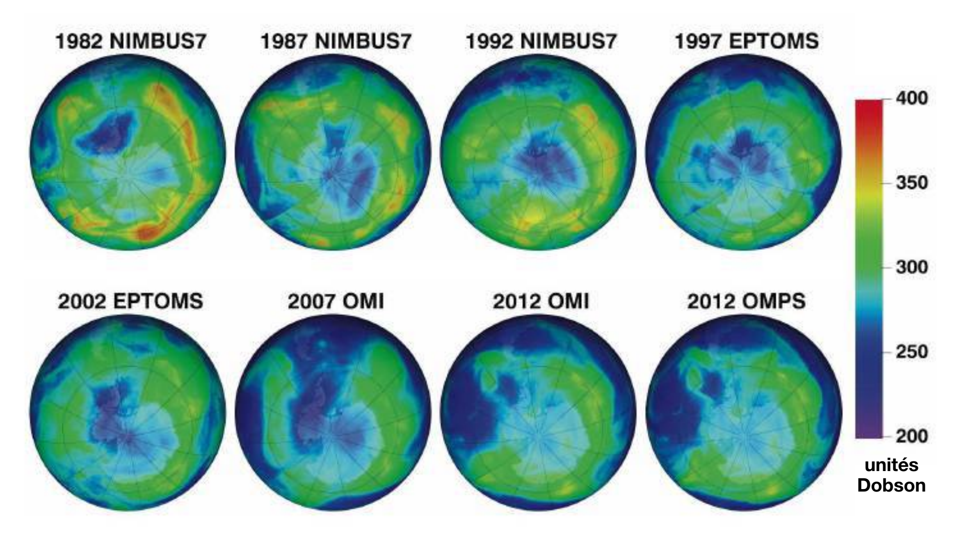
Le rayonnement ultraviolet

Maintenant que nous avons traité de tous les rayonnements dont la longueur d'onde est plus longue que la lumière visible, nous abordons ceux dont la longueur d'onde est plus courte.

En 1801, Johann Wilhelm Ritter (1776-1810), qui étudiait le virage au noir du chlorure d'argent dans diverses régions du spectre, s'aperçut que l'effet était maximum au-delà du violet. Il venait donc de découvrir un nouveau type de rayonnement émis de façon similaire à la lumière visible, mais de longueur d'onde plus petite. La région de l'ultraviolet (UV) couvre plus de cinq octaves: elle s'étend de 400 nm à 10 nm environ. Comme l'infrarouge, cette région est voisine immédiate du visible.

Les rayons UV interviennent dans la production de vitamine D dans la peau et provoquent le bronzage. À doses fortes ou prolongées, le rayonnement ultraviolet tue les bactéries et peut causer le cancer chez l'être humain. Le verre absorbe les UV et offre donc une certaine protection contre les rayons du Soleil. Si l'ozone de notre atmosphère n'absorbait pas les UV en-dessous de 300 nm, on observerait de nombreuses mutations cellulaires, notamment cancéreuses. C'est pourquoi l'appauvrissement de la couche d'ozone de notre atmosphère par les chlorofluorocarbones (CFC) est à l'heure actuelle un sujet de préoccupation internationale.

Dans certains atomes, l'absorption des UV est suivie par l'émission d'une lumière visible de plus grande longueur d'onde. Ce phénomène, qui porte le nom de fluorescence, est à la base de la « lumière noire » que l'on utilise pour produire des effets de scène et qui sert aussi dans de nombreuses procédures de laboratoire.



Évolution dans le temps des relevés de la concentration d'ozone au-dessus de l'Antarctique. On peut obtenir ces relevés en mesurant l'intensité du rayonnement UV réfléchi dans la bande d'absorption de l'ozone.

Les rayons X

Découverts en 1895 par Wilhelm Conrad Röntgen (1845-1923), les rayons X sont voisins des UV et s'étendent de 1 nm à 0,01 nm. Les rayons X peuvent être produits par des atomes qui subissent une transition entre deux niveaux d'énergie atomique ou nucléaire. Dans leur application médicale, on les produit plutôt en projetant des électrons très rapides sur une cible massive : la décélération brutale des électrons, lorsqu'ils atteignent la cible, produit des rayons X couvrant une gamme continue de fréquences et qu'on appelle *bremsstrahlung* ou « rayonnement de freinage ». Ce phénomène peut aussi se produire en astrophysique.

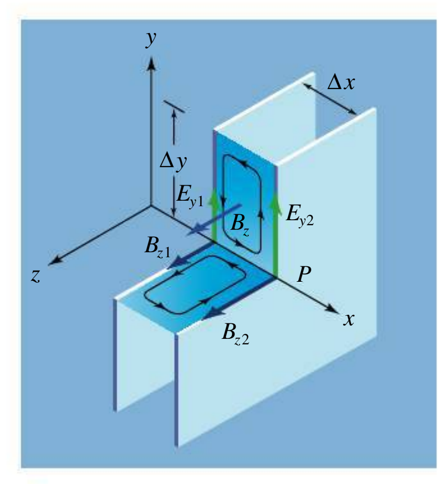
Puisque les dimensions des atomes et leur distance dans les cristaux sont semblables aux longueurs d'onde des rayons X, on utilise ceux-ci pour étudier la structure atomique des cristaux ou des macromolécules biologiques comme l'ADN ou les protéines (voir la section 7.8 du tome 3). Outre leur usage à des fins diagnostiques et thérapeutiques en médecine, on utilise des rayons X pour déceler les défauts microscopiques dans les machines. Avec l'apparition des satellites scientifiques, l'astronomie aux rayons X est devenue un outil important dans l'étude de l'Univers. ●

Les rayons γ

Les rayons gamma, qui produisent des effets similaires à ceux des rayons X, ont été identifiés pour la première fois par Paul Ulrich Villard (1860-1934) en 1900 dans le rayonnement radioactif émis par certains matériaux. Alors que les rayons X sont produits par des électrons, les rayons gamma sont en général produits à l'intérieur du noyau d'un atome et sont extrêmement énergétiques. Leurs longueurs d'onde sont égales ou inférieures à 0,01 nm, c'est-à-dire que leurs fréquences sont égales ou supérieures à 10^{20} Hz.

13.8 LA FORMULATION DE L'ÉQUATION D'ONDE

En manipulant mathématiquement la loi de Faraday et le théorème d'Ampère-Maxwell, on pourrait obtenir directement une équation d'onde pour les champs électrique et magnétique, mais cette approche n'entre pas dans le cadre de cet ouvrage. Nous allons par contre supposer que $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ varient d'une certaine façon, conformément aux équations de Maxwell, puis démontrer que les ondes électromagnétiques sont une conséquence de la loi de Faraday et du théorème d'Ampère-Maxwell. Pour simplifier, nous allons nous situer dans le vide, où il n'y a ni charge ni courant de conduction. En conséquence, les champs qui sont établis dans cette région ne sont que des champs électrique et magnétique *induits*, bien qu'on puisse ultimement attribuer leur présence à des charges se trouvant dans une région distante dont nous ne nous occupons pas.



▲ **Figure 13.17**

Deux plans perpendiculaires à la direction de propagation, avec les champs électrique et magnétique correspondants. On applique la loi de Faraday au rectangle ombré dans le plan *xy* et le théorème d'Ampère-Maxwell à un rectangle analogue dans le plan *xz*.

La figure 13.17 représente deux plans perpendiculaires à la direction de propagation, laquelle correspond à l'axe des x positifs. Le champ électrique est dirigé selon l'axe des y et le champ magnétique selon l'axe des z. Chaque champ est uniforme sur un plan yz quelconque et varie uniquement sur l'axe des x. Nous appliquons d'abord la loi de Faraday (équation 13.5) au petit cadre rectangulaire dans le plan xy. L'intégrale curviligne, qui correspond au côté gauche de l'équation 13.5, est composée de quatre parties. Pour les côtés supérieur et inférieur du cadre, $\vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = 0$ puisque $\vec{\mathbf{E}}$ est perpendiculaire à $d\vec{\boldsymbol{\ell}}$. La contribution des autres côtés est

$$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = E_{y2}\Delta y - E_{y1}\Delta y$$

Rappelons que si le pouce est orienté selon le champ magnétique B_z, les doigts de la main droite déterminent le sens dans lequel on doit calculer l'intégrale. En principe, il faudrait intégrer sur l'aire du cadre pour déterminer le flux magnétique qui le traverse. Nous obtiendrons un résultat tout aussi satisfaisant pour nos besoins en prenant la valeur de B_z au centre comme valeur « moyenne » sur toute l'aire. Cette approche est valable si la distance Δx entre les plans est très inférieure à la longueur d'onde. Le flux magnétique qui traverse le cadre est $\Phi_B = B_z \Delta x \Delta y$ et son taux de variation dans le temps, qui participe au côté droit de l'équation 13.5, s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial B_z}{\partial t} \Delta x \Delta y$$

On utilise les dérivées partielles parce qu'on s'intéresse à la variation explicite dans le temps en un point donné de l'espace. En substituant les deux derniers résultats dans la loi de Faraday (équation 13.5) et en divisant chaque membre par $\Delta x \Delta y$, on trouve

$$\frac{(E_{y2} - E_{y1})}{\Delta x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

Quand $\Delta x \to 0$, cette équation prend la forme

(loi de Faraday) $$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \qquad (13.19)$$

Puisque l'onde se dirige vers les x positifs, la composante B_z au point P décroît dans le temps, c'est-à-dire $\partial B_z/\partial t < 0$. D'après l'équation 13.19, il s'ensuit que $\partial E_y/\partial x > 0$, c'est-à-dire que $E_{y2} > E_{y1}$ (figure 13.17). Physiquement, cela correspond à l'énoncé de la loi de Lenz : le flux magnétique à travers le cadre décroît dans le temps, de sorte que la f.é.m. induite (donnée par l'intégrale curviligne) doit s'opposer à la variation.

On peut utiliser un argument analogue pour appliquer le théorème d'Ampère-Maxwell à un cadre dans le plan xz. On prend alors des valeurs distinctes pour B_z dans l'intégrale $\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot \mathrm{d}\vec{\ell}$, mais on utilise la valeur moyenne de E_y pour le flux électrique. Ici encore, deux côtés du cadre seulement contribuent à l'intégrale curviligne. L'équation 13.6 donne

$$(-B_{z2} + B_{z1})\Delta z = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \Delta x \Delta z$$

Le sens d'intégration est déterminé par E_y et par la règle de la main droite. En divisant par $\Delta z \Delta x$ et en prenant la limite quand $\Delta x \to 0$, on trouve

(théorème d'Ampère) $$\frac{\partial B_z}{\partial x} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \qquad (13.20)$$

En prenant les dérivées appropriées de l'équation 13.19 et de l'équation 13.20, il est facile d'obtenir les équations d'onde de Maxwell, c'est-à-dire les équations 13.7 et 13.8 (voir l'exemple 13.6).

Si l'on remplace les fonctions $E_y = E_0 \sin(kx - \omega t)$ et $B_z = B_0 \sin(kx - \omega t)$ dans l'équation 13.19, on trouve

$$kE_0 \cos(kx - \omega t) = \omega B_0 \cos(kx - \omega t)$$

Par conséquent, $E_0 = (\omega/k)B_0 = cB_0$. En tout point et à tout moment, $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ sont *en phase* et leurs modules sont liés par la relation $E = cB$.

Exemple 13.6

Calculer la dérivée spatiale de l'équation 13.19 puis utiliser l'équation 13.20 pour obtenir l'équation 13.7.

Solution

D'après l'équation 13.19, on a

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial B_z}{\partial t}\right)$$

ce qui équivaut à

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)$$

En remplaçant $\partial B_z/\partial x$ dans l'équation précédente par sa valeur donnée dans l'équation 13.20, on obtient l'équation 13.7.

RÉSUMÉ

Dans une région où le champ électrique varie dans le temps, le courant de déplacement est donné par

$$I_D = \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (13.1)$$

où Φ_E est le flux électrique. Malgré son nom, le courant de déplacement n'est pas un courant et ne correspond à aucun déplacement. Le théorème d'Ampère doit être modifié pour tenir compte du courant de déplacement. Sous cette nouvelle forme, il fait partie des quatre équations de Maxwell qui synthétisent toute la théorie électromagnétique :

Gauss $$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = \frac{\Sigma Q}{\varepsilon_0} \quad (13.3)$$

Gauss $$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\mathbf{A}} = 0 \quad (13.4)$$

Faraday $$\oint \vec{\mathbf{E}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (13.5)$$

Ampère-Maxwell $$\oint \vec{\mathbf{B}} \cdot d\vec{\boldsymbol{\ell}} = \mu_0\left(\Sigma I + \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}\right) \quad (13.2 \text{ et } 13.6)$$

En combinant le théorème d'Ampère-Maxwell et la loi de Faraday, on peut montrer que le champ électrique et le champ magnétique obéissent aux équations d'onde de Maxwell :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}\right) \quad (13.7)$$

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} = \mu_0\varepsilon_0\left(\frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2}\right) \quad (13.8)$$

Dans une onde électromagnétique, les champs électrique et magnétique sont perpendiculaires entre eux et à la direction de propagation. Ces champs oscillent en phase et les ondes se propagent dans le vide à la vitesse

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} \quad (13.9)$$

qui est égale à la vitesse de la lumière dans le vide. Les valeurs instantanées des modules des champs sont liées par la relation

$$E = cB \qquad (13.10)$$

On peut déterminer l'intensité d'une onde électromagnétique à partir du vecteur de Poynting

$$\vec{\mathbf{S}} = \frac{\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}}{\mu_0} \qquad (13.15)$$

qui montre que l'énergie se propage perpendiculairement à la fois à $\vec{\mathbf{E}}$ et à $\vec{\mathbf{B}}$. L'intensité moyenne d'une onde électromagnétique plane est donnée par

$$S_{\text{moy}} = \frac{E_0 B_0}{2\mu_0} \qquad (13.16a)$$

où E_0 et B_0 sont les amplitudes des champs.

Le module de la quantité de mouvement transportée par une onde électromagnétique est donné par

$$p = \frac{U}{c} \qquad (13.17)$$

où U est l'énergie absorbée par une surface. Si les ondes sont intégralement réfléchies, le module de la quantité de mouvement transférée est double.

La pression de radiation exercée par une onde électromagnétique incidente normale à une surface et complètement absorbée par elle est donnée par

$$\frac{F}{A} = \frac{S}{c} = u \qquad (13.18)$$

où $u = \varepsilon_0 E^2 = B^2/\mu_0$ est la densité d'énergie de l'onde. Si les ondes sont parfaitement réfléchies, la pression est doublée.

TERMES IMPORTANTS

antenne (p. 538)
champ magnétique induit (p. 526)
courant de déplacement (p. 525)
équations de Maxwell (p. 528)
équations d'onde de Maxwell (p. 530)
intensité moyenne (p. 533)
onde électromagnétique (p. 529)
pression de radiation (p. 537)
spectre électromagnétique (p. 540)
vecteur de Poynting (p. 533)

RÉVISION

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

R1. Expliquez, en vous inspirant de ce qui se produit pendant la charge d'un condensateur, comment le théorème d'Ampère, dans sa formulation d'origine, comportait une incohérence.

R2. Expliquez la signification physique du théorème de Gauss formulé pour un champ magnétique.

R3. Reproduisez la combinaison mathématique des constantes fondamentales de l'électromagnétisme qui correspond à la vitesse de la lumière.

R4. Représentez graphiquement une onde électromagnétique se déplaçant le long de l'axe des x positifs.

R5. Expliquez comment l'énergie transportée par les ondes électromagnétiques peut servir à propulser un *voilier* spatial.

R6. Décrivez comment Hertz produisit ses premières ondes électromagnétiques.

R7. Nommez les différentes composantes du spectre électromagnétique, en précisant la plage de longueurs d'onde correspondante et en donnant, pour chacune, un exemple d'application (a) scientifique ; (b) biomédicale.

QUESTIONS

Q1. Un plat vide devient chaud dans un four ordinaire, mais pas forcément dans un four à micro-ondes. Pourquoi ?

Q2. Comment peut-on utiliser une antenne circulaire pour localiser la source d'un émetteur radio clandestin ?

Q3. Un courant de conduction et un courant de déplacement peuvent-ils coexister dans la même région ? Si oui, donnez un exemple.

Q4. Pendant la charge d'un condensateur, y a-t-il un courant de déplacement dans les fils de raccordement ?

Q5. Une station de radio diffuse la voix d'une chanteuse. Décrivez, en termes simples, comment le son de sa voix arrive jusqu'à vos oreilles.

Q6. Même s'il manque une antenne à un récepteur de télévision ou à un poste de radio FM, ils peuvent « capter » plusieurs stations si l'on touche les bornes de l'antenne. Pourquoi ?

Q7. Quelle est l'orientation du vecteur de Poynting entre les armatures d'un condensateur en train d'être chargé ?

Q8. Certains phénomènes associés au rayonnement électromagnétique ne dépendent pas de sa fréquence. Citez-en deux.

Q9. Un four à micro-ondes contient du rayonnement de fréquence 2450 MHz. Quelle est sa longueur d'onde ?

Q10. Pourquoi la pression de radiation exercée par une onde électromagnétique donnée est-elle plus grande pour une surface réfléchissante que pour une surface absorbante ?

Q11. Les lignes de transport de l'énergie électrique c.a. émettent-elles des ondes électromagnétiques ?

Q12. (a) Pourquoi est-il déconseillé d'utiliser un récipient métallique dans un four à micro-ondes ? (b) Les fours à micro-ondes ont tendance à avoir des « zones neutres » où les aliments ne cuisent pas correctement. Quelle peut être l'origine de ce phénomène ?

Q13. Le champ magnétique d'une onde électromagnétique est donné par

$$B = (2 \times 10^{-6}) \cos[\pi(0{,}04x + 10^7 t)]$$

où x est en mètres, t en secondes et B en teslas. S'agit-il d'une onde dans le vide ?

Q14. Est-il possible de produire une onde électromagnétique stationnaire ? Comment ?

Q15. Un téléspectateur et un spectateur présent au stade regardent tous deux une balle de baseball au moment de l'impact avec le bâton. Vont-ils voir et entendre le contact au même instant ? Si non, à quoi sont dus les décalages ?

Q16. Une onde électromagnétique plane se propage horizontalement d'est en ouest. Si, en un point quelconque, $\vec{\mathbf{B}}$ est vertical et orienté vers le bas à un instant, quelle est l'orientation de $\vec{\mathbf{E}}$?

Q17. Peut-on utiliser un laser puissant pour propulser un véhicule spatial ? Si oui, comment ?

Q18. Dans quel sens l'expression $\varepsilon_0 \, d\Phi_E/dt$ est-elle (a) analogue à un courant électrique ; (b) différente d'un courant électrique ?

Q19. Si l'on découvrait des monopôles magnétiques, quelles équations de Maxwell devrait-on modifier ?

EXERCICES

(Voir l'avant-propos pour la signification des icônes)

13.1 Courant de déplacement

E1. (I) (a) Montrez que l'expression $1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ s'exprime en mètres par seconde (m/s). (b) Montrez que l'expression EB/μ_0 s'exprime en watts par mètre carré (W/m^2).

E2. (I) Montrez que les équations suivantes concordent en dimensions : (a) $E = cB$; (b) $I_D = \varepsilon_0 \, d\Phi_E/dt$; (c) pression $= S/c$.

E3. (I) Un condensateur plan a des armatures circulaires de rayon 2,5 cm distantes de 3 mm. Si la différence de potentiel entre les armatures varie à raison de 5×10^4 V/s, quel est le courant de déplacement ?

E4. (I) Un condensateur plan a des armatures circulaires de 2 cm de rayon distantes de 1,4 mm. À un instant donné, l'intensité du courant dans les fils de raccordement longs et rectilignes vaut 3 A. (a) Quel est le courant de déplacement entre les armatures ? (b) Quel est le taux de variation de la différence de potentiel entre les armatures ?

E5. (I) Montrez que le courant de déplacement dans un condensateur plan rempli d'air peut s'exprimer sous la forme $I_D = C \, d(\Delta V)/dt$, où ΔV est la différence de potentiel aux bornes du condensateur.

E6. (I) Un condensateur plan a des armatures circulaires de 2 cm de rayon distantes de 2,4 mm. La différence

de potentiel entre les plaques augmente à raison de 8 kV/s. Quel est le courant de déplacement entre le centre d'une armature et un point séparé du centre par une distance égale à la moitié du rayon ? (On suppose que le champ électrique entre les armatures est uniforme.)

E7. (II) Les armatures circulaires d'un condensateur plan ont un rayon de 2 cm et sont distantes de 4 mm. Elles sont reliées à une source de courant alternatif de 60 Hz de tension maximale 120 V. Trouvez la valeur maximale du module du champ magnétique à mi-distance entre le centre et le bord des armatures.

E8. (II) (a) Montrez que le module du champ magnétique à une distance r du centre d'un condensateur plan d'armatures circulaires de rayon R est donné par

$$B = \frac{\mu_0 I_D}{2\pi r} \quad (r > R)$$

(b) Exprimez B en fonction de I_D pour $r < R$.

E9. (II) Un condensateur plan a des armatures circulaires de 2 cm de rayon distantes de 2,4 mm. Les fils de raccordement longs et rectilignes sont parcourus par un courant de 20 mA. Trouvez le module du champ magnétique aux distances radiales suivantes à partir du centre des armatures : (a) 0,5 cm ; (b) 5 cm.

13.3 Ondes électromagnétiques

E10. (I) Une onde électromagnétique plane se propage dans le vide selon l'axe des z négatifs. En un point donné, le vecteur champ électrique est de $-21\vec{\mathbf{i}}$ V/m. Quel est le vecteur champ magnétique ?

E11. (I) Le champ magnétique d'une onde électromagnétique plane est donné par

$$\vec{\mathbf{B}} = (2{,}0 \times 10^{-7}) \sin(5{,}0 \times 10^2 x + 1{,}5 \times 10^{11} t)\vec{\mathbf{j}}$$

où x est en mètres, t en secondes et B en teslas.

(a) Quelles sont la longueur d'onde et la fréquence de l'onde ? (b) Écrivez l'expression donnant le vecteur champ électrique.

E12. (I) Les composantes du champ électrique d'une onde électromagnétique plane sont données par $E_z = E_0 \sin(ky + \omega t)$, $E_x = E_y = 0$. Donnez l'expression de $\vec{\mathbf{B}}$.

13.4 Propagation de l'énergie et vecteur de Poynting

E13. (I) La densité d'énergie moyenne d'une onde électromagnétique sinusoïdale est égale à 10^{-7} J/m^3. Trouvez l'amplitude (a) du champ électrique ; (b) du champ magnétique.

E14. (I) Le champ électrique d'une onde plane est donné par

$$\vec{\mathbf{E}} = 50 \sin[\pi(0{,}8x - 2{,}4 \times 10^8 t)]\vec{\mathbf{j}}$$

où x est en mètres, t en secondes et E en volts par mètre (V/m). Déterminez : (a) la densité d'énergie moyenne ; (b) l'amplitude et l'orientation du champ magnétique à $x = 0$ et à $t = 0$; (c) l'intensité moyenne du vecteur de Poynting.

E15. (I) Calculée sur toutes les longueurs d'onde, l'intensité moyenne du rayonnement solaire à la surface de la Terre vaut 1 kW/m^2. (a) Quelle est la densité d'énergie moyenne associée à ce rayonnement à la surface de la Terre ? (b) Estimez la valeur de l'énergie solaire incidente parvenant en 1 h à la surface de la Terre.

E16. (II) Une balise de détresse, que l'on peut assimiler à une source ponctuelle, émet une longueur d'onde unique de puissance moyenne égale à 25 W. Trouvez les amplitudes du champ électrique et du champ magnétique produits par la balise aux points suivants : (a) un avion de recherche situé à une distance de 25 km ; (b) un satellite géostationnaire à une altitude de 34 000 km.

E17. (I) À une distance de 6 m d'une source ponctuelle émettant à une longueur d'onde unique, l'amplitude du champ électrique vaut 10 V/m. Trouvez : (a) l'amplitude du champ magnétique ; (b) la puissance moyenne produite par la source.

13.5 Quantité de mouvement et pression de radiation

E18. (I) L'intensité moyenne d'un rayonnement solaire incident au niveau de la haute atmosphère est de 1,34 kW/m^2. Quel est le module de la force moyenne exercée par cette radiation sur un panneau solaire de satellite d'aire 100 m^2 ? On suppose que l'incidence est perpendiculaire au panneau et que l'absorption est complète.

E19. (I) Déterminez le module de la force moyenne exercée sur une plaque de 5 cm^2 par la radiation émise par les lasers suivants : (a) un laser hélium-néon de 1 mW ; (b) un laser de 1 kW au dioxyde de carbone. On suppose que le faisceau, de section transversale égale à 10 mm^2, est normal à la plaque et qu'il est complètement absorbé.

E20. (I) Une antenne radio d'une puissance de 10^4 W émet à la fréquence de 98 MHz. En supposant qu'elle rayonne comme une source ponctuelle, déterminez la valeur moyenne de la pression de radiation à une distance de 20 km.

E21. (I) À une distance de 100 m d'une source ponctuelle, l'amplitude du champ magnétique associé au

rayonnement correspond à 0,10 % du module du champ terrestre, c'est-à-dire à environ 10^{-7} T. Évaluez la puissance de l'émetteur.

E22. (I) Un laser de 1 kW sert de « fusée lumineuse » pour propulser un véhicule spatial de 100 kg. La section transversale du faisceau a une aire de 20 mm^2. Quel est le module de son accélération moyenne ? On suppose que la propulsion du laser est la seule force agissant sur le vaisseau.

E23. (I) Au seuil de détection, un récepteur FM peut capter un signal pour lequel $E_0 = 2$ µV/m. (a) Quelle est l'intensité de l'onde électromagnétique détectée ? (b) À quelle distance une source ponctuelle de 10 kW produirait-elle cette intensité ?

E24. (I) (a) À quelle distance d'une source ponctuelle de 100 W l'amplitude du champ magnétique est-elle égale à 10^{-8} T ? (b) Quelle est l'amplitude du champ électrique en ce point ?

E25. (I) L'intensité d'une onde électromagnétique plane vaut 5 W/m^2. Elle frappe une surface parfaitement réfléchissante. Déterminez : (a) la pression de radiation ; (b) le module de la force exercée sur un panneau de 60 cm × 40 cm orienté perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde.

E26. (I) On suppose qu'une ampoule de 60 W émet sur une seule longueur d'onde et se comporte comme une source ponctuelle. À une distance de 10 m, trouvez les amplitudes (a) du champ électrique ; (b) du champ magnétique.

E27. (I) L'intensité du rayonnement solaire à la surface de la Terre est de 1 kW/m^2. Quelle serait la puissance pénétrant dans l'œil par une pupille de 0,5 cm de diamètre ?

E28. (I) Un panneau solaire convertit la lumière solaire en énergie électrique avec un rendement de 18 %. L'intensité du rayonnement solaire à la surface de la Terre est de 1 kW/m^2. Quelle est l'aire nécessaire pour produire 10 kW de puissance électrique ?

E29. (I) Montrez que le module du vecteur de Poynting d'une onde électromagnétique plane dans le vide peut s'écrire sous la forme

$$S = \frac{c}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0}\right)$$

E30. (I) Une ampoule assimilée à une source ponctuelle a une puissance de rayonnement de 120 W. À une distance de 10 m, déterminez : (a) l'intensité moyenne ; (b) la densité d'énergie moyenne ; (c) le module de la force moyenne exercée sur une plaque parfaitement réfléchissante d'aire 1 cm^2 orientée perpendiculairement au rayonnement.

PROBLÈMES

P1. (I) On charge un condensateur plan dont les armatures circulaires ont pour rayon a et sont distantes de d. Trouvez : (a) B au bord du condensateur ; (b) le module du vecteur de Poynting au bord du condensateur. (c) Montrez que la puissance fournie au condensateur est $\varepsilon_0 \pi d a^2 E(\mathrm{d}E/\mathrm{d}t)$. (On néglige les effets de bords.)

P2. (I) Le champ magnétique d'un signal radio AM de 800 kHz a une amplitude de 4×10^{-10} T. Si l'onde est détectée par une bobine plate de 20 spires de rayon 6 cm, quelle est la valeur maximale de la f.é.m. induite ? On suppose que le champ magnétique est dirigé selon l'axe de la bobine.

P3. (I) Un fil rectiligne de longueur 6 m et de rayon 0,5 mm a une résistance électrique de 0,8 Ω. La différence de potentiel entre ses bornes est égale à 24 V. (a) Quelle est la puissance thermique dissipée par effet joule ? (b) Quel est le module du vecteur de Poynting à la surface ? (c) Montrez que la puissance électromagnétique pénétrant dans le fil est égale à la valeur trouvée à la question (a).

P4. (I) Un rayon laser d'intensité S et dont la section transversale a une aire A est complètement absorbé par une particule de masse m pendant une période Δt. Montrez que la variation du module de vitesse de la particule est $\Delta v = SA\Delta t/mc$.

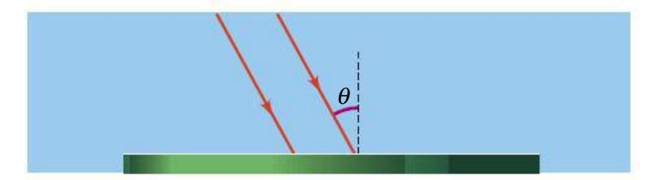
P5. (I) Des ondes électromagnétiques planes d'intensité S tombent perpendiculairement sur une surface plane. Une fraction f seulement de l'énergie incidente est absorbée. Quelle est la pression de radiation ?

P6. (II) Une particule dans la queue d'une comète a un rayon R. Sa masse volumique est de 1,2 g/cm^3. Elle est soumise à la fois à l'attraction gravitationnelle du Soleil et à la force due à sa pression de radiation. Pour quelle valeur de R ces deux forces ont-elles le même module ? On suppose qu'il y a absorption complète. La puissance du rayonnement solaire est de $3{,}8 \times 10^{26}$ W.

P7. (II) Une bobine cylindrique servant d'antenne AM comporte 250 spires de diamètre 1,5 cm. Trouvez la valeur maximale de la f.é.m. induite par une station de 10^4 W (assimilée à une source ponctuelle) émettant sur 800 kHz à une distance de 2 km. L'axe de la bobine est parallèle à la direction du champ magnétique de l'onde.

P8. (II) Soit du rayonnement faisant un angle d'incidence θ par rapport à une surface plane (figure 13.18).

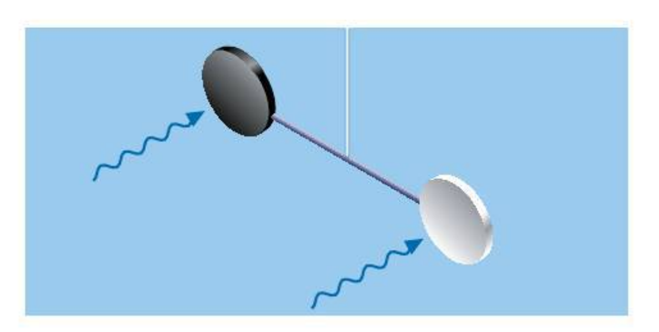
Montrez que la valeur moyenne de la pression de radiation est $u_{moy} \cos^2 \theta$. On suppose que la radiation est intégralement absorbée.



▲ **Figure 13.18**
Problème 8.

P9. (II) Un condensateur défectueux (parce qu'il laisse passer le courant) dont les armatures circulaires ont un rayon $R = 2$ cm a une capacité de 5 μF et une résistance équivalente de 4×10^5 Ω. À $t = 0$, la différence de potentiel entre les armatures est égale à zéro, mais elle augmente avec un taux constant de 2000 V/s. (a) Déterminez le courant de déplacement I_D. (b) À quel instant I_D est-il égal au courant de conduction ?

P10. (II) Un *radiomètre de Nichols* est composé de deux disques de rayon 1,2 cm reliés par une tige légère de longueur 10 cm suspendue en son milieu par un fil mince (figure 13.19). Un des disques est parfaitement absorbant, alors que l'autre est parfaitement réfléchissant. La torsion du fil est responsable d'un moment de force de rappel dont le module est fixé par une version circulaire de la loi de Hooke : $\tau_{torsion} = \kappa\theta$, où $\kappa = 1{,}0 \times 10^{-10}$ N·m/degré. Quel est l'angle de déviation à l'équilibre lorsque la radiation solaire incidente, dont l'intensité moyenne est de 1,0 kW/m², est normale aux disques ?



▲ **Figure 13.19**
Problème 10.

P11. (II) Une onde électromagnétique plane d'intensité 220 W/m² est incidente dans la direction normale à une plaque plane de rayon 30 cm. Si la plaque absorbe 60 % et réfléchit 40 % de la radiation incidente, quel est le module de la quantité de mouvement transmise à la plaque en 5 min ?

P12. (I) En 2010, la sonde *IKAROS* a montré qu'on pourrait utiliser le rayonnement solaire pour propulser un véhicule spatial. Supposons qu'une voilure solaire parfaitement réfléchissante d'aire 10^3 m² soit orientée perpendiculairement au rayonnement solaire d'intensité 1 kW/m². (a) Déterminez le module de la force exercée sur la voilure. (b) Si le véhicule a une masse de 10^3 kg, combien de temps lui faut-il pour atteindre 1 m/s à partir du repos ? (On néglige l'attraction gravitationnelle du Soleil et des planètes.)

ANNEXE A

UNITÉS SI

Les *unités de base* du Système international sont les suivantes*.

Le **mètre (m)** : Le mètre est la distance parcourue dans le vide par la lumière pendant un intervalle de temps égal à 1/299 792 458 s. (1983)

Le **kilogramme (kg)** : Égal à la masse du kilogramme étalon international. (1889)

La **seconde (s)** : La seconde est la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133. (1967)

L'**ampère (A)** : L'ampère est l'intensité d'un courant constant qui, passant dans deux conducteurs parallèles, rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable, et placés à un mètre l'un de l'autre dans le vide, produit entre ces conducteurs une force égale à 2×10^{-7} N par mètre de longueur. (1948)

Le **kelvin (K)** : Unité de température thermodynamique, le kelvin est la fraction 1/273,16 de la température thermodynamique du point triple de l'eau. (1968)

Le **candela (cd)** : Le candela est l'intensité lumineuse, dans une direction donnée, d'une source qui émet un rayonnement monochromatique de fréquence 540×10^{12} Hz et dont l'intensité énergétique dans cette direction est 1/683 W par stéradian. (1979)

La **mole (mol)** : La mole est la quantité de matière qui contient un nombre d'entités élémentaires identiques entre elles (atomes, molécules, ions, électrons, particules) égal au nombre d'atomes de carbone dans 0,012 kg de carbone 12. (1971)

Unités SI dérivées portant des noms particuliers

Grandeur	Unité dérivée	Nom
Activité	1 désintégration/s	becquerel (Bq)
Capacité	C/V	farad (F)
Charge	A·s	coulomb (C)
Potentiel électrique, f.é.m.	J/C	volt (V)
Énergie, travail	N·m	joule (J)
Force	$kg·m/s^2$	newton (N)
Fréquence	1/s	hertz (Hz)
Inductance	V·s/A	henry (H)
Densité de flux magnétique	Wb/m^2	tesla (T)
Flux magnétique	V·s	weber (Wb)
Puissance	J/s	watt (W)
Pression	N/m^2	pascal (Pa)
Résistance	V/A	ohm (Ω)

* Nous indiquons entre parenthèses l'année où la définition est devenue officielle.

ANNEXE B

RAPPELS DE MATHÉMATIQUES

Algèbre

Exposants

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \qquad (x^m)^n = x^{mn}$$

Équation du second degré

Les racines de l'équation du second degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

sont données par

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 < 4ac$, les racines ne sont pas réelles.

Équation d'une droite

L'équation d'une droite est de la forme

$$y = mx + b$$

où b est l'*ordonnée à l'origine* et m est la *pente*, telle que

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Logarithmes

Si

$$x = a^y$$

alors

$$y = \log_a x$$

La quantité y est le logarithme en *base a* de x. Si $a = 10$, le logarithme est dit *décimal* ou à base 10 et s'écrit $\log_{10} x$ ou simplement $\log x$. Si $a = e = 2{,}718\ 28\ldots$, le logarithme est dit *naturel* ou népérien et s'écrit $\log_e x$ ou $\ln x$ (noter que $\ln e = 1$).

$$\log(AB) = \log A + \log B \qquad \log(A/B) = \log A - \log B$$

$$\log(A^n) = n \log A$$

Géométrie

Triangle : Aire $= \frac{1}{2}$ base × hauteur, $A = \frac{1}{2} bh$

Cercle : Circonférence : $C = 2\pi r$

Aire : $A = \pi r^2$

Sphère : Aire de la surface : $A = 4\pi r^2$

Volume : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Un cercle de rayon r ayant son centre à l'origine a pour équation

(cercle) $$x^2 + y^2 = r^2$$

L'ellipse de la figure A a pour équation

(ellipse) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

où $2a$ est la longueur du *grand* axe et $2b$, la longueur du *petit* axe.

Figure A

Trigonométrie

Dans le triangle rectangle de la figure B, les fonctions trigonométriques fondamentales sont définies par :

$$\sin\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}} = \frac{a}{c}; \qquad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} = \frac{b}{c}; \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}} = \frac{a}{b}; \qquad \operatorname{cotan}\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

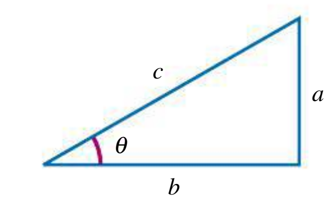


Figure B

Selon le théorème de Pythagore, $c^2 = a^2 + b^2$, donc $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

À partir du triangle quelconque de la figure C, on peut énoncer les deux relations suivantes :

(loi des cosinus) $$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma$$

(loi des sinus) $$\frac{\sin\alpha}{A} = \frac{\sin\beta}{B} = \frac{\sin\gamma}{C}$$

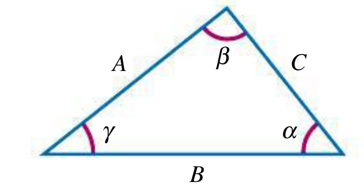


Figure C

Quelques identités trigonométriques

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \qquad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} \qquad \tan\theta = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{1 + \cos 2\theta}}$$

$$\sin(A \pm B) = \sin A\cos B \pm \cos A\sin B$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A\cos B \mp \sin A\sin B$$

$$\sin A \pm \sin B = 2\sin\frac{(A \pm B)}{2}\cos\frac{(A \mp B)}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2\cos\frac{(A + B)}{2}\cos\frac{(A - B)}{2}$$

$$\cos A - \cos B = 2\sin\frac{(A + B)}{2}\sin\frac{(B - A)}{2}$$

$$\sin A\cos B = \frac{1}{2}[\sin(A - B) + \sin(A + B)]$$

$$\sin A\sin B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$$

$$\cos A\cos B = \frac{1}{2}[\cos(A - B) + \cos(A + B)]$$

Développements en série

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1!}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 + \ldots$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \ldots \qquad \text{pour } |x| < 1$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \qquad x \text{ en radians}$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \ldots \qquad \text{pour } |x| < \pi/2$$

Approximation des petits angles

Les développements en série de $\sin x$, de $\cos x$ et de $\tan x$ ci-dessus, quand ils sont utilisés avec une très petite valeur de x, conduisent aux approximations suivantes:

$\sin x \approx x$
$\cos x \approx 1$ pour $x \ll 1$
$\tan x \approx x$

Par conséquent,
$\sin x \approx \tan x$ pour $x \ll 1$

Translations de fonctions

On peut faire subir à toute fonction $y(x)$ une translation d'une quelconque distance h le long de l'axe des x en remplaçant, dans cette fonction, «x» par «$x - h$». De même, on peut faire subir à toute fonction $y(x)$ une translation d'une quelconque distance k le long de l'axe des y en remplaçant, dans cette fonction, «y» par «$y - k$». La figure D illustre, en pointillés, les fonctions $y = x^2$ et $y = \sin(5\pi x)$ auxquelles est appliquée une translation vers la droite. Les courbes illustrées en lignes pleines sont $y = (x-1)^2$ et $y = \sin[5\pi(x - 0{,}025)]$.

Avec cette méthode, on déduit en particulier que

$\sin(x + \pi/2) = \cos x$
$\sin(x - \pi/2) = -\cos x$

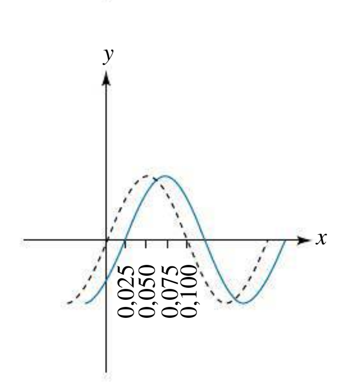


Figure D

ANNEXE C

RAPPELS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL

Calcul différentiel

Dérivée d'un produit :

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Dérivée d'un quotient :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

Règle de dérivation des fonctions composées :

Étant donné une fonction $f(u)$ où u est elle-même une fonction de x, on a

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Par exemple,

$$\frac{d(\sin u)}{dx} = \cos u \cdot \frac{du}{dx}$$

Dérivées de quelques fonctions*

$$\frac{d}{dx}(ax^n) = nax^{n-1};$$

$$\frac{d}{dx}(e^{ax}) = ae^{ax}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin ax) = a\cos ax;$$

$$\frac{d}{dx}(\cos ax) = -a\sin ax$$

$$\frac{d}{dx}(\tan ax) = a\sec^2 ax;$$

$$\frac{d}{dx}(\text{cotan}\, ax) = -a\,\text{cosec}^2\, ax$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \tan x \sec x;$$

$$\frac{d}{dx}(\text{cosec}\, x) = -\text{cotan}\, x\, \text{cosec}\, x$$

$$\frac{d}{dx}(\ln ax) = \frac{a}{x}$$

Calcul des intégrales

Intégration par parties :

$$\int u\left(\frac{dv}{dx}\right)dx = uv - \int v\left(\frac{du}{dx}\right)dx$$

* Pour les fonctions trigonométriques, x est en radians.

Quelques intégrales

(Une constante arbitraire peut être ajoutée à chaque intégrale*.)

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{(n+1)} \quad (n \neq -1)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln|a+bx|$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b(a+bx)}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| \quad (x^2 > a^2)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| \quad (x^2 < a^2)$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{a^2 \pm x^2} = \pm\frac{1}{2}\ln|a^2 \pm x^2|$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$= -\arccos\left(\frac{x}{a}\right) \quad (x^2 < a^2)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right|$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{(x^2+a^2)^{1/2}}$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2}$$

$$\int e^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}e^{ax}$$

$$\int xe^{ax}\,\mathrm{d}x = (ax-1)\frac{e^{ax}}{a^2}$$

$$\int x^2e^{-ax}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$$

$$\int \ln(ax)\,\mathrm{d}x = x\ln|ax| - x$$

$$\int \sin(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\cos(ax)$$

$$\int \cos(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\sin(ax)$$

$$\int \tan(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|\sec(ax)|$$

$$\int \mathrm{cotan}(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|\sin(ax)|$$

$$\int \sec(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|\sec(ax) + \tan(ax)|$$

$$\int \mathrm{cosec}(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\ln|\mathrm{cosec}(ax) + \mathrm{cotan}(ax)|$$

$$\int \sin^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}$$

$$\int \cos^2 ax\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin(2ax)}{4a}$$

$$\int \frac{1}{\sin^2(ax)}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\mathrm{cotan}(ax)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2(ax)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\tan(ax)$$

$$\int \tan^2(ax)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\tan(ax) - x$$

$$\int \mathrm{cotan}^2(ax)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{a}\mathrm{cotan}(ax) - x$$

* Pour les fonctions trigonométriques, x est en radians.

ANNEXE D

TABLEAU PÉRIODIQUE DES ÉLÉMENTS

Légende : Symbole, Masse atomique* — **C** 6, 12,01, $2p^2$ — Numéro atomique, Configuration électronique

Groupe I	Groupe II	Éléments de transition										Groupe III	Groupe IV	Groupe V	Groupe VI	Groupe VII	Groupe 0
H 1 1,01 $1s^1$																	**He** 2 4,00 $1s^2$
Li 3 6,94 $2s^1$	**Be** 4 9,01 $2s^1$											**B** 5 10,81 $2p^1$	**C** 6 12,01 $2p^2$	**N** 7 14,01 $2p^3$	**O** 8 16,00 $2p^4$	**F** 9 19,00 $2p^5$	**Ne** 10 20,18 $2p^6$
Na 11 22,99 $3s^1$	**Mg** 12 24,31 $3s^2$											**Al** 13 26,98 $3p^1$	**Si** 14 28,09 $3p^2$	**P** 15 30,97 $3p^3$	**S** 16 32,06 $3p^4$	**Cl** 17 35,45 $3p^5$	**Ar** 18 39,95 $3p^6$
K 19 39,10 $4s^1$	**Ca** 20 40,08 $4s^2$	**Sc** 21 44,96 $3d^14s^2$	**Ti** 22 47,90 $3d^24s^2$	**V** 23 50,94 $3d^34s^2$	**Cr** 24 52,00 $3d^54s^1$	**Mn** 25 54,938 $3d^54s^2$	**Fe** 26 55,85 $3d^64s^2$	**Co** 27 58,93 $3d^74s^2$	**Ni** 28 58,71 $3d^84s^2$	**Cu** 29 63,55 $3d^{10}4s^1$	**Zn** 30 65,38 $3d^{10}4s^2$	**Ga** 31 69,72 $4p^1$	**Ge** 32 72,59 $4p^2$	**As** 33 74,92 $4p^3$	**Se** 34 78,96 $4p^4$	**Br** 35 79,90 $4p^5$	**Kr** 36 83,80 $4p^6$
Rb 37 85,47 $5s^1$	**Sr** 38 87,62 $5s^2$	**Y** 39 88,91 $4d^15s^2$	**Zr** 40 91,22 $4d^25s^2$	**Nb** 41 92,91 $4d^45s^1$	**Mo** 42 95,94 $4d^55s^1$	**Tc** 43 98,9 $4d^55s^2$	**Ru** 44 101,07 $4d^75s^1$	**Rh** 45 102,91 $4d^85s^1$	**Pd** 46 106,4 $4d^{10}$	**Ag** 47 107,87 $4d^{10}5s^1$	**Cd** 48 112,41 $4d^{10}5s^2$	**In** 49 114,82 $5p^1$	**Sn** 50 118,69 $5p^2$	**Sb** 51 121,75 $5p^3$	**Te** 52 127,60 $5p^4$	**I** 53 126,90 $5p^5$	**Xe** 54 131,30 $5p^6$
Cs 55 132,91 $6s^1$	**Ba** 56 137,33 $6s^2$	57-71†	**Hf** 72 178,49 $5d^26s^2$	**Ta** 73 180,95 $5d^36s^2$	**W** 74 183,85 $5d^46s^2$	**Re** 75 186,21 $5d^56s^2$	**Os** 76 190,2 $5d^66s^2$	**Ir** 77 192,22 $5d^76s^2$	**Pt** 78 195,09 $5d^96s^1$	**Au** 79 196,97 $5d^{10}6s^1$	**Hg** 80 200,59 $5d^{10}6s^2$	**Tl** 81 204,37 $6p^1$	**Pb** 82 207,2 $6p^2$	**Bi** 83 208,98 $6p^3$	**Po** 84 (209) $6p^4$	**At** 85 (210) $6p^5$	**Rn** 86 (222) $6p^6$
Fr 87 (223) $7s^1$	**Ra** 88 226,03 $7s^2$	89-103‡	**Rf** 104 (261) $6d^27s^2$	**Ha** 105 (260) $6d^37s^2$	106 (263)	107 (262)	108 (265)	109 (266)									

† Lanthanides	**La** 57 139,91 $5d^16s^2$	**Ce** 58 140,12 $4f^26s^2$	**Pr** 59 140,91 $4f^36s^2$	**Nd** 60 144,24 $4f^46s^2$	**Pm** 61 (145) $4f^56s^2$	**Sm** 62 150,4 $4f^66s^2$	**Eu** 63 151,96 $4f^76s^2$	**Gd** 64 157,25 $5d^14f^76s^2$	**Tb** 65 158,93 $4f^96s^2$	**Dy** 66 162,50 $4f^{10}6s^2$	**Ho** 67 164,93 $4f^{11}6s^2$	**Er** 68 167,26 $4f^{12}6s^2$	**Tm** 69 168,93 $4f^{13}6s^2$	**Yb** 70 173,04 $4f^{14}6s^2$	**Lu** 71 174,97 $5d^14f^{14}6s^2$
‡ Actinides	**Ac** 89 (227) $6d^17s^2$	**Th** 90 232,04 $6d^27s^2$	**Pa** 91 231,04 $5f^26d^17s^2$	**U** 92 238,03 $5f^36d^17s^2$	**Np** 93 237,05 $5f^46d^17s^2$	**Pu** 94 (244) $5f^67s^2$	**Am** 95 (243) $5f^77s^2$	**Cm** 96 (247) $5f^76d^17s^2$	**Bk** 97 (247) $5f^86d^17s^2$	**Cf** 98 (251) $5f^{10}7s^2$	**Es** 99 (253) $5f^{11}7s^2$	**Fm** 100 (257) $5f^{12}7s^2$	**Md** 101 (258) $5f^{13}7s^2$	**No** 102 (259) $5f^{14}7s^2$	**Lw** 103 (260) $6d^17s^2$

* Valeur moyenne déterminée en fonction de l'abondance isotopique relative sur terre. L'annexe E indique le pourcentage d'abondance de certains isotopes. Pour les éléments instables, la masse de l'isotope le plus stable est indiquée entre parenthèses.

ANNEXE E

TABLE DES ISOTOPES LES PLUS ABONDANTS*

Chaque masse atomique est celle de l'atome neutre et comprend Z électrons.

La liste complète des isotopes, qu'ils soient d'origine naturelle ou qu'ils aient été produits artificiellement en laboratoire, compte plusieurs centaines d'éléments. Nous donnons ici la liste de ceux qui sont les plus abondants dans la nature. Lorsque plus de trois isotopes ont été répertoriés pour un même numéro atomique, nous indiquons les trois plus abondants (sauf exceptions). Lorsque aucun isotope stable n'existe pour un atome donné, nous décrivons un ou plusieurs des isotopes radioactifs ; dans certains cas, l'abondance ne peut être précisée. La dernière colonne de la table indique la demi-vie des isotopes radioactifs. Entre parenthèses, nous mentionnons le ou les modes de désintégration s'ils sont connus : α = désintégration alpha ; β = désintégration bêta ; C.E. = capture d'un électron orbital. Les chiffres entre parenthèses indiquent l'incertitude sur les derniers chiffres de la donnée expérimentale.

Numéro atomique (Z)	Élément	Symbole	Nombre de masse (A)	Masse atomique (u)	Abondance (%)	Demi-vie (mode de désintégration)
0	(neutron)	n	1	1,008 665	–	10,3 min (β^-)
1	hydrogène	H	1	1,007 825 035(12)	99,985(1)	
1	deutérium	D	2	2,014 101 779(24)	0,015(1)	
1	tritium	T	3	3,016 049 27(4)	–	12,32 a (β^-)
2	hélium	He	3	3,016 029 31(4)	0,000 137(3)	
2			4	4,002 603 24(5)	99,999 863(3)	
3	lithium	Li	6	6,015 121 4(7)	7,5(2)	
3			7	7,016 003 0(9)	92,5(2)	
4	béryllium	Be	7	7,016 929	–	53,28 jours (C.E.)
4			9	9,012 182 2(4)	100	
5	bore	B	10	10,012 936 9(3)	19,9(2)	
5			11	11,009 305 4(4)	80,1(2)	
6	carbone	C	12	12 (par définition)	98,90(3)	
6			13	13,003 354 826(17)	1,10(3)	
6			14	14,003 241 982(27)	trace**	5730 a (β^-)
7	azote	N	12	12,018 613	–	11,00 ms (β^+)
7			13	13,005 738 6	–	9,97 min (β^+)
7			14	14,003 074 002(26)	99,634(9)	
7			15	15,000 108 97(4)	0,366(9)	

* Données tirées de David R. Lide (dir.), *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, Boca Raton, CRC Press, 1994. Reproduit avec l'autorisation de CRC Press LLC par l'entremise du Copyright Clearance Center.

** Dans l'atmosphère terrestre, la proportion du nombre d'atomes $^{14}C/^{12}C$ est de $1,3 \times 10^{-12}$.

Numéro atomique (*Z*)	Élément	Symbole	Nombre de masse (*A*)	Masse atomique (u)	Abondance (%)	Demi-vie (mode de désintégration)
8	oxygène	O	16	15,994 914 63(5)	99,762(15)	
8			17	16,999 131 2(4)	0,038(3)	
8			18	17,999 160 3(9)	0,200(12)	
9	fluor	F	19	18,998 403 22(15)	100	
10	néon	Ne	20	19,992 435 6(22)	90,48(3)	
10			22	21,991 383 1(18)	9,25(3)	
11	sodium	Na	22	21,994 437	–	2,605 a (β^+, C.E.)
11			23	22,989 767 7(10)	100	
12	magnésium	Mg	24	23,985 041 9	78,99(3)	
12			25	24,985 837 0	10,00(1)	
12			26	25,982 593 0	11,01(2)	
13	aluminium	Al	27	26,981 538 6(8)	100	
14	silicium	Si	28	27,976 927 1(7)	92,23(1)	
14			29	28,976 494 9(7)	4,67(1)	
14			30	29,973 770 7(7)	3,10(1)	
15	phosphore	P	30	29,978 314	–	2,50 min (β^+)
15			31	30,973 762 0(6)	100	
16	soufre	S	32	31,972 070 70(25)	95,02(9)	
16			33	32,971 458 54(23)	0,75(4)	
16			34	33,967 866 65(22)	4,21(8)	
17	chlore	Cl	35	34,968 852 721(69)	75,77(7)	
17			37	36,965 902 62(11)	24,23(7)	
18	argon	Ar	36	35,967 545 52(29)	0,337(3)	
18			38	37,962 732 5(9)	0,063(1)	
18			40	39,962 383 7(14)	99,600(3)	
19	potassium	K	39	38,963 707 4(12)	93,258 1(44)	
19			40	39,963 999 2(12)	0,011 7(1)	$1{,}26 \times 10^9$ a (β^-)
19			41	40,961 825 4(12)	6,730 2(44)	
20	calcium	Ca	40	39,962 590 6(13)	96,941(18)	
20			42	41,958 617 6(13)	0,647(9)	
20			44	43,955 480 6(14)	2,086(12)	
21	scandium	Sc	45	44,955 910 0(14)	100	
22	titane	Ti	46	45,952 629 4(14)	8,0(1)	
22			47	46,951 764 0(11)	7,3(1)	
22			48	47,947 947 3(11)	73,8(1)	

Numéro atomique (*Z*)	Élément	Symbole	Nombre de masse (*A*)	Masse atomique (u)	Abondance (%)	Demi-vie (mode de désintégration)
23	vanadium	V	50	49,947 160 9(17)	0,250(2)	> 1,4 × 10^{17} a (C.E.)
23			51	50,943 961 7(17)	99,750(2)	
24	chrome	Cr	50	49,946 046 4(17)	4,345(13)	
24			52	51,940 509 8(17)	83,789(18)	
24			53	52,940 651 3(17)	9,501(17)	
25	manganèse	Mn	55	54,938 047 1(16)	100	
26	fer	Fe	54	53,939 612 7(15)	5,8(1)	
26			56	55,934 939 3(16)	91,72(30)	
26			57	56,935 395 8(16)	2,1(1)	
27	cobalt	Co	59	58,933 197 6(16)	100	
27			60	59,933 817	–	5,271 a (β^-)
28	nickel	Ni	58	57,935 346 2(16)	68,077(9)	
28			60	59,930 788 4(16)	26,223(8)	
28			62	61,928 346 1(16)	3,634(2)	
28			64	63,927 969	0,926(1)	
29	cuivre	Cu	63	62,929 598 9(16)	69,17(3)	
29			64	63,929 768	–	12,701 h (β^-, β^+, C.E.)
29			65	64,927 792 9(20)	30,83(3)	
30	zinc	Zn	64	63,929 144 8(19)	48,6(3)	
30			66	65,926 034 7(17)	27,9(2)	
30			68	67,924 845 9(18)	18,8(4)	
31	gallium	Ga	69	68,925 580(3)	60,108(9)	
31			71	70,924 700 5(25)	39,892(9)	
32	germanium	Ge	70	69,924 249 7(16)	21,23(4)	
32			72	71,922 078 9(16)	27,66(3)	
32			74	73,921 177 4(15)	35,94(2)	
33	arsenic	As	75	74,921 594 2(17)	100	
34	sélénium	Se	76	75,919 212 0(16)	9,36(11)	
34			78	77,917 307 6(16)	23,78(9)	
34			80	79,916 519 6(19)	49,61(10)	
35	brome	Br	79	78,918 336 1(26)	50,69(7)	
35			81	80,916 289(6)	49,31(7)	
36	krypton	Kr	82	81,913 482(6)	11,6(1)	
36			84	83,911 507(4)	57,0(3)	
36			86	85,910 616(5)	17,3(2)	
36			89	88,917 64	–	3,15 min (β^-)

Numéro atomique (*Z*)	Élément	Symbole	Nombre de masse (*A*)	Masse atomique (u)	Abondance (%)	Demi-vie (mode de désintégration)
37	rubidium	Rb	85	84,911 794(3)	72,165(20)	
37			87	86,909 187(3)	27,835(20)	$4,88 \times 10^{10}$ a (β^-)
38	strontium	Sr	86	85,909 267 2(28)	9,86(1)	
38			87	86,908 884 1(28)	7,00(1)	
38			88	87,905 618 8(28)	82,58(1)	
39	yttrium	Y	89	88,905 849(3)	100	
40	zirconium	Zr	90	89,904 702 6(26)	51,45(3)	
40			92	91,905 038 6(26)	17,15(2)	
40			94	93,906 314 8(28)	17,38(4)	
41	niobium	Nb	93	92,906 377 2(27)	100	
42	molybdène	Mo	95	94,905 841 1(22)	15,92(5)	
42			96	95,904 678 5(22)	16,68(5)	
42			98	97,905 407 3(22)	24,13(7)	
43	technétium	Tc	98	97,907 215(4)	–	$4,2 \times 10^{6}$ a (β^-)
44	ruthénium	Ru	101	100,905 581 9(24)	17,0(1)	
44			102	101,904 348 5(25)	31,6(2)	
44			104	103,905 424(6)	18,7(2)	
45	rhodium	Rh	103	102,905 500(4)	100	
46	palladium	Pd	105	104,905 079(6)	22,33(8)	
46			106	105,903 478(6)	27,33(3)	
46			108	107,903 895(4)	26,46(9)	
47	argent	Ag	107	106,905 092(6)	51,839(7)	
47			109	108,904 757(4)	48,161(7)	
48	cadmium	Cd	111	110,904 182(3)	12,80(8)	
48			112	111,902 758(3)	24,13(14)	
48			114	113,903 357(3)	28,73(28)	
49	indium	In	113	112,904 061(4)	4,3(2)	
49			115	114,903 880(4)	95,7(2)	$4,4 \times 10^{14}$ a (β^-)
50	étain	Sn	116	115,901 747(3)	14,53(1)	
50			118	117,901 609(3)	24,23(11)	
50			120	119,902 199 1(29)	32,59(10)	
51	antimoine	Sb	121	120,903 821 2(29)	57,36(8)	
51			123	122,904 216 0(24)	42,64(8)	
52	tellure	Te	126	125,903 314(3)	18,95(1)	
52			128	127,904 463(4)	31,69(1)	
52			130	129,906 229(5)	33,80(1)	$2,5 \times 10^{21}$ a

Numéro atomique (*Z*)	Élément	Symbole	Nombre de masse (*A*)	Masse atomique (u)	Abondance (%)	Demi-vie (mode de désintégration)
53	iode	I	127	126,904 473(5)	100	
54	xénon	Xe	129	128,904 780 1(21)	26,4(6)	
54			131	130,905 072(5)	21,2(4)	
54			132	131,904 144(5)	26,9(5)	
55	césium	Cs	133	132,905 429(7)	100	
56	barium	Ba	136	135,904 553(7)	7,854(36)	
56			137	136,905 812(6)	11,23(4)	
56			138	137,905 232(6)	71,70(7)	
56			144	143,922 94	–	11,4 s (β^-)
57	lanthane	La	138	137,907 105(6)	0,090 2(2)	$1{,}06 \times 10^{11}$ a
57			139	138,906 347(5)	99,909 8(2)	
58	cérium	Ce	138	137,905 985(12)	0,25(1)	
58			140	139,905 433(4)	88,48(10)	
58			142	141,909 241(4)	11,08(10)	
59	praséodyme	Pr	141	140,907 647(4)	100	
60	néodyme	Nd	142	141,907 719(4)	27,13(12)	
60			144	143,910 083(4)	23,80(12)	$2{,}1 \times 10^{15}$ a
60			146	145,913 113(4)	17,19(9)	
61	prométhium	Pm	145	144,912 743(4)	–	17,7 a (C.E.)
62	samarium	Sm	147	146,914 895(4)	15,0(2)	$1{,}06 \times 10^{11}$ a (α)
62			152	151,919 729(4)	26,7(2)	
62			154	153,922 206(4)	22,7(2)	
63	europium	Eu	151	150,919 847(8)	47,8(15)	
63			153	152,921 225(4)	52,2(15)	
64	gadolinium	Gd	156	155,922 118(4)	20,47(4)	
64			158	157,924 019(4)	28,84(12)	
64			160	159,927 049(4)	21,86(4)	
65	terbium	Tb	159	158,925 342(4)	100	
66	dysprosium	Dy	162	161,926 795(4)	25,5(2)	
66			163	162,928 728(4)	24,9(2)	
66			164	163,929 171(4)	28,2(2)	
67	holmium	Ho	165	164,930 319(4)	100	
68	erbium	Er	166	165,930 290(4)	33,6(2)	
68			167	166,932 046(4)	22,95(15)	
68			168	167,932 368(4)	26,8(2)	
69	thulium	Tm	169	168,934 212(4)	100	

Numéro atomique (*Z*)	Élément	Symbole	Nombre de masse (*A*)	Masse atomique (u)	Abondance (%)	Demi-vie (mode de désintégration)
70	ytterbium	Yb	172	171,936 378(3)	21,9(3)	
70			173	172,938 208(3)	16,12(21)	
70			174	173,938 859(3)	31,8(4)	
71	lutécium	Lu	175	174,940 770(3)	97,41(2)	
71			176	175,942 679(3)	2,59(2)	$3,8 \times 10^{10}$ a (β^-)
72	hafnium	Hf	177	176,943 217(3)	18,606(4)	
72			178	177,943 696(3)	27,297(4)	
72			180	179,946 545 7(30)	35,100(7)	
73	tantale	Ta	180	179,947 462(4)	0,012(2)	$> 1,2 \times 10^{15}$ a
73			181	180,947 992(3)	99,988(2)	
74	tungstène	W	182	181,948 202(3)	26,3(2)	
74			184	183,950 928(3)	30,67(15)	
74			186	185,954 357(4)	28,6(2)	
75	rhénium	Re	185	184,952 951(3)	37,40(2)	
75			187	186,955 744(3)	62,60(2)	$4,2 \times 10^{10}$ a (β^-)
76	osmium	Os	189	188,958 137(4)	16,1(8)	
76			190	189,958 436(4)	26,4(12)	
76			192	191,961 467(4)	41,0(8)	
77	iridium	Ir	191	190,960 584(4)	37,3(5)	
77			193	192,962 917(4)	62,7(5)	
78	platine	Pt	194	193,962 655(4)	32,9(6)	
78			195	194,964 766(4)	33,8(6)	
78			196	195,964 926(4)	25,3(6)	
79	or	Au	197	196,966 543(4)	100	
80	mercure	Hg	199	198,968 254(4)	16,87(10)	
80			200	199,968 300(4)	23,10(16)	
80			202	201,970 617(4)	29,86(20)	
81	thallium	Tl	203	202,972 320(5)	29,524(14)	
81			205	204,974 401(5)	70,476(14)	
82	plomb	Pb	206	205,974 440(4)	24,1(1)	
82			207	206,975 872(4)	22,1(1)	
82			208	207,976 627(4)	52,4(1)	
83	bismuth	Bi	209	208,980 374(5)	100	
84	polonium	Po	209	208,982 404(5)	–	102 a (α)
84			210	209,982 857	–	138,38 jours (α)
85	astate	At	210	209,987 126(12)	–	8,1 h (α, C.E.)

Numéro atomique (*Z*)	Élément	Symbole	Nombre de masse (*A*)	Masse atomique (u)	Abondance (%)	Demi-vie (mode de désintégration)
86	radon	Rn	222	222,017 570(3)	–	3,8235 jours (α)
87	francium	Fr	223	223,019 733(4)	–	21,8 min (β^-)
88	radium	Ra	226	226,025 402(3)	–	1599 a (α)
89	actinium	Ac	227	227,027 750(3)	–	21,77 a (β^-, α)
90	thorium	Th	231	231,036 298	–	1,063 jour (β^-)
90			232	232,038 054(2)	100	$1,4 \times 10^{10}$ a (α)
90			234	234,043 593	–	24,10 jours (β^-)
91	protactinium	Pa	231	231,035 880(3)	–	$3,25 \times 10^4$ a (α)
92	uranium	U	234	234,040 946 8(24)	0,0055(5)	$2,45 \times 10^5$ a (α)
92			235	235,043 924 2(24)	0,7200(12)	$7,04 \times 10^8$ a (α)
92			236	236,045 561	–	$2,34 \times 10^7$ a (α)
92			238	238,050 784 7(23)	99,2745(60)	$4,46 \times 10^9$ a (α)
93	neptunium	Np	237	237,048 167 8(23)	–	$2,14 \times 10^6$ a (α)
94	plutonium	Pu	239	239,052 157(2)	–	$2,411 \times 10^4$ a (α)
94			244	244,064 199(5)	–	$8,2 \times 10^7$ a (α)
95	américium	Am	243	243,061 375	–	$7,37 \times 10^3$ a (α)
96	curium	Cm	245	245,065 483	–	$8,5 \times 10^3$ a (α)
97	berkélium	Bk	247	247,070 300	–	$1,4 \times 10^3$ a (α)
98	californium	Cf	249	249,074 844	–	351 a (α)
99	einsteinium	Es	254	254,088 019	–	276 jours (α)
100	fermium	Fm	253	253,085 173	–	3,0 jours (α, C.E.)
101	mendélévium	Md	255	255,091 081	–	27 min (α, C.E.)
102	nobélium	No	255	255,093 260	–	3,1 min (α, C.E.)
103	lawrencium	Lw	257	257,099 480	–	0,65 s (α, C.E.)
104	rutherfordium	Rf	261	261,108 690	–	1,1 min (α)
105	dubnium	Db	262	262,113 760	–	34 s (α)
106	seaborgium	Sg	266	266,122	–	21 s (α)
107	bohrium	Bh	264	264,125	–	0,44 s (α)
108	hassium	Hs	269	269,134	–	9 s (α)
109	meitnerium	Mt	268	268,1388	–	0,07 s (α)

Réponses aux exercices et aux problèmes

CHAPITRE 1

Exercices

E1. (a) $-191\vec{\mathbf{i}}$ N; (b) $188\vec{\mathbf{j}}$ N

E2. (a) $(6{,}75\vec{\mathbf{i}} - 8{,}00\vec{\mathbf{j}}) \times 10^{-5}$ N; (b) $(-8{,}480\vec{\mathbf{i}} + 1{,}30\vec{\mathbf{j}}) \times 10^{-5}$ N

E3. (a) $208\vec{\mathbf{j}}$ N; (b) $(80{,}0\vec{\mathbf{i}} - 277\vec{\mathbf{j}})$ N

E4. (a) $(3{,}64\vec{\mathbf{i}} + 8{,}22\vec{\mathbf{j}}) \times 10^{-4}$ N; (b) $(6{,}78\vec{\mathbf{i}} - 8{,}56\vec{\mathbf{j}}) \times 10^{-4}$ N

E5. (a) (0,750; 0) m; (b) (1,50; 0) m; (c) Les forces sur q_3 ne peuvent s'annuler si elles ne sont pas parallèles

E6. $5{,}71 \times 10^{13}$ C

E7. $1{,}52 \times 10^{-14}$ m

E8. (a) $4{,}61 \times 10^{3}$ N; (b) $6{,}88 \times 10^{29}$ m/s^2

E9. $4{,}21 \times 10^{-8}$ N; (b) $2{,}90 \times 10^{-9}$ N

E10. (a) $kqQ(-0{,}222\vec{\mathbf{i}} - 0{,}250\vec{\mathbf{j}})$; (b) (−1,82; −2,04) m

E11. $q_1 = q_2 = -0{,}338$ µC

E12. $\pm 7{,}61 \times 10^{-8}$ C

E13. $F_{\text{élec}}/F_{\text{grav}} = 2{,}85 \times 10^{-18}$

E14. (a) $x = 1{,}00$ m; $q = -(9/16)Q$; (b) $x = -2{,}00$ m; $q = -(9/4)Q$

E15. ±133 nC, ±267 nC

E16. (a) $3{,}60 \times 10^{-4}\vec{\mathbf{i}}$ N; (b) $(3{,}22 \times 10^{-5}\vec{\mathbf{i}} + 16{,}4 \times 10^{-5}\vec{\mathbf{j}})$ N; (c) $12{,}7 \times 10^{-5}\vec{\mathbf{i}}$ N; (d) $(3{,}22 \times 10^{-5}\vec{\mathbf{i}} - 16{,}4 \times 10^{-5}\vec{\mathbf{j}})$ N

E17. (a) 20,5 N; (b) Non

E18. $(2{,}88\vec{\mathbf{i}} - 2{,}16\vec{\mathbf{j}})$ mN

E19. $5{,}76 \times 10^{5}$ N

E20. (a) $2{,}75 \times 10^{26}$ électrons; (b) $5{,}96 \times 10^{26}$ électrons; (c) $3{,}07 \times 10^{26}$ électrons

E21. Un électron excédentaire par $1{,}19 \times 10^{11}$ atomes d'aluminium

E22. (a) 0 N; (b) $3{,}80 \times 10^{-9}$ N; (c) $1{,}20 \times 10^{-8}$ N

Problèmes

P1. $q_2 = 1{,}89$ µC, $q_3 = -5{,}28$ µC

P2. (a) $2kQqx/(a^2 + x^2)^{3/2}\vec{\mathbf{i}}$; (b) $\pm a/\sqrt{2}$; (d) $\approx 2kqQ/x^2$

P3. (a) $-2kQqa/(a^2 + x^2)^{3/2}\vec{\mathbf{j}}$; (b) $x = 0$

P4. (a) $4kqQay/(y^2 - a^2)^2\vec{\mathbf{j}}$; (b) $\approx 4kqQa/y^3$

P5. $q = Q/2$

P6. (a) $q_1 = \pm 5{,}00$ µC; $q_2 = \pm 3{,}00$ µC

P7. (a) $2{,}08 \times 10^{13}$; (b) $7{,}56 \times 10^{-12}$

P8. (a) $1{,}90(kQ^2/d^2)(\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}})$; (b) $-0{,}485(kQ^2/d^2)(\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}} + \vec{\mathbf{k}})$

P9. (a) $\sqrt{ke^2/mr}$; (c) $r_1 = 5{,}30 \times 10^{-11}$ m, $r_2 = 2{,}12 \times 10^{-10}$ m, $r_3 = 4{,}77 \times 10^{-10}$ m

P10. (a) $q_1 = 5{,}00$ µC, $q_2 = 3{,}00$ µC ou $q_1 = 3{,}00$ µC, $q_2 = 5{,}00$ µC; (b) $q_1 = 9{,}57$ µC, $q_2 = -1{,}57$ µC ou $q_1 = -1{,}57$ µC, $q_2 = 9{,}57$ µC

P11. (a) $7{,}24 \times 10^{-10}$ N; (b) $2{,}28 \times 10^{-10}$ N; (c) $9{,}33 \times 10^{-11}$ N; (d) 24 ions, $F_E = 4{,}70 \times 10^{-11}$ N; (e) ≈121 ions

CHAPITRE 2

Exercices

E1. (a) $-5{,}57 \times 10^{-11}\vec{\mathbf{j}}$ N/C; (b) $1{,}02 \times 10^{-7}\vec{\mathbf{j}}$ N/C

E2. (a) $-1{,}92 \times 10^{-17}\vec{\mathbf{j}}$ N; (b) $-1{,}15 \times 10^{10}\vec{\mathbf{j}}$ m/s^2

E3. (a) $2{,}50 \times 10^{3}\vec{\mathbf{i}}$ N/C; (b) $-1{,}60 \times 10^{-5}\vec{\mathbf{i}}$ N

E4. (a) $x = -2{,}00$ m, $y = 0$ m; (b) $x = 0{,}667$ m, $y = 0$ m

E5. (a) $-7{,}64 \times 10^{10}\, Q/L^2\vec{\mathbf{j}}$; (b) $(-6{,}44\vec{\mathbf{i}} - 118\vec{\mathbf{j}}) \times 10^{9}Q/L^2$

E6. (a) $Q_1 = 0{,}280$ nC, $Q_2 = -0{,}920$ nC

E7. $3{,}06 \times 10^{6}\vec{\mathbf{j}}$ N/C

E8. (a) $4{,}22 \times 10^{3}\vec{\mathbf{i}}$ N/C; (b) $9{,}84 \times 10^{3}\vec{\mathbf{i}}$ N/C; (c) $-2{,}95 \times 10^{-5}\vec{\mathbf{i}}$ N; (d) $2{,}95 \times 10^{-5}\vec{\mathbf{i}}$ N

E9. (a) $(-8{,}05\vec{\mathbf{i}} + 4{,}03\vec{\mathbf{j}}) \times 10^{3}$ N/C; (b) $(1{,}92\vec{\mathbf{i}} - 2{,}88\vec{\mathbf{j}}) \times 10^{3}$ N/C; (c) Non; (d) Oui

E10. $(2{,}36\vec{\mathbf{i}} + 1{,}00\vec{\mathbf{j}}) \times 10^{4}$ N/C

E11. (a) $(-1{,}08\vec{\mathbf{i}} + 0{,}624\vec{\mathbf{j}}) \times 10^{7}$ N/C; (b) $(32{,}4\vec{\mathbf{i}} - 18{,}7\vec{\mathbf{j}})$ N; (c) Aucun effet

E12. (a) $Q_1/Q_2 = 1{,}00$; (b) $Q_1/Q_2 = -4{,}00$; (c) $Q_2/Q_1 = -9{,}00$

E14. (a) $2{,}25 \times 10^{21}$ N/C; (b) $5{,}13 \times 10^{11}$ N/C

E15. (a) Pour $x < 0$: $E_x = kq[1/(6 - x)^2 - 1/x^2]$, pour $0 < x < 6$: $E_x = kq[1/(6 - x)^2 + 1/x^2]$, pour $x > 6$: $E_x = kq[1/x^2 - 1/(x - 6)^2]$

E16. (a) Pour $x < 0$: $E_x = kq[1/(6 - x)^2 - 2/x^2]$, pour $0 < x < 6$: $E_x = kq[1/(6 - x)^2 + 2/x^2]$, pour $x > 6$: $E_x = kq[2/x^2 - 1/(x - 6)^2]$; (b) 20,5 m

E17. $(4{,}66\vec{\mathbf{i}} + 2{,}88\vec{\mathbf{j}}) \times 10^{-3}$ N

E18. (a) $(-7{,}19\vec{\mathbf{i}} - 16{,}2\vec{\mathbf{j}})$ kN/C; (b) Aucun changement; (c) Aucun changement

E19. (a) $(2kq/x^2)[1 - (1 + a^2/x^2)^{-3/2}]\vec{\mathbf{i}}$;
(b) $2a^2kq\{(a^2 - 3y^2)/[y^2(y^2 - a^2)^2]\}\vec{\mathbf{j}}$
E21. (c) Seulement les lignes dues à la plaque
E26. $-16{,}0$ μC sur la surface intérieure et 8,00 μC sur la surface extérieure
E27. (a) 1,71 ns; (b) 2,57 cm; (c) $4{,}10 \times 10^{-16}$ J
E28. 4,44 kN/C
E29. (a) 13,9 cm; (b) 0,348 μs
E30. (a) 228 N/C
E31. (a) $1{,}78 \times 10^{-12}$ s; (b) $8{,}35 \times 10^{-7}$ m
E32. (a) $1{,}13 \times 10^{6}$ m/s; (b) $2{,}79 \times 10^{-16}$ s
E33. (a) $3{,}75 \times 10^{6}$ m/s
E34. (a) 7,13 mm; (b) $-12{,}5°$
E35. Régions I et III: $(\sigma/2\varepsilon_0)\vec{\mathbf{i}}$, région II: $(5\sigma/2\varepsilon_0)\vec{\mathbf{i}}$, région IV: $(-\sigma/2\varepsilon_0)\vec{\mathbf{i}}$
E36. $8{,}85 \times 10^{-9}$ C/m^2
E37. (a) 2,26 N; (b) À 12,6 cm de la charge, dans la direction de la plaque
E38. $4{,}80 \times 10^{4}$ N/C
E39. $2{,}02 \times 10^{4}$ N/C
E40. $2k\lambda[(1/x\vec{\mathbf{i}}) + (1/y)\vec{\mathbf{j}}]$
E41. $(-3{,}00\vec{\mathbf{i}} + 3{,}00\vec{\mathbf{j}}) \times 10^{6}$ N/C
E42. (a) $1{,}33 \times 10^{-25}$ J; (b) $2{,}30 \times 10^{-25}$ N·m
E43. (a) $8{,}00 \times 10^{-11}$ C·m; (b) $8{,}00 \times 10^{-6}$ J
E44. (a) $1{,}43 \times 10^{-10}$ N; (b) $7{,}14 \times 10^{-11}$ N
E45. (a) $3{,}20 \times 10^{5}$ N/C; (b) $5{,}63 \times 10^{16}$ m/s^2
E46. (a) $12{,}8\vec{\mathbf{i}}$ N/C; (b) $(1{,}41\vec{\mathbf{i}} + 4{,}24\vec{\mathbf{j}})$ N/C
E47. $(6kQ/L^2)\vec{\mathbf{j}}$
E48. ±80,1 nC
E49. $-7{,}20 \times 10^{-11}$ C
E50. $(1{,}30\vec{\mathbf{i}} - 4{,}03\vec{\mathbf{j}})$ N/C
E51. (a) $\vec{\mathbf{E}} = 9{,}55 \times 10^7\vec{\mathbf{i}}$ N/C, $\vec{\mathbf{F}}_E = -191\vec{\mathbf{i}}$ N;
(b) $\vec{\mathbf{E}} = 3{,}76 \times 10^7\vec{\mathbf{i}}$ N/C, $\vec{\mathbf{F}}_E = 188\vec{\mathbf{i}}$ N
E52. (a) $\vec{\mathbf{E}} = 3{,}47 \times 10^7\vec{\mathbf{j}}$ N/C, $\vec{\mathbf{F}}_E = 208\vec{\mathbf{j}}$ N;
(b) $\vec{\mathbf{E}} = (-2{,}00\vec{\mathbf{i}} + 6{,}93\vec{\mathbf{j}}) \times 10^7$ N/C,
$\vec{\mathbf{F}}_E = (80{,}0\vec{\mathbf{i}} - 277\vec{\mathbf{j}})$ N
E53. (a) Même réponse: (0,750; 0) m;
(b) Même réponse: (1,50; 0) m;
(c) Les champs électriques à la position de q_3 ne peuvent s'annuler s'ils ne sont pas parallèles
E54. (a) $\vec{\mathbf{E}} = kQ(-0{,}222\vec{\mathbf{i}} - 0{,}250\vec{\mathbf{j}})$,
$\vec{\mathbf{F}}_E = kQq(-0{,}222\vec{\mathbf{i}} - 0{,}250\vec{\mathbf{j}})$;
(b) Même réponse: (–1,82; –2,04) m
E55. (a) 9,88 kN/C; (b) 3,17 μs
E56. 2,20 μC
E57. (a) $2{,}10 \times 10^{-5}$ C; (b) $-1{,}65 \times 10^4\vec{\mathbf{i}}$ N/C
E58. (a) $-12{,}0\vec{\mathbf{i}}$ kN/C; (b) $(-9{,}42\vec{\mathbf{i}} + 8{,}66\vec{\mathbf{j}})$ kN/C;
(c) $(-6{,}12\vec{\mathbf{i}} + 23{,}0\vec{\mathbf{j}})$ kN/C
E59. (a) 2245,79 N/C; (b) 2250 N/C;
(c) 0,187 %
E60. (a) 62,0 nC/cm^2; (b) $2{,}24 \times 10^{-12}$ N
E61. (a) (0,212 V)/r; (b) $3{,}39 \times 10^{-12}$ N
E62. (a) $5{,}00 \times 10^{-30}$ C·m; (b) $5{,}77 \times 10^{-30}$ C·m
E63. (a) $6(a + b)$; (b) Les voisines ayant des dipôles en sens opposés s'attirent latéralement
E64. (a) $3{,}46 \times 10^{-15}$ N; (b) $3{,}46 \times 10^{-15}$ N, oui

Problèmes

P2. (a) $[2\pi R|\lambda|kz/(z^2 + R^2)^{3/2}]$; (b) $\pm R/\sqrt{2}$;
(c) $\approx(2\pi R|\lambda|k/z^2)$
P3. $-(Cp/x^2)\vec{\mathbf{i}}$
P4. (a) $(2k\lambda/R)\sin(\theta_0)\vec{\mathbf{j}}$
P7. (b) $\approx kQ/y^2$; (c) $\approx 2kQ/yL$
P10. $\pi R\sqrt{2m/k\lambda q}$
P12. (a) $(k\lambda/R)\vec{\mathbf{i}}$; (b) $(k\lambda/R)(\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}})$
P13. (a) $[2kQx/(a^2 + x^2)^{3/2}]\vec{\mathbf{i}}$; (b) $\approx 2kQ/x^2$;
(c) $x = \pm a/\sqrt{2}$
P14. (a) $\approx(kQx/R^3)$
P16. $2{,}58 \times 10^6$ m/s $< v_0 < 2{,}65 \times 10^6$ m/s
P17. 25,7°
P18. $-(2k\lambda/R)\vec{\mathbf{i}}$
P19. $(2k\lambda/a)\vec{\mathbf{i}}$
P20. $-(\pi k\lambda_0/2R)\vec{\mathbf{j}}$
P21. $-[2k\lambda R^2/(z^2 + R^2)^{3/2}]\vec{\mathbf{j}} + [\pi k\lambda Rz/(z^2 + R^2)^{3/2}]\vec{\mathbf{k}}$
P22. (a) $(k\lambda_0/R)[(\cos\theta_0 \sin\theta_0) + \theta_0]\vec{\mathbf{j}}$;
(b) $-(k\lambda_0/R)[\theta_0 - (\cos\theta_0 \sin\theta_0)]\vec{\mathbf{i}}$
P23. (a) $2kA(1 - 2y/\sqrt{4y^2 + L^2})\vec{\mathbf{j}}$;
(b) $-2kA\{\ln[(L + \sqrt{4y^2 + L^2})/2y] - L/\sqrt{4y^2 + L^2}\}$

CHAPITRE 3

Exercices

E1. 10,2 N·m^2/C
E2. 0,867 N·m^2/C
E3. $\pi R^2 E$
E4. 1,30 N·m^2/C
E5. $-2{,}26 \times 10^5$ N·m^2/C
E6. (a) 1,59 μC
E7. (a) $6{,}78 \times 10^6$ N·m^2/C; (b) $1{,}13 \times 10^6$ N·m^2/C;
(c) Non pour (a), oui pour (b)
E8. $Q/24\varepsilon_0$
E9. (a) $11{,}3\vec{\mathbf{u}}_r$ N/C; (b) $7{,}23\vec{\mathbf{u}}_r$ N/C
E10. (a) $\vec{\mathbf{E}}_{int} = [(1{,}44 \times 10^5)/r^2]\vec{\mathbf{u}}_r$,
$\vec{\mathbf{E}}_{ext} = [(0{,}720 \times 10^5)/r^2]\vec{\mathbf{u}}_r$;
(b) $-16{,}0$ μC sur la surface intérieure et 8,00 μC sur la surface extérieure
E12. (a) $-3{,}56 \times 10^{-11}$ C; (b) Non
E13. (a) Zéro; (b) $|\sigma|/\varepsilon_0$
E14. (a) $2\sigma/\varepsilon_0$; (b) σ/ε_0

E15. (a) σ/ε_0; (b) Zéro
E16. (a) bL^3; (b) $\varepsilon_0 bL^3$
E17. $\sigma_2 = -a\sigma_1/b$
E18. (a) $\sigma a/\varepsilon_0 r$; (b) $\sigma(b - a)/\varepsilon_0 r$
E19. $\lambda_2 = -\lambda_1$
E20. (a) $2k\lambda/r$; (b) Nul
E21. (a) kQ/r^2; (b) Nul
E22. (a) $\sigma a^2/\varepsilon_0 r^2$; (b) $\sigma(b^2 - a^2)/\varepsilon_0 r^2$
E23. $\sigma_a/\sigma_b = -b^2/a^2$
E24. (a) $\sigma_{\text{int}} = -Q/4\pi R_1^2$; $\sigma_{\text{ext}} = Q/4\pi R_2^2$; (b) kQ/r^2; (c) kQ/r^2; (d) Non
E25. 245 N/C
E26. (a) 1,35 kN/C; (b) 900 N/C
E27. $-7{,}71 \times 10^{-8}$ C/m^2
E28. (a) $1{,}29 \times 10^4 \vec{\mathbf{u}}_r$ N/C; (b) $9{,}90\vec{\mathbf{u}}_r$ kN/C
E29. (a) 122 N·m^2/C; (b) $-38{,}6$ N·m^2/C
E30. (a) $2kQ/r^2$; (b) kQ/r^2
E31. (a) 1,06 μC/m^3; (b) $1{,}00 \times 10^3$ N/C
E32. $EL^2/4$
E33. (a) λC; (b) $\dfrac{\lambda C}{\kappa\varepsilon_0} e^{-r/\lambda}$

Problèmes

P1. (a) $(\rho r/3\varepsilon_0)\vec{\mathbf{u}}_r$; (b) $(\rho R^3/3\varepsilon_0 r^2)\vec{\mathbf{u}}_r$, oui
P2. (a) $(kQr^2/R^4)\vec{\mathbf{u}}_r$; (b) $(kQ/r^2)\vec{\mathbf{u}}_r$, oui
P3. (a) $-4\pi\sigma R_1^2$; (b) $-4\pi\sigma(R_2^2 - R_1^2)$; (c) $\vec{\mathbf{E}} = (-\sigma R_2^2/\varepsilon_0 r^2)\vec{\mathbf{u}}_r$
P5. (a) $\vec{\mathbf{E}} = (\rho r/2\varepsilon_0)\vec{\mathbf{u}}_r$; (b) $\vec{\mathbf{E}} = (\rho R^2/2\varepsilon_0 r)\vec{\mathbf{u}}_r$, oui
P6. (a) $[\rho(R^3 - a^3)/3\varepsilon_0 r^2]\vec{\mathbf{u}}_r$; (b) $[\rho(r^3 - a^3)/3\varepsilon_0 r^2]\vec{\mathbf{u}}_r$
P9. (a) $(kQ/r^2)\vec{\mathbf{u}}_r$; (b) $(kQ/r^2)\vec{\mathbf{u}}_r$
P10. $[(A/2\varepsilon_0)(1 - a^2/r^2)]\vec{\mathbf{u}}_r$
P11. (a) $[\rho(r^2 - a^2)/2\varepsilon_0 r]\vec{\mathbf{u}}_r$; (b) $[\rho(R^2 - a^2)/2\varepsilon_0 r]\vec{\mathbf{u}}_r$
P12. $[(\rho_0/\varepsilon_0)(r/3 - r^2/4R)]\vec{\mathbf{u}}_r$
P13. Pour $y < t/2$: $E = \rho y/\varepsilon_0$, pour $y \geq t/2$: $E = \rho t/2\varepsilon_0$
P14. (b) $(\rho/3\varepsilon_0)\vec{\mathbf{d}}$

CHAPITRE 4

Exercices

E1. (a) $1{,}88 \times 10^{28}$ eV; (b) 1,58 a
E2. (a) $2{,}88 \times 10^5$ C; (b) $3{,}46 \times 10^6$ J
E3. 60,0 V
E4. (a) 18,0 V; (b) 0,150 m
E5. 6,00 V
E6. (a) $-A \ln(x/x_0)$; (b) $(A/B)(e^{-Bx} - 1)$
E7. (a) $3{,}10 \times 10^{-7}$ V; (b) $3{,}57 \times 10^{-4}$ V; (c) $2{,}56 \times 10^3$ V
E8. (a) $-5{,}68 \times 10^{-4}$ V; (b) $-0{,}655$ V; (c) $-4{,}70 \times 10^6$ V
E9. (a) $2{,}05 \times 10^6$ m/s; (b) $4{,}80 \times 10^4$ m/s
E10. $3{,}00 \times 10^3$ V
E11. $2{,}00 \times 10^{-5}$ J
E12. (a) 24,0 V; (b) $-7{,}20 \times 10^{-5}$ J
E13. 150 V
E14. (a) $-9{,}34 \times 10^6$ V; (b) $-1{,}19 \times 10^7$ V
E15. (a) 216 V; (b) 52,0 kV
E16. (a) $4{,}00 \times 10^3$ V/m; (b) $1{,}92 \times 10^{-17}$ J; (c) 120 V; (d) $-1{,}92 \times 10^{-17}$ J; (e) Aucunement
E17. 1,69 J
E18. (a) $\sigma(x_0 - x)/2\varepsilon_0$; (b) $\pm$ 5,06 cm
E19. (a) $-9{,}57$ V; (b) $-7{,}23$ V
E20. (a) -156 V; (b) $5{,}20 \times 10^4$ V/m
E21. (a) $2{,}30 \times 10^{-13}$ J; (b) $1{,}02 \times 10^7$ m/s
E22. $6{,}95 \times 10^{-11}$ J
E23. (a) $4{,}11 \times 10^5$ V; (b) $-0{,}822$ J; (c) $-2{,}68$ J
E24. $-2{,}55$ J
E25. (a) $-30{,}0$ kV; (b) $v = 20{,}0$ m/s
E26. (a) 12,0 kV; (b) 2,00 km/s
E27. (a) $r = 3{,}00$ m, $Q = 0{,}200$ μC; (b) $r = 3{,}00$ m, $Q = 16{,}0$ μC
E28. (a) $x = 0{,}800$ m et 1,33 m; (b) $x = 0{,}308$ m et $-0{,}800$ m
E29. 0,684 J
E30. (a) $3{,}00 \times 10^6$ V; (b) $2{,}01 \times 10^6$ V; (c) $1{,}80 \times 10^6$ V
E31. (a) 0,566 MV; (b) 1,13 J
E32. 0 J
E33. (a) $4{,}94 \times 10^5$ V; (b) $-6{,}17 \times 10^5$ V; (c) $-1{,}98$ J
E34. (a) $-3{,}00$ μC; (b) $-4{,}11$ μC
E35. (a) 1,20 MV; (b) 3,30 J
E36. (a) $6{,}59 \times 10^{-11}$ J; (b) $6{,}59 \times 10^{-11}$ J; (c) $5{,}06 \times 10^{16}$ fissions/s
E37. (a) $2kq\,[(1/x) - 1/(x^2 + a^2)^{1/2}]$; (b) $-\{2kqa^2/[y(y^2 - a^2)]\}$; (d) $b \to \infty$
E39. (a) 5,26 cm vers la charge; (b) 5,88 cm vers l'extérieur; (c) 81,6 cm vers l'extérieur, aucune
E40. $5{,}41 \times 10^{-14}$ m
E41. (a) $5{,}60 \times 10^{-12}$ J; (b) $5{,}60 \times 10^{-12}$ J
E42. (a) $1{,}44 \times 10^6$ V; (b) 27,2 V; (c) Aucune modification
E43. (a) $kQ/(a^2 + y^2)^{1/2}$, $\approx kQ/y$; (b) $[kQy/(a^2 + y^2)^{3/2}]\vec{\mathbf{j}}$, $\approx(kQ/y^2)\vec{\mathbf{j}}$
E44. (a) $\pm$30,0 V; (b) $\pm$30,0 kV; (c) $\pm$3,00 MV
E45. (a) $8{,}84 \times 10^{-6}$ C/m^2; (b) $6{,}94 \times 10^{10}$; (c) $1{,}00 \times 10^6$ V/m
E46. (a) $V(r) = kQ[(1/a) - 2/b]$, $E_r = 0$; (b) $V(r) = kQ[(1/r) - 2/b]$, $E_r = kQ/r^2$; (c) $V(r) = -kQ/r$, $E_r = -kQ/r^2$

E47. (a) $2kQ/(a^2 + x^2)^{1/2}$; (b) $[2kQx/(a^2 + x^2)^{3/2}]\vec{\mathbf{i}}$

E48. (a) $2kQy/(y^2 - a^2)$; (b) $[2kQ(y^2 + a^2)/(y^2 - a^2)^2]\vec{\mathbf{j}}$

E49. (a) $2kQa/(x^2 - a^2)$; (b) $[4kQax/(x^2 - a^2)^2]\vec{\mathbf{i}}$

E50. kQr/R^3

E51. $(2k\lambda/r)\vec{\mathbf{u}}_r$

E52. $2\pi k\sigma[1 - y/(a^2 + y^2)^{1/2}]$

E53. (a) $(3y^2z - 6x^2y)\vec{\mathbf{i}} + (6xyz - 2x^3 - 5z^3)\vec{\mathbf{j}} + (3xy^2 - 15yz^2)\vec{\mathbf{k}}$; (b) Inchangée

E54. −37,0 V

E55. (a) 2,50 m

E56. (a) $1{,}01 \times 10^{-20}$ J ; (b) 19,9 %

E57. $-1{,}12 \times 10^{-20}$ J

E58. 11,7 mJ

E59. (a) 4,41 V ; (b) −32,1 nJ

E60. (a) $Q_1 = 2{,}00$ nC ; $Q_2 = 5{,}00$ nC ; (b) $Q_1 = 18{,}0$ nC ; $Q_2 = 45{,}0$ nC

E61. 1,39 μJ

E62. −0,206 eV

E63. 62,2 V

E64. (a) 0,170 μJ ; (b) 18,4 cm/s

E65. 70,0 nJ

E66. 0,844 μC/m^2

E67. 10,3 nC

E68. 1,59 kV

E69. $Q_1 = 9{,}00$ nC, $Q_2 = 21{,}0$ nC

Problèmes

P1. $K_\alpha = 5{,}50 \times 10^{-12}$ J, $K_{Th} = 9{,}41 \times 10^{-14}$ J

P2. $2\pi k\sigma[(b^2 + y^2)^{1/2} - (a^2 + y^2)^{1/2}]$

P3. (a) $-4{,}90 \times 10^{-18}$ J ; (b) $-1{,}43 \times 10^{-18}$ J

P4. 17,4 s

P5. (a) $k[(Q_1/R_1) + (Q_2/R_2)]$; (b) $k(Q_1 + Q_2)/R_2$; (c) $kQ_1(1/R_1 - 1/R_2)$; (d) $Q_1 = 0$

P7. (b) $3{,}97 \times 10^6$ V/m

P8. (a) $(kQ/L)\ln[(x + L/2)/(x - L/2)]$; (b) $(2kQ/L)\ln\{(L/2) + [(L/2)^2 + y^2]^{1/2}/y\}$

P9. $k\lambda\ln\{[L + (y^2 + L^2)^{1/2}]/y\}$

P12. (b) $E_r = 2kp\cos\theta/r^3$; $E_\theta = kp\sin\theta/r^3$

P15. (a) $5{,}41 \times 10^{-21}$ J ; (b) $-5{,}41 \times 10^{-21}$ J ; (c) $-10{,}8 \times 10^{-21}$ J ; (d) $10{,}8 \times 10^{-21}$ J

P17. (a) en $(x, 0)$, $V(x) = kAx\ln[x^2/(x^2 - L^2/4)]$; en $(0, y)$, $V(y) = 2kA(\sqrt{y^2 + L^2/4} - y)$; (b) en $(x, 0)$, $V(x) = kAx\ln[(2x + L)/(2x - L)] - kAL$; en $(0, y)$, $V(y) = 0$

P18. (a) $[4kQ/(4x^2 - L^2)]\vec{\mathbf{i}}$; (b) $(2kQ/y\sqrt{L^2 + 4y^2})\vec{\mathbf{j}}$

P19. (a) $\pi kB\{a\sqrt{a^2 + y^2} + y^2\ln[y/(a + \sqrt{a^2 + y^2})]\}$; (b) $(\pi kC/3)(2a^2\sqrt{a^2 + y^2} - 4y^2\sqrt{a^2 + y^2} + 4y^3)$

P20. (a) $(3kQ/2a^3)\{a\sqrt{a^2 + y^2} + y^2\ln[(y/a + \sqrt{a^2 + y^2})]\}$; (b) $(2kQ/3a^4)(2a^2\sqrt{a^2 + y^2} - 4y^2\sqrt{a^2 + y^2} + 4y^3)$

P21. (a) $9000/\sqrt{(x - 0{,}5)^2 + y^2} - 9000/\sqrt{(0{,}5 + x)^2 + y^2}$

P22. (a) $9000/\sqrt{(x - 0{,}5)^2 + y^2} + 9000/\sqrt{(0{,}5 + x)^2 + y^2}$

CHAPITRE 5

Exercices

E1. (a) 50,0 pF ; (b) 600 pC

E2. (a) 24,1 pF/m ; (b) 1,45 nC

E3. (a) 54,2 cm^2 ; (b) 167 V ; (c) $8{,}35 \times 10^5$ V/m

E4. (a) 24,0 V ; (b) 2,50 nF ; (c) 0,226 m^2

E5. (a) $-8{,}85 \times 10^{-10}$ C/m^2 ; (b) 91,7 mF ; (c) 712 μF

E6. 1,45 mm

E7. $4\varepsilon_0 A/d$

E8. (a) $6{,}63 \times 10^4$ V ; (b) 1,59 μC

E9. 8,00 nF

E10. $8{,}00 \times 10^{-10}$ C

E11. $Q_1 = 32{,}0$ μC, $Q_2 = 48{,}0$ μC, $\Delta V_1 = \Delta V_2 = 8{,}00$ V

E12. (a) 33,4 pF ; (b) 25,1 pF ; (c) 8,35 pF

E13. (a) 4,58 pF ; (b) $1{,}43 \times 10^8$

E14. (a) $Q_1 = Q_2 = 0{,}857$ μC, $\Delta V_1 = 8{,}57$ V, $\Delta V_2 = 3{,}43$ V ; (b) $\Delta V_1 = \Delta V_2 = 12{,}0$ V, $Q_1 = 1{,}20$ μC, $Q_2 = 3{,}00$ μC

E15. 6,00 μF

E16. 7,01 μF

E17. (a) Deux en parallèle avec deux en série ; (b) Quatre en série

E18. 0,366 μF

E19. $Q_1 = 16{,}0$ μC, $Q_2 = 32{,}0$ μC, $\Delta V_1 = \Delta V_2 = 8{,}00$ V

E20. $\Delta V_1 = \Delta V_2 = 30{,}0$ V, $Q_1 = 60{,}0$ μC, $Q_2 = 180$ μC

E21. (a) $Q_1 = 32{,}2$ μC, $Q_2 = 53{,}8$ μC, $\Delta V_1 = \Delta V_2 = 10{,}8$ V ; (b) $\Delta V_1 = \Delta V_2 = 1{,}75$ V, $Q_1 = 5{,}25$ μC, $Q_2 = 8{,}75$ μC

E22. 17 possibilités

E23. 0,222 pF

E24. (a) 0,0200 J ; (b) 5,00 mJ

E25. (a) 14,2 pF ; (b) 4,09 nJ ; (c) $9{,}60 \times 10^3$ V/m ; (d) 408 μJ/m^3

E26. (a) 125 pF ; (b) 3,60 μJ

E27. 0,192 J/m^3

E28. (a) $U_1 = 0{,}600$ mJ, $U_2 = 1{,}00$ mJ ; (b) $U_1 = 0{,}234$ mJ, $U_2 = 0{,}141$ mJ

E29. (a) $U_{10} = 204$ μJ, $U_{20} = 81{,}8$ μJ, $U_1 = 66{,}7$ μJ, $U_2 = 167$ μJ ; (c) $U_1 = U_2 = 0$

E30. (a) $U_{10} = 1{,}60$ mJ, $U_{20} = 4{,}00$ mJ, $U_1 = 0{,}294$ mJ, $U_2 = 0{,}735$ mJ ; (c) $U_{10} = 816$ μJ, $U_{20} = 327$ μJ, $U_1 = U_2 = 0$

E31. (a) 530 μJ ; (b) 6,62 μJ

E32. (a) 1,56 nJ ; (b) 55,2 $\mu J/m^3$

E33. (a) $\varepsilon_0 A/(d - \ell)$; (b) Aucun changement

E34. (a) $\Delta V_f = \Delta V_i = \Delta V$; (b) $Q_f = \frac{1}{2}Q_i$; (c) $U_f = \frac{1}{2}U_i$

E35. (a) Double ; (b) Aucun changement ; (c) Double

E36. (a) 160 mJ ; (b) 53,4 mJ

E37. $8,96 \times 10^5$ J/m^3

E38. 63,7 μJ

E39. 6,38 V

E40. $4,58 \times 10^{-4}$ $\mu J/m^3$

E41. $C_0(\kappa_1 + \kappa_2)/2$

E42. $[(2\kappa_1\kappa_2)/(\kappa_1 + \kappa_2)]C_0$

E43. (a) 1,72 V ; (b) 4,66 pF

E44. 3,60 μC

E45. (a) 0,942 cm^2 ; (b) 15,0 kV

E46. (a) 1,50 ; (b) 1,33 ; (c) 2,00

E47. (a) 3,78 cm ; (b) 234 nC/m^2

E48. 2,94 cm

E49. 7,08 mm

E50. (a) 0,449 cm ; (b) 3,00 nC/m

E51. 12,5 μF

E52. 7,20 kW

E53. (a) $U_1 = 3,67$ μJ, $U_2 = 1,47$ μJ, $U_E = 5,14$ μJ ;
(b) $U_1 = 7,20$ μJ, $U_2 = 18,0$ μJ, $U_E = 25,2$ μJ

E54. (a) 4,43 $\mu F/cm^2$; (b) $2,77 \times 10^{12}$ ions ;
(c) $4,59 \times 10^{-5}$ mol/L ;
(d) 3270 fois, si la quantité d'ions utilisée est chaque fois la même et que tous les ions peuvent traverser

E55. (a) 100 nC en 1,25 ms ; (b) 1,00 nC en 0,0125 ms, la capacité étant 100 fois plus faible

Problèmes

P2. $\frac{1}{2}\varepsilon_0 A\ell\Delta V^2/[d(d - \ell)]$

P3. $\frac{1}{2}\varepsilon_0 A\ell\Delta V^2/(d - \ell)^2$

P4. (a) $\Delta V_{10} = \Delta V_{20} = 6,00$ V, $Q_{10} = Q_{20} = 212$ pC ;
(b) $\Delta V_1 = 10,0$ V, $\Delta V_2 = 2,00$ V,
$Q_1 = Q_2 = 354$ pC

P5. 18,3 pF

P6. 2,83 μF

P7. $Q^2/2\varepsilon_0 A$, attractive

P8. $C\Delta V^2/2\kappa$

P9. $kC\Delta V^2/2$

P12. (a) $\lambda^2/8\varepsilon_0\pi^2 r^2$; (b) $(\lambda^2 L/4\pi\varepsilon_0)\ln(b/a)$;
(c) Même résultat

P14. $16e(V_i - V_f)/3$

CHAPITRE 6

Exercices

E1. (a) $1,19 \times 10^{16}$ s^{-1} ; (b) $2,42 \times 10^3$ A/m^2

E2. (a) 0,318 A/m^2 ; (b) $3,98 \times 10^{11}$ m^{-3}

E3. (a) $1,07 \times 10^{-5}$ m/s ; (b) $1,49 \times 10^{-3}$ V/m

E4. (a) $6,37 \times 10^6$ A/m^2 ; (b) 0,108 V/m ;
(c) $4,72 \times 10^{-4}$ m/s ; (d) $6,36 \times 10^7$ s

E5. (a) $2,83 \times 10^6$ A/m^2 ; (b) $4,81 \times 10^{-2}$ V/m

E6. (a) $7,21 \times 10^6$ A/m^2 ; (b) $5,35 \times 10^{-4}$ m/s

E7. 1,06 mA

E8. 61,5 C

E9. (a) $6,79 \times 10^6$ A/m^2 ; (b) $4,24 \times 10^{-4}$ m/s ;
(c) 0,190 V/m

E10. $1,14 \times 10^{-6}$ Ω·m

E11. $6,85 \times 10^{-5}$ A

E12. $4R$

E13. $\rho\ell/\pi(b^2 - a^2)$

E14. 1,27 Ω

E15. 148 °C

E16. $2,08 \times 10^{-3}$ $°C^{-1}$

E17. 1,65

E18. 44,4 %

E19. 0,779

E20. 0,0333 S

E21. $2,83 \times 10^{-8}$ Ω·m, Al

E22. 0,591 Ω

E23. 5,04 Ω

E24. $2,21 \times 10^{-3}$ $°C^{-1}$

E25. (a) 45,6 °C ; (b) −5,64 °C

E26. (a) 0,413 Ω ; (b) 9,36 %

E27. 12,0 V

E28. $\Delta V_{14} = 1,23$ V, $\Delta V_{18} = 1,03$ V

E29. (a) $2,88 \times 10^5$ C ; (b) 38,4 h

E30. 0,000 420 $

E31. $P_{14} = 5,23$ W, $P_{18} = 13,2$ W

E32. 57,6 mL

E33. $2,30 \times 10^{19}$

E34. 14,8 W

E35. 720 kW

E36. (a) 0,657 hp ; (b) 20,4 %

E37. (a) 495 W ; (b) 1,25 W

E38. 7,64 A

E39. 14,5 V

E40. $R_1 = 144$ Ω, $R_2 = 206$ Ω

E41. $R_1 = 288$ Ω, $R_2 = 144$ Ω

E42. (a) $1,81 \times 10^{29}$ m^{-3} ; (b) $2,24 \times 10^{-4}$ m/s

E43. (a) $10t - 4$; (b) $3,00 \times 10^4$ A/m^2

E44. 0,160 μs

E45. (a) +42,0 V ; (b) $3{,}36 \times 10^{-16}$ J

E46. (a) 13,0 cm/s ; (b) La vitesse plus élevée indique une aire transversale plus faible : l'artère est partiellement bloquée

E48. 0,600 Ω

E49. (a) 39,5 °C

E50. $2{,}83 \times 10^{-8}$ Ω·m

E51. (a) 3,00 m ; (b) $7{,}86 \times 10^{-7}$ m^2

E52. 124 °C

E53. 151 kg

E54. (a) $\Delta V/L$; (b) $\Delta V/\rho Lne$; (c) $\pi r^2 \Delta V/\rho L$

Problèmes

P1. (a) 41,9 m ; (b) 6,98 A

P2. (a) ≈8 Ω ; (b) 0 A ; (c) Non

P3. (b) 37,4 µΩ

P5. $\sigma \omega a^2/2$

P6. (a) $4{,}79 \times 10^{-4}$ m/s ; (b) $4{,}09 \times 10^{-14}$ s ; (c) 4,79 mm

P7. 67,3 mg

P8. (a) 8,00 h ; (b) 1,20 h

P9. (a) $P_{\text{Cu}} = 0{,}767$ W, $P_{\text{acier}} = 18{,}0$ W ; (b) $E_{\text{Cu}} = 0{,}0102$ V/m, $E_{\text{acier}} = 0{,}239$ V/m

P10. (b) $3{,}03 \times 10^8$ canaux/cm^2

P11. (a) $E = \Delta V r_1 r_2/Lr^2$, où $r = r(x) = r_1 + (r_2 - r_1)x/L$; (b) $v_d = \Delta V r_1 r_2/Lne\rho r^2$, où $r = r(x) = r_1 + (r_2 - r_1)x/L$

CHAPITRE 7

Exercices

E1. $\mathscr{E} = 11{,}2$ V, $r = 0{,}706$ Ω

E2. 0,0150 Ω

E3. $\mathscr{E} = 12{,}0$ V, $r = 0{,}600$ Ω

E4. $R_1 = 6{,}00$ Ω, $\mathscr{E} = 48{,}0$ V

E5. (a) 0,520 Ω ; (b) 0,207 Ω ou 1,32 Ω

E6. (a) 64,8 W ; (b) 446 W

E7. 0,177 Ω

E8. (a) 0,236 Ω ; (b) 4,83 Ω

E9. (a) 7,82 Ω ; (b) 0,568 V

E10. 12,0 Ω

E11. 2,00 Ω, 3,00 Ω, 4,00 Ω, 5,00 Ω, 6,00 Ω, 7,00 Ω, 9,00 Ω, 1,20 Ω, 1,33 Ω, 1,71 Ω, 0,920 Ω, 5,20 Ω, 4,33 Ω, 3,71 Ω, 2,22 Ω, 1,55 Ω

E13. 1,00 Ω, 2,00 Ω, 3,00 Ω et 4,00 Ω ou 1,00 Ω, 2,00 Ω, 4,00 Ω et 5,00 Ω ou 1,00 Ω, 2,00 Ω, 4,00 Ω et 4,00 Ω ou 1,00 Ω, 2,00 Ω, 2,00 Ω et 5,00 Ω

E14. (a) 21,2 V ; (b) 7,07 V

E15. (a) 8,94 V ; (b) 13,4 V

E16. $V_b - V_a = 1{,}52$ V, $P_r = 12{,}5$ mW

E17. $I_{\text{lampe}} = 0{,}500$ A, $I_{\text{radio}} = 0{,}0833$ A, $I_{\text{grille-pain}} = 8{,}33$ A, $I_{\text{radiateur}} = 12{,}5$ A

E18. (a) 1,50 Ω ; (b) $P_{R_1} = 1{,}33$ W, $P_{R_2} = 2{,}67$ W ; (c) $\Delta V_{\mathscr{E}_1} = 10{,}0$ V, $\Delta V_{\mathscr{E}_2} = 8{,}00$ V ; (d) $P_{\mathscr{E}_1} = 24{,}0$ W, $P_{\mathscr{E}_2} = -12{,}0$ W

E19. (a) 0,500 A ; (b) $P_{R_1} = 0{,}500$ W, $P_{R_2} = 1{,}00$ W ; (c) $P_{\mathscr{E}_1} = 4{,}50$ W, $P_{\mathscr{E}_2} = -3{,}00$ W

E20. (a) 6,00 V ; (b) $\Delta V_{\mathscr{E}_1} = 6{,}00$ V, $\Delta V_{\mathscr{E}_2} = 7{,}50$ V ; (c) 1,50 W

E21. $I_7 = 0$, $I_3 = 3{,}33$ A, $I_4 = 2{,}50$ A

E22. $\mathscr{E} = 24{,}0$ V, $R = 6{,}00$ Ω

E23. (a) $r/2$

E24. $R_1R_2/(R_1 + R_2)$

E25. (a) $I_1 = 3{,}00$ A ; $I_2 = 1{,}00$ A, dans le sens opposé à celui de la figure ; $I_3 = 4{,}00$ A, dans le sens opposé à celui de la figure ; $\Delta V_{R_1} = 6{,}00$ V ; $\Delta V_{R_2} = 5{,}00$ V ; $\Delta V_{R_3} = 20{,}0$ V ; (b) −20,0 V ; (c) $P_{\text{fournie}} = P_{\text{dissipée}} = 103$ W

E26. (a) $I_1 = 3{,}00$ A, $I_2 = 1{,}00$ A, $I_3 = 4{,}00$ A, $\Delta V_{R_1} = 6{,}00$ V, $\Delta V_{R_2} = 2{,}00$ V, $\Delta V_{R_3} = 12{,}0$ V ; (b) $P_{\text{fournie}} = P_{\text{dissipée}} = 68{,}0$ W

E27. (a) $I_1 = 2{,}00$ A, $I_2 = 1{,}00$ A, $I_3 = 3{,}00$ A, $\Delta V_{R_1} = 8{,}00$ V, $\Delta V_{R_2} = 3{,}00$ V, $\Delta V_{R_3} = 9{,}00$ V ; (b) $P_{\text{fournie}} = P_{\text{dissipée}} = 46{,}0$ W

E28. $I_1 = 2{,}00$ A, $I_2 = 3{,}00$ A, $I_3 = 1{,}00$ A, $V_A - V_B = 8{,}00$ V

E29. $\mathscr{E} = 18{,}0$ V, $R = 1{,}00$ Ω

E30. (a) $I = 10{,}7$ A, $\Delta V = 16{,}0$ V ; (b) $I = 11{,}2$ A, $\Delta V = 21{,}1$ V

E31. 3,00 Ω

E32. (a) $\Delta V_{R_{\text{horizontale}}} = \Delta V/2$, $\Delta V_{R_{\text{verticale}}} = 0$; (b) R

E33. (a) 8,66 V ; (b) $P_1 = 13{,}5$ W, $P_2 = 3{,}00$ W

E34. (a) $\mathscr{E}_1 = 3{,}00$ V, $\mathscr{E}_2 = 13{,}0$ V ; (b) −4,00 V

E35. $1{,}44 \times 10^5$ Ω

E36. $\frac{8}{3}RC$

E37. 86,9 µF

E38. (a) 126 V ; (b) 73,6 V ; (c) 0,155 J ; (d) 73,6 mW

E39. (a) $Q = 0{,}368$ mC, $I = 0{,}368$ mA ; (b) 1,69 mJ ; (c) 9,20 mW ; (d) −9,20 mW ; (f) 37τ

E40. (a) $\mathscr{E}/R$; (b) RC

E41. (a) 1,50 s ; (b) 0,997 %

E42. 13,4

E43. $I_{3\Omega} = 0$, $I_{5\Omega} = I_{1\Omega} = 1{,}67$ Ω ; (b) 21,7 µC

E44. 50,0 µA ; (b) 1,00 MΩ

E45. $R_1 = 950$ Ω, $R_2 = 9{,}00$ kΩ, $R_3 = 40{,}0$ kΩ

E46. (a) 50,0 µA ; (b) 5,00 mΩ ; (c) $4{,}00 \times 10^{-4}$ Ω

E47. (a) $R_{\text{série}} = 200$ kΩ ; (b) $R_{\text{shunt}} = 2{,}00$ mΩ

E48. (a) 0 V ; (b) $R_2V/(R_1 + R_2)$; (c) $R_2V/(2R_1 + R_2)$; (d) $R_2V/(3R_1 + R_2)$

E49. (a) $I_R = 9{,}90$ A, $\Delta V_R = 99{,}0$ V ; (b) $I = 9{,}90$ A, $\Delta V = 100$ V

E50. (a) $I_R = 9{,}90$ A, $\Delta V_R = 99{,}0$ V ; (b) $I = 10{,}0$ A, $\Delta V = 99{,}0$ V

E51. 12,4 V

E52. 0,600 Ω

E53. $R_1 = 2{,}00\ \Omega$, $R_2 = 6{,}00\ \Omega$

E54. 6,00 Ω

E55. (a) 5,00 V ; (b) 10,0 V

E56. (a) 4,47 V ; (b) 9,90 V

E57. $I_1 = 47{,}9$ mA, $I_2 = 60{,}8$ mA, $I_3 = 109$ mA

E58. 6,00 Ω

E59. $\mathscr{E} = 1{,}60$ V, $r = 0{,}200\ \Omega$

E60. $R = 3{,}00\ \Omega$, $I_1 = 2{,}00$ A, $I_2 = 4{,}00$ A

E61. (a) 0,695 W ; (b) 4,17 W ; (c) −7,09 V

E62. $6{,}00 \times 10^5\ \Omega$

E63. (a) 900 μC ; (b) 58,2 ms

E64. 10,1 mΩ

Problèmes

P1. $R_1 = 8{,}16$ mΩ, $R_2 = 32{,}7$ mΩ, $R_3 = 367$ mΩ

P3. $5R/6$

P4. (a) $\frac{7}{12}R$; (b) $\frac{3}{4}R$

P7. 0,409 A

P8. (a) $1{,}51 \times 10^{-4}$ A ; (b) 48,5 μC ; (c) 0,182 mW ; (d) 0,368 s

P9. (a) 8,00 V ; (b) 8,00 V ; (c) 26,7 μs

P10. $I_{4\Omega} = 3{,}50$ A, $I_{2\Omega} = 5{,}00$ A, $I_{3\Omega} = 0{,}667$ A

P11. $I_{1\Omega} = 5{,}00$ A, $I_{4\Omega} = 2{,}00$ A, $I_{2\Omega} = 1{,}50$ A

P12. (a) $I_{10} = \mathscr{E}/R_1$, $I_{20} = \mathscr{E}/R_2$; (b) $I_1 = \mathscr{E}/R_1$, $I_2 = 0$ A ; (c) $C\mathscr{E}^2/2$; (d) $(R_1 + R_2)C$

P13. (a) $I_{10} = \mathscr{E}/R_1$, $I_{20} = 0$; (b) $\mathscr{E}/(R_1 + R_2)$

P14. (a) 9,82 s ; (b) 0,779 mA ; (c) 60,7 mW ; (d) 0,367 J

P16. $\alpha_1 = 0{,}471$, $\alpha_2 = 0{,}574$, $R_{éq} = 2{,}66\ \Omega$

P17. (a) Série ; (b) Parallèle

CHAPITRE 8

Exercices

E1. (a) $9{,}60 \times 10^{-18}$ N vers l'est ; (b) $9{,}60 \times 10^{-18}$ N vers le haut

E2. 0,0200 T, selon l'axe des z positifs

E3. $5{,}18 \times 10^{-18}$ N, à 45,0° au nord de l'est

E4. $\vec{\mathbf{F}}_{B1} = 0{,}0500\vec{\mathbf{k}}$ N, $\vec{\mathbf{F}}_{B2} = -0{,}0354\vec{\mathbf{k}}$ N, $\vec{\mathbf{F}}_{B3} = 0{,}0354(\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{k}})$ N

E5. Dans le plan xy, à 60,0° de l'axe des x

E6. (a) $0{,}0106\vec{\mathbf{j}}$ N ; (b) $\vec{\mathbf{B}}$ est orienté à 29,5° de l'axe des z positifs dans le plan xz, en direction de $\vec{\mathbf{v}}$

E7. $(-0{,}160\vec{\mathbf{i}} - 0{,}320\vec{\mathbf{j}} - 0{,}640\vec{\mathbf{k}})$ N

E8. $(1{,}00\vec{\mathbf{j}} - 0{,}500\vec{\mathbf{k}})$ T

E9. $(-3{,}13\vec{\mathbf{i}} - 1{,}04\vec{\mathbf{j}}) \times 10^6$ m/s

E10. (a) $\vec{\mathbf{B}}$ est dans le plan xz, B_x est inconnu et $B_z = 0{,}250$ T ; (b) $0{,}250\vec{\mathbf{k}}$ T

E11. $-0{,}400\vec{\mathbf{j}}$ T

E12. $0{,}0500\vec{\mathbf{k}}$ N

E13. $\vec{\mathbf{F}}_{B1} = IdB_1\vec{\mathbf{j}}$, $\vec{\mathbf{F}}_{B2} = -IdB_1\vec{\mathbf{i}}$, $\vec{\mathbf{F}}_{B3} = IdB_1(\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}})$

E14. $\vec{\mathbf{F}}_{B1} = 0$, $\vec{\mathbf{F}}_{B2} = IdB_2\vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{F}}_{B3} = -IdB_2\vec{\mathbf{k}}$

E15. $\vec{\mathbf{F}}_{B1} = IdB_3\vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{F}}_{B2} = 0$, $\vec{\mathbf{F}}_{B3} = -IdB_3\vec{\mathbf{k}}$

E16. $I = 5{,}91$ A, selon l'axe des z négatifs

E17. 0,0640 N/m directement vers le sud à 30° sous l'horizontale

E18. $0{,}720\vec{\mathbf{k}}$ N

E19. (a) $1{,}85 \times 10^{-2}\vec{\mathbf{j}}$ T ; (b) $(1{,}85 \times 10^{-2}\vec{\mathbf{j}} + 3{,}20 \times 10^{-2}\vec{\mathbf{k}})$ T

E20. (a) $\vec{\mathbf{F}}_{\text{haut}} = \vec{\mathbf{F}}_{\text{bas}} = 0$, $\vec{\mathbf{F}}_{\text{gauche}} = 3{,}00\vec{\mathbf{k}}$ N, $\vec{\mathbf{F}}_{\text{droit}} = -3{,}00\vec{\mathbf{k}}$ N, $\vec{\boldsymbol{\tau}} = 0{,}0600\vec{\mathbf{j}}$ N·m ; (b) $\vec{\mathbf{F}}_{\text{haut}} = -1{,}20\vec{\mathbf{j}}$ N, $\vec{\mathbf{F}}_{\text{bas}} = 1{,}20\vec{\mathbf{j}}$ N, $\vec{\mathbf{F}}_{\text{gauche}} = 3{,}00\vec{\mathbf{i}}$ N, $\vec{\mathbf{F}}_{\text{droit}} = -3{,}00\vec{\mathbf{i}}$ N, $\vec{\boldsymbol{\tau}} = 0$

E21. (a) $\vec{\mathbf{F}}_{B1} = \vec{\mathbf{F}}_{B3} = 8{,}00\vec{\mathbf{k}}$ N, $\vec{\mathbf{F}}_{B2} = -\vec{\mathbf{F}}_{B4} = -40{,}0\vec{\mathbf{j}}$ N ; (b) $\vec{\boldsymbol{\mu}} = (8{,}00\vec{\mathbf{i}} - 13{,}9\vec{\mathbf{j}})$ A·m² ; (c) $\vec{\boldsymbol{\tau}} = 6{,}95\vec{\mathbf{k}}$ N·m

E22. (a) 0,160 N·m ; (b) 20,1 W

E23. $1{,}88 \times 10^{-4}$ N·m

E24. (a) $\frac{1}{2}Id^2\vec{\mathbf{k}}$; (b) $\frac{1}{2}IBd^2\vec{\mathbf{j}}$

E25. (a) $(4{,}52\vec{\mathbf{i}} + 3{,}38\vec{\mathbf{j}} + 2{,}26\vec{\mathbf{k}}) \times 10^{-3}$ N·m ; (b) $-1{,}69 \times 10^{-3}$ J

E26. $2{,}13 \times 10^{-8}$ N·m/degré

E27. 3,13°

E28. (a) 6,26 m ; (b) 1,31 μs

E29. (a) 2,13 cm ; (b) $1{,}66 \times 10^{16}$ m/s² ; (c) 7,15 ns

E30. (a) $1{,}60 \times 10^{-20}$ kg·m/s ; (b) $4{,}79 \times 10^5$ eV

E31. (a) $1{,}53 \times 10^7$ m/s ; (b) $8{,}20 \times 10^{-8}$ s ; (c) $1{,}95 \times 10^{-13}$ J

E32. $1{,}85 \times 10^{-23}$ A·m²

E33. (a) $r_p/r_d = 1{,}00$; (b) $r_p/r_d = 0{,}500$; (c) $r_p/r_d = 0{,}707$

E34. (a) $r_p/r_é = 1{,}84 \times 10^3$; (b) $r_p/r_é = 42{,}9$

E35. (a) $B_\alpha/B_p = 2{,}00$; (b) $B_\alpha/B_p = 0{,}500$; (c) $B_\alpha/B_p = 1{,}00$

E36. 3,09 mm

E37. (a) 261 m

E38. (a) 11,4 MHz ; (b) $4{,}42 \times 10^{-15}$ J ; (c) $3{,}84 \times 10^{-21}$ kg·m/s

E39. 4,04 cm

E40. 4,96 mm

E41. 7,78 cm

E42. (a) $-1{,}00 \times 10^{-4}\vec{\mathbf{k}}$ T ; (b) 11,4 cm

E43. $7{,}25 \times 10^{-4}\vec{\mathbf{k}}$ T

E44. (a) 0,914 T ; (b) 50,0 kV ; (c) 13,9 MHz

E45. (a) $8{,}62 \times 10^7$ rad/s ; (b) $3{,}49 \times 10^{-12}$ J

E46. (a) 31,3 cm ; (b) 4,10 μS

E47. $1{,}80 \times 10^{11}$ C/kg
E48. 6,12 cm
E49. (a) 1,88 mm/s; (b) $3{,}13 \times 10^{27}$ m^{-3}
E50. 4,08 T
E51. $7{,}14 \times 10^{28}$/m^{-3}
E52. $0{,}300\vec{\mathbf{k}}$ T
E53. (a) 25,0° ou 155°; (b) $\vec{\mathbf{B}} = (-0{,}275\vec{\mathbf{i}} \pm 0{,}589\vec{\mathbf{j}})$ T
E54. $\vec{\mathbf{F}}_{B1} = -1{,}20\vec{\mathbf{k}}$ N, $\vec{\mathbf{F}}_{B2} = 1{,}20\vec{\mathbf{j}}$ N, $\vec{\mathbf{F}}_{B3} = 1{,}20\vec{\mathbf{k}}$ N, $\vec{\mathbf{F}}_{B4} = 0$
E55. $\vec{\mathbf{F}}_{B1} = 1{,}20\vec{\mathbf{i}}$ N, $\vec{\mathbf{F}}_{B2} = 1{,}20\vec{\mathbf{j}}$ N, $\vec{\mathbf{F}}_{B3} = (-1{,}20\vec{\mathbf{i}} - 1{,}20\vec{\mathbf{j}})$ N, $\vec{\mathbf{F}}_{B4} = 1{,}20\vec{\mathbf{j}}$ N
E56. $(1{,}20\vec{\mathbf{i}} + 0{,}802\vec{\mathbf{j}})$ µT
E57. (a) 2,71 mN vers l'ouest; (b) 2,88 mN directement vers le nord, à 20° au-dessus de l'horizontale
E58. 1,07 N vers l'est
E59. $-1{,}18\vec{\mathbf{j}}$ N·m
E60. (a) $\vec{\mathbf{F}}_{B1} = 0{,}640\vec{\mathbf{j}}$ N, $\vec{\mathbf{F}}_{B2} = 0{,}640\vec{\mathbf{j}}$ N, $\vec{\mathbf{F}}_{B3} = -0{,}640\vec{\mathbf{j}}$ N, $\vec{\mathbf{F}}_{B4} = -0{,}640\vec{\mathbf{k}}$ N; (b) $-0{,}128\vec{\mathbf{k}}$ N·m
E61. $1{,}02 \times 10^{9}$ A
E62. 48,0 µA
E63. $9{,}06 \times 10^{-4}$ T
E64. (a) $\sqrt{2m\Delta V/eB^2}$; (b) 10,0 %
E65. 0,380 m
E66. 3,77 m
E67. (a) 0,123 m; (b) 0,137 m
E68. (a) $P_p/P_d = 1{,}00$; (b) $K_p/K_d = 2{,}00$
E69. $\approx 1{,}7 \times 10^{-17}$ N
E70. (a) 0,827 T; (b) 350; (c) $2{,}77 \times 10^{-5}$ s

Problèmes

P1. (b) $2\pi(I/\mu B)^{1/2}$
P3. 1 spire
P4. (a) $\frac{1}{4}\pi\sigma R^4\vec{\boldsymbol{\omega}}$
P6. 15,3 mT
P7. (a) $8{,}53 \times 10^{-3}$ T; (b) 0,349 ns; (c) $\vec{\mathbf{r}} = (1{,}00\vec{\mathbf{i}} + 0{,}268\vec{\mathbf{j}})$ cm

CHAPITRE 9

Exercices

E1. (a) $(\mu_0 I_1 I_2 c/2\pi)[(1/a) - 1/(a+b)]$ vers la droite; (b) $8{,}73 \times 10^{-4}$ m/s
E2. (a) $(19{,}2\vec{\mathbf{i}} + 41{,}2\vec{\mathbf{j}})$ µT; (b) 6,00 cm à gauche du fil 1 sur une droite parallèle à l'axe x; (c) 80,0 µN/m
E3. (a) $(6{,}91\vec{\mathbf{i}} - 1{,}53\vec{\mathbf{j}}) \times 10^{-5}$ T; (b) $(4{,}59\vec{\mathbf{i}} + 20{,}7\vec{\mathbf{j}}) \times 10^{-5}$ N
E4. 8,00 cm à l'ouest du fil
E5. $5{,}00 \times 10^{-4}$ T
E6. $(70{,}0\vec{\mathbf{i}} + 17{,}3\vec{\mathbf{j}})$ µN/m
E7. 6,84° vers l'ouest par rapport au nord
E8. (a) $-8{,}00 \times 10^{-18}\vec{\mathbf{j}}$ N; (b) $8{,}00 \times 10^{-18}\vec{\mathbf{i}}$ N; (c) 0
E9. (a) $-1{,}33 \times 10^{-5}\vec{\mathbf{j}}$ T; (b) $8{,}51 \times 10^{-18}\vec{\mathbf{k}}$ N
E10. (a) $\mu_0 Ia/[\pi(a^2 + x^2)]$; (b) $\pm 2a$
E11. (a) $\mu_0 Ix/[\pi(a^2 + x^2)]\vec{\mathbf{j}}$; (b) $x = \pm a$
E12. $-8{,}00 \times 10^{-5}(\vec{\mathbf{i}} + 2\vec{\mathbf{k}})$ T
E13. $5{,}14 \times 10^{-7}\ I/a$
E14. $(\mu_0 I/2a)[(1/\pi) + 1]\vec{\mathbf{k}}$
E15. $(\mu_0 I/4)[(1/b) - 1/a]\vec{\mathbf{k}}$
E18. $d\vec{\mathbf{B}}_a = 8{,}84 \times 10^{-7}\vec{\mathbf{j}}$ T, $d\vec{\mathbf{B}}_b = 4{,}81 \times 10^{-7}(-\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}})$ T, $d\vec{\mathbf{B}}_c = -8{,}84 \times 10^{-7}\vec{\mathbf{i}}$ T, $d\vec{\mathbf{B}}_d = 8{,}84 \times 10^{-7}(-\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}})$ T, $d\vec{\mathbf{B}}_e = -2{,}50 \times 10^{-6}\vec{\mathbf{i}}$ T
E19. (b) $0{,}766a$
E20. $2RB_t \tan\theta/\mu_0 N$
E21. 5,09 A
E22. $(\mu_0\ I/a)[(1/4) + (1/\pi)]$
E23. $(\mu_0\ I/a)[(1/4) + (1/\pi\sqrt{5}) + (1/4\pi\sqrt{5})]$
E24. (a) $3{,}14 \times 10^{-5}$ T; (b) 0,254 A·m^2
E25. 265 spires
E26. 2,38 mT
E28. Pour $r < a$, $B = 0$, pour $a < r < b$, $B = (\mu_0 I/2\pi r)(r^2 - a^2)/(b^2 - a^2)$, pour $r > b$, $B = \mu_0 I/2\pi r$
E29. (a) Parallèle à la plaque et perpendiculaire au courant, vers la droite au-dessus et vers la gauche en dessous; (b) $\mu_0 Jt/2$
E30. (a) 8,00 mT; (b) 5,14 mT
E31. $r_i = 0{,}500$ mm, $r_e = 8{,}00$ mm
E33. (a) 2,00 A selon $+y$; (b) 1,20 A selon $-y$
E34. $I_1 = I_2 = 0{,}750$ A
E35. 0,667 A entrant dans la page
E36. $(\mu_0 I/2\pi d)(\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}})$
E37. $(1{,}28\vec{\mathbf{i}} - 3{,}84\vec{\mathbf{j}}) \times 10^{-4}$ N/m
E38. (a) $(6{,}50\vec{\mathbf{i}} - 2{,}60\vec{\mathbf{j}})$ µT; (b) $(13{,}0\vec{\mathbf{i}} + 32{,}5\vec{\mathbf{j}})$ µN
E39. 0,251 T
E40. 34,1 µT
E41. 0,0796 A/m

Problèmes

P2. (a) $\frac{1}{2}\mu_0 NIR^2\{1/(R^2 + x^2)^{3/2} + 1/[R^2 + (R - x)^2]^{3/2}\}$; (e) entre $0{,}0115R$ et $0{,}988R$
P3. (a) $\sigma\omega r\ dr$; (b) $\mu_0\sigma\omega\ dr/2$
P6. $(\mu_0 I/2\pi\ell)\ln[(L + \ell)/L]$
P7. (a) $\frac{1}{2}\mu_0 nI\left[(0{,}20 - x)/\sqrt{(0{,}20 - x)^2 + a^2} + x/\sqrt{x^2 + a^2}\right]$

(c) $x = 2{,}73$ cm, $x = 17{,}3$ cm;
(d) $x = 6{,}67$ mm, $x = 19{,}3$ cm

P9. (b) $\mu_0 Ia/2\pi R^2$

P10. $\mu_0 I/\pi^2 R$

P12. (a) $B = (\mu_0 I/2\pi R)n \tan(\pi/n)$, où $n = 6$ pour le cas représenté

P13. (a) $B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{qvd}{(d^2 + v^2t^2)^{3/2}}$

CHAPITRE 10

Exercices

E1. $-2{,}52$ mWb

E2. (a) $1{,}41 \times 10^{-3}$ Wb; (b) $-2{,}82 \times 10^{-3}$ Wb

E3. $|\mathscr{E}| = 40{,}1$ µV

E4. (a) 32,0 m/s; (b) $0{,}0250\vec{\mathbf{i}}$ N

E5. (a) $(3{,}20t - 2{,}40t^2) \times 10^{-4}$ Wb; (b) 1,33 mA; (c) 1,33 s

E6. $|\mathscr{E}| = 18{,}2$ mV

E7. $-13{,}7 \cos(60\pi t)$ mV

E8. $-0{,}682 \cos(5{,}03 \times 10^6 t)$ V

E9. (a) $-9{,}82 \times 10^{-4}$ Wb; (b) 98,2 mV; (c) Anti-horaire

E10. (a) $|\mathscr{E}| = 0{,}900$ V; (b) $-33{,}8\vec{\mathbf{i}}$ mN; (c) 0,675 W; (d) 0,675 W

E11. (a) 1,20 A; (b) 0,130 N; (c) 3,89 W; (d) 3,89 W

E12. ±3,56 T/s

E13. 7,26 mW

E14. (a) $-0{,}169 \sin(14{,}1t)$ V;
(b) $\mathscr{E}_{max} = 0{,}169$ V, à $t = 0{,}111$ s;
(d) À la position d'équilibre des ressorts

E17. (a) 3,36 mW;
(b) $B = 0$ à $t = 0{,}400$ s et $P_R = 0$ à $t = 0{,}200$ s

E18. $-24{,}1$ mV

E19. 130 rad/s

E20. 56,5 mV

E21. (a) 0,201 V; (b) $7{,}15 \times 10^{-4}$ N·m

E22. (a) 29,9 mV; (b) $2{,}84 \times 10^{-5}$ N·m; (c) $3{,}57 \times 10^{-4}$ W; (d) $3{,}57 \times 10^{-4}$ W

E23. $-(eCd/2)\vec{\mathbf{j}}$

E25. (a) $6{,}03 \times 10^{-5}$ V/m; (b) $1{,}21 \times 10^{-4}$ V/m

E26. $1{,}99 \times 10^2$ A/s

E27. (a) 0,810 V; (b) Zéro

E28. 3,18 mV

E29. $7{,}16 \times 10^3$ tr/min

E30. $(NAB_0/\tau)\, e^{-(t/\tau)}$

E31. 0,802 s

E32. 58 spires

E33. (a) 151 rad/s; (b) $8{,}88 \times 10^{-2}$ N·m

E34. 0,141 mV

Problèmes

P1. $|\mathscr{E}| = (\mu_0 Iv/2\pi) \ln[(\ell + d)/d]$

P2. $1{,}00 \times 10^{-4}$ A

P4. $2Bv^2t \tan\theta$

P5. $|\mathscr{E}| = 333$ µV

P6. (a) $(B\ell v/R)\cos\theta$

P7. $-(\mu_0 \omega I_0 c/2\pi) \ln[(a + b)/a] \cos(\omega t)$

P8. (b) $\mathscr{E}_0/B\ell$

P9. (b) $-L^2(\mathrm{d}B/\mathrm{d}t)$

P10. (a) $0{,}102e^{-(t/5{,}00 \times 10^{-2})}$ A

P12. (a) 0,280 m/s²; (b) 1,17 m/s; (c) 5,33 m/s

CHAPITRE 11

Exercices

E1. (a) 152 µH; (b) 26,3 A/s

E2. (a) 47,5 spires; (b) $7{,}16 \times 10^{-4}$ T

E3. (a) 4,80 µWb; (b) $|\mathscr{E}| = 42{,}0$ mV

E4. (a) LI/τ; (b) $L(2bt - a)$; (c) $-LI_0\omega \cos(\omega t)$

E5. (a) $|\mathscr{E}| = 9{,}38$ mV

E6. 33,8 µWb

E7. 93,8 mH

E8. 9,32 µH

E9. 8,43 µH

E10. $-1{,}00$ V

E11. (a) 80,4 µH; (b) 40,2 mV

E12. (a) $1{,}50 \times 10^{-9}$ H; (b) $6{,}00 \times 10^{-8}$ V

E13. (a) $(\mu_0 hN_1I_1/2\pi) \ln(b/a)$; (b) $(\mu_0 hN_1N_2/2\pi) \ln(b/a)$

E14. 18,9 µH

E15. (a) 0,600 mWb; (b) 0,394 mWb; (c) 0,140 mWb; (d) $-80{,}0$ mV; (e) $-12{,}6$ mV; (f) $-28{,}0$ mV

E16. (a) $(\mathscr{E}/L)t$; (b) $(\mathscr{E}/L)t$

E17. (a) 0,279 A; (b) $-10{,}3$ V; (c) 536 ms

E18. (a) 693 ms; (b) 1,50 V

E19. (a) 6,00 A/s; (b) 0,231 s; (c) 0,333 s

E20. 0,166 Ω; (b) 0,392 H

E21. (a) 13,0 V; (b) 11,0 V

E22. (a) 126 ms; (b) 0,940 H

E23. (a) 5,55 ms; (b) 99,3 %

E24. (a) $I_1 = I_2 = \mathscr{E}/(R_1 + R_2)$, $I_3 = 0$;
(b) $I_1 = I_3 = \mathscr{E}/R_1$, $I_2 = 0$;
(c) $I_1 = 0$, $I_2 = I_3 = \mathscr{E}/R_1$; (d) $R_2\mathscr{E}/R_1$

E25. 0,581 ms

E26. (a) 300 J; (b) 3,60 mJ

E27. (a) 3,98 mJ/m³; (b) 79,6 mA

E28. $5{,}55 \times 10^{-7}$ J

E29. (a) 9,59 W; (b) 5,58 W; (c) 15,2 W

E30. (a) $-3{,}63$ V; (b) 22,1 W; (c) 2,20 W; (d) 24,3 W

E31. 5,55 ms = 0,693τ
E32. 0,150 H
E33. 75,2 mA
E34. (a) 0,201 H; (b) $1,61 \times 10^{-2}$ J
E35. (a) $\mu_0 n^2 I^2/2$; (b) $\mu_0 n^2 A\ell$
E36. (a) −59,0 V; (b) 26,4 W
E37. (a) 563 Hz; (b) 0,212 A; (c) 0,222 ms
E38. (a) 0,162 H; (b) $8,00 \times 10^{-3}$ J
E39. 1,98 pF ≤ C ≤ 16,7 pF
E40. (a) $2,50 \times 10^3$ rad/s; (b) 28,3 Ω
E42. (a) $5,00 \times 10^4$ rad/s; (b) $1,79 \times 10^2$ Ω; (d) $4,00 \times 10^3$ Ω

Problèmes

P1. (a) $L_1 + L_2$; (b) $[(1/L_1) + (1/L_2)]^{-1}$
P4. $\mu_0/8\pi$
P5. $(\mu_0 c/2\pi)\ \ln[(b + a)/a]$
P6. $(\mu_0 N^2 h/2\pi)\ \ln(b/a)$
P7. (b) 3,14; (c) 0,730 μF
P8. (a) $1,54 \times 10^{-3}$ s; (b) $2,73 \times 10^{-3}$ s; (c) $2,73 \times 10^{-3}$ s

CHAPITRE 12

Exercices

E1. (a) 7,96 A; (b) 200 Hz
E2. (a) 1,10 A; (b) 65,0 Hz
E3. (a) 5,03 kHz; (b) 11,3 kHz; (c) 2,25 kHz
E4. 5,40 A
E5. (a) 1,70 mC; (b) 0,638 A
E6. (a) 0,921 A; (b) 0 A; (c) ±0,798 A; (d) 23,0 W
E7. (a) 1,30 A; (b) Zéro; (c) ±1,13 A; (d) −13,2 W
E8. (a) 3,03 Ω; (b) $4,59 \times 10^3$ Hz
E9. (a) I = 1,40 A, P_L = 68,2 W; (b) 66,3 Hz
E10. (a) i = 1,06 A, p_C = −62,0 W; (b) 111 Hz
E11. R = 5,67 Ω, C = 44,4 μF
E12. L = 40,0 mH, R = 13,0 Ω
E13. 725 mH ou 75,0 mH
E14. 0,140 H
E15. (a) 2,42 A; (b) 20,6 Ω; (c) 194 V; (d) 303 V
E16. (a) 80,0 Ω; (b) 50,0 Ω; (c) 2,67 A; (d) 33,5 Ω; (e) 239 W
E17. (a) 300 Ω; (b) 0,192 H; (c) 1,23 rad ou 70,5°
E18. L = 1,01 mH, C = 6,29 μF
E19. (a) 49,3 μF; (b) 113 Hz
E20. (a) 36,1 Ω; (b) 3,32 A; (c) −0,805 rad ou −46,1°; (d) Z = 25,0 Ω, I = 4,80 A, φ = −0,0365 rad ou −2,09°
E21. 264 Hz
E22. (a) 17,0 Ω; (b) 0,959 H
E23. (a) 919 Hz; (b) 622 Hz ou $1,36 \times 10^3$ Hz
E24. (a) 1,87 μF ou 575 nF; (b) 110 Ω ou 119 Ω
E25. (a) 0,760; (b) 289 W
E26. (a) 47,5 W; (b) 0,364
E27. (a) X_L = 20,0 Ω, X_C = 50,0 Ω; (b) −1,11 rad ou −63,4°; (c) 267 W; (d) 0,448
E28. 0,833
E29. 151 W
E30. (a) 1,00 V; (b) 1,73 V
E32. (a) 38,2 mH; (b) $\pi/4$ rad ou 45,0°
E33. $2,74 \sin(320t - 1,02)$ V
E34. $1,33 \times 10^3$ W
E35. (a) 16,2 W; (b) 1,01 W
E36. (a) 235 W; (b) 212 W; (c) 11,8 A
E37. (a) 400 spires; (b) 2,40 A
E38. ΔV_2 = 15,0 V, I_2 = 19,2 A

Problèmes

P2. ω_0
P3. (a) 2,00 V; (b) 2,31 V
P4. (a) 0,114 Ω; (b) 650 Hz; (c) 333 W
P5. 2,31 V
P7. (b) 84,7 V; (c) 15,7 V; (d) 1,59 V; (f) 283 rad/s; (g) Un filtre passe-bas
P8. (b) 53,2 V; (c) 98,8 V; (d) 99,99 V; (f) > 826 rad/s; (g) Un filtre passe-haut
P9. 37,1 mH
P11. (a) Δv_{R0} = 7,34 V, Δv_{C0} = 115 V, Δv_{L0} = 14,7 V; (b) 115 V; (c) −100 V
P12. (c) Un filtre passe-haut
P13. (c) Un filtre passe-bas
P14. (a) 7,33 Ω; (b) i_{R0} = 12,5 A, i_{L0} = 6,25 A, i_{C0} = 0,800 A

CHAPITRE 13

Exercices

E3. $2,90 \times 10^{-7}$ A
E4. (a) 3,00 A; (b) $3,78 \times 10^{11}$ V/s
E6. $9,27 \times 10^{-9}$ A
E7. $6,29 \times 10^{-13}$ T
E8. (b) $\mu_0 I_D r/2\pi R^2$
E9. (a) $5,00 \times 10^{-8}$ T; (b) $8,00 \times 10^{-8}$ T
E10. $7,00 \times 10^{-8}\vec{\mathbf{j}}$ T
E11. (a) λ = 1,26 cm, f = 23,9 GHz; (b) $60,0 \sin(500x + 1,50 \times 10^{11}t)\vec{\mathbf{k}}$ V/m
E12. $-(E_0/c)\sin(ky + \omega t)\vec{\mathbf{i}}$
E13. (a) 150 V/m; (b) 0,501 μT

E14. (a) $1,11 \times 10^{-8}$ J/m^3 ; (b) $B_0 = 1,67 \times 10^{-7}$ T, $\vec{\mathbf{B}}$ pointe selon l'axe des z positifs ; (c) 3,33 N/m^2

E15. (a) $3,33 \times 10^{-6}$ J/m^3 ; (b) $4,57 \times 10^{20}$ J

E16. (a) $E_0 = 1,55 \times 10^{-3}$ V/m, $B_0 = 5,17 \times 10^{-12}$ T ; (b) $E_0 = 1,14 \times 10^{-6}$ V/m, $B_0 = 3,80 \times 10^{-15}$ T

E17. (a) $3,33 \times 10^{-8}$ T ; (b) 59,7 W

E18. $4,47 \times 10^{-4}$ N

E19. (a) $3,33 \times 10^{-12}$ N ; (b) $3,33 \times 10^{-6}$ N

E20. $6,63 \times 10^{-15}$ N/m^2

E21. 150 kW

E22. $3,33 \times 10^{-8}$ m/s^2

E23. (a) $5,31 \times 10^{-15}$ W/m^2 ; (b) $3,87 \times 10^{8}$ m

E24. (a) 25,9 m ; (b) 3,00 V/m

E25. (a) $3,33 \times 10^{-8}$ N/m^2 ; (b) $7,99 \times 10^{-9}$ N

E26. (a) 5,99 V/m ; (b) $2,00 \times 10^{-8}$ T

E27. 19,6 mW

E28. 55,6 m^2

E30. (a) $9,55 \times 10^{-2}$ W/m^2 ; (b) $3,18 \times 10^{-10}$ J/m^3 ; (c) $6,37 \times 10^{-14}$ N

Problèmes

P1. (a) $(1/2)\mu_0\varepsilon_0 a(\mathrm{d}E/\mathrm{d}t)$; (b) $(1/2)\varepsilon_0 aE(\mathrm{d}E/\mathrm{d}t)$

P2. $4,55 \times 10^{-4}$ V

P3. (a) 720 W ; (b) $3,82 \times 10^{4}$ W/m^2

P5. $(S/c)(2 - f)$

P6. 474 nm

P7. $2,86 \times 10^{-4}$ V

P9. (a) 0,0100 A ; (b) 2,00 s

P10. 7,55°

P11. $8,71 \times 10^{-5}$ kg·m/s

P12. (a) $6,67 \times 10^{-3}$ N ; (b) $1,50 \times 10^{5}$ s

Sources des photographies

Couverture

Jesus Keller/Shutterstock.

Chapitre 1

Page 2: © Paul A. Souders/Corbis. **Page 4**: Bettmann/Corbis. **Page 7, fig. 1.4 a)**: Michael Holford; **fig. 1.4 b)**: John Howard/SPL. **Page 10**: Deutsches Museum. **Page 15**: AIP Emilio Segrè Visual Archives, E. Scott Barr Collection. **Page 15, fig. 1.12 a)**: Picture Collection, The Branch Libraries, The New York Public Library, Astor, Lenox and Tilden Foundations; **fig. 1.13**: Mathieu Lachance.

Chapitre 2

Pages 32 et 89: © Callum Bennetts/Alamy. **Page 36**: NOAA Photo Library, NOAA Central Library, OAR/ERL/National Severe Storms Laboratory (NSSL). **Page 42, fig. 2.8 (les quatre)**: Mathieu Lachance; **fig. 2.9 a) et fig. 2.10 a)**: Dr. Harold Wage, Princeton University. **Page 47, fig. 2.17 b)**: © epa european pressphoto agency b.v./Alamy. **Page 51**: Mathieu Lachance. **Page 53 (en haut, à gauche)**: Mathieu Lachance; **(au centre, à droite)**: Selçuk Oral/Wikipedia; **(en bas, à droite)**: Wikipedia. **Page 55 (à gauche)**: Mathieu Lachance. **Page 74 (au centre)**: Krzysztof Rafal/iStockphoto. **Page 76**: AIP Emilio Segrè Visual Archives. **Page 85, fig 2.75**: mehinger/iStockphoto.

Chapitre 3

Page 90: © Sergii Figurnyi/Fotolia. **Page 92**: © Photo Researchers/Alamy.

Chapitre 4

Pages 122 et 173: Pi-Lens/Shutterstock. **Page 125**: 2happy/Thinkstock. **Page 128**: © Galaxy Picture Library/Alamy. **Page 136 (les deux)**: Ira Wyman. **Page 141**: Mathieu Lachance. **Page 142**: © Cultura RM/Alamy. **Page 157**: Médiathèque RTE/Julien Botella. **Page 159**: © Daimler Chrysler Corporation. **Page 160 (les deux)**: Bethlehem Steel Corporation. **Page 161**: Dr. Erwin Müler, Pennsylvania State University.

Chapitre 5

Page 174: Bruno Passigatti/iStockphoto. **Page 176**: Andrew Lambert Photography/SPL. **Page 177**: Dr. Harold Wage, Princeton University. **Page 180**: © David R. Frazier Photolibrary/Alamy. **Page 182**: Science Museum, Londres. **Page 184 (en haut)**: Gracieuseté de Blaze Labs Research (Malte); **(en bas)**: Jon Brenneis, Berkeley, California. **Page 191 (en haut)**: Mathieu Lachance; **(en bas)**: Chathan Cooke, MIT High Voltage Research Laboratory. **Page 195**: Blount P., Sukharev S.I., Moe P.C., Martinac B., Kung C. «Mechanosensitive channels of bacteria». *Methods in Enzymology*, 1999, *294*: 458-882.

Chapitre 6

Pages 208 et 243: Ton Kinsberger/SPL. **Page 212**: Jorge Delgado/iStockphoto. **Page 215, fig. 6.4 b)**: Tiré de *Electricity and Magnetism*, par Oleg D. Jefimenko, Electret Scientific, 1989. **Page 216**: Bettmann/Corbis. **Page 217, fig. 6.8 a)**: Avec l'autorisation de AIP Emilio Segrè Visual Archives; **fig. 6.8 b)**: The Burndy Library Collection, The Huntington Library, San Marino, California (710667); **(en bas)**: © Alfredo Dagli Orti/The Art Archive/Corbis. **Page 223**: AIP Emilio Segrè Visual Archives, E. Scott Barr Collection. **Page 225**: Sergey Zholudov/iStockphoto. **Page 227**: Custom Medical Stock Photo/Newscom. **Page 230**: Graham Hughes/CP Images. **Page 232**: *Benjamin Franklin Drawing Electricity from the Sky*, par Benjamin West, Philadelphia Museum of Art/Don de M. et Mme Wharton Sinkler, 1958. **Page 234**: NOAA Photo Library, NOAA Central Library, OAR/ERL/National Severe Storms Laboratory (NSSL).

Chapitre 7

Pages 244 et 305: Lynn Johnson/Aurora Photos. **Page 259**: Filament électrique, 1879 (verre et bois), Edison, Thomas Alva (1847-1931)/Science Museum, London, UK/Bridgeman Images. **Page 265**: © World History Archive/Alamy. **Page 268**: Photographische Gesellschaft, Berlin, avec l'autorisation de AIP Emilio Segrè Visual Archives, W. F. Meggers Collection, Brittle Books Collection, Harvard University Collection. **Page 289**: Andrzej Barabasz (Chepry) – CC-BY-SA-2.5.

Chapitre 8

Page 306: Lawrence Berkeley Laboratory/Science Photo Library. **Page 308 (à gauche)**: Richard Megna/Fundamental Photograhs, NYC; **(à droite)**: Dr. Harold Wage, Princeton University. **Page 309**: Portrait de Hans Christian Œrsted, par C. W. Eckersberg/Danmarks Tekniske Museum, Helsingør, Danemark. **Page 325**: Culver Pictures. **Page 326**: Lawrence Berkeley Laboratory/Science Source. **Page 329 (à droite, en haut)**: NASA; **(à droite, en bas)**: Serg_Aurora/Thinkstock. **Page 335**: Gracieuseté de Dephy Technologies. **Page 336, fig. 8.36 a)**: Jon Brenneis, Berkeley, Californie; **fig. 8.36 b)**: Lawrence Berkeley National Laboratory. **Page 337, fig. 8.38 a)**: Philippe Mouche, © 2014 CERN; **fig. 8.38 b)**: Maximilien Brice et Claudia Marcelloni, © 2006 CERN; **fig. 8.38 c)**: Claudia Marcelloni, © 2007 CERN. **Page 339**: © Bachrach. **Page 343, fig. 8.43**: University of Cambridge, Cavendish Laboratory, Madingley Road, Cambridge, Angleterre; **fig. 8.44**: Science Museum, Londres.

Chapitre 9

Page 354: © skynesher/iStockphoto. **Page 356 (à gauche)**: *PSSC Physics*, 2nd edition, © 1965 Education Development Center. **Page 367 (à droite)**: Richard Megna/Fundamental Photographs, NYC. **Page 372, fig. 9.20 a) et fig. 9.21 a)**: Tiré de *Electricity and Magnetism*, par Oleg D. Jefimenko, Electret Scientific, 1989. **Page 374, fig. 9.25 b)**: windcatcher/Thinkstock; **fig. 9.25 c)**: itsmejust/Thinkstock. **Page 377, fig. 9.28 a)**: Picture Collection, The Branch Libraries, The New York Public Library, Astor, Lenox and Tilden Foundations; **fig. 9.28 b)**: Smithsonian Institution, nég. nº 74-4407; **fig. 9.28 c)**: Smithsonian Institution, nég. nº 24,938; **fig. 9.29**: Gravure d'Ambroise Tardieu, 1825, avec l'autorisation de AIP Emilio Segrè Visual Archives. **Page 383**: Maximilien Brice, © 2005 CERN. **Page 393, fig. 9.50**: d'après «Magnetic Fields in the Cosmos», par E. N. Parker, *Scientific American*, août 1983, © George V. Kelvin. **Page 395 (à droite, en haut)**: Gracieuseté de Dr L.A. Frank.

Chapitre 10

Page 406 : Francis Vachon/CP Images. **Page 408, fig. 10.1** : Picture Collection, The Branch Libraries, The New York Public Library, Astor, Lenox and Tilden Foundations ; **fig. 10.2** : The Royal Institution, Londres, Royaume-Uni/Bridgeman Images. **Page 409** : Michael Holford. **Page 414** : Michael Faraday (1791-1867) dans son laboratoire, 1852 (aquarelle sur papier), par Harriet Jane Moore/The Royal Institution, Londres, Royaume-Uni/Bridgeman Images. **Page 418** : © Phanie/Alamy. **Page 425** : Michael Holford. **Page 426, fig. 10.26 a)** : Damian Palus/Shutterstock ; **fig. 10.26 b)** : Antonis Liokouras/Thinkstock ; **fig. 10.26 c)** : Hydro-Québec. **Page 444** : © Bernd Mellmann/Alamy.

Chapitre 11

Pages 454 et 483 : iStockphoto. **Page 456** : Portrait de Joseph Henry (1797-1878) 1877 (peinture à l'huile), par Thomas LeClear (1818-1882)/The National Portrait Gallery, Smithsonian Institution.

Chapitre 12

Page 484 : Anthony Brown/Thinkstock. **Page 498** : BSIP SA/Alamy. **Page 505** : © RGB Ventures/SuperStock/Alamy. **Page 511** : Mathieu Lachance. **Page 513** : Graham Hughes/CP Images.

Chapitre 13

Page 522 : kotangens/Thinkstock. **Page 524** : Avec l'autorisation de AIP Emilio Segrè Visual Archives. **Page 537** : photo de Ben Rose, © Peter Rose. **Page 538, fig. 13.11 a)** : valeriopardi/Thinkstock ; **fig. 13.11 b)** : Rodrigo Reyes Marin/AFLO/Newscom ; **fig. 13.11 c)** : JAXA ; **fig. 13.12** : Deutsches Museum, avec l'autorisation de AIP Emilio Segrè Visual Archives. **Page 539** : Deutsches Museum, Munich. **Page 542** : Doug Johnson/Science Photo Library. **Page 543** : NASA/NOAA.

*
* *

Les dessins de protéines des pages 22, 23 (fig. 1.23a), 24, 102 (fig. 3.16b), 135, 149, 150 et 198 ont été réalisés par M. Rémy Sauvé (Université de Montréal).

Les illustrations suivantes ont été reproduites avec l'autorisation de Pearson Education, Upper Saddle River :

Page 199, fig. 5.29 (les quatre) : Reece et coll., *Campbell – Biologie*, 4e édition, Pearson ERPI, © 2012, p. 1219, fig. 48.11. **Page 252** : Marieb et Hoehn, *Anatomie et physiologie humaines*, 5e édition, Pearson ERPI, © 2015, p. 821, fig. 19.4. **Page 263** : Marieb et Hoehn, *Anatomie et physiologie humaines*, 5e édition, Pearson ERPI, © 2015, p. 338, fig. 9.6. **Page 266** : Marieb et Hoehn, *Anatomie et physiologie humaines*, 5e édition, Pearson ERPI, © 2015, p. 799, fig. 18.18.

INDEX

Note : La lettre italique *f*, *m*, *p* ou *t* accolée à un numéro de page signale un renvoi à une figure (*f*), à une méthode de résolution (*m*), à une photo (*p*) ou à un tableau (*t*). Les numéros de page en italiques renvoient aux passages signalés par l'icône (sciences de la vie).

A

B

C

D

E

F

G

H

I

J

K

L

M

N

O

P

Q

R

S

T

U

V

W

X

Y

Z

Facteurs de conversion

Longueur

1 po = 2,54 cm (exactement)
1 m = 39,37 po = 3,281 pi
1 mille (mi) = 5280 pi = 1,609 km
1 km = 0,6215 mille
1 fermi (fm) = 1×10^{-15} m
1 ångström (Å) = 1×10^{-10} m
1 mille marin = 6076 pi = 1,151 mille
1 unité astronomique (UA) = $1{,}4960 \times 10^{11}$ m
1 année-lumière = $9{,}4607 \times 10^{15}$ m

Aire

1 m^2 = 10^4 cm^2 = 10,76 pi^2
1 pi^2 = 0,0929 m^2
1 po^2 = 6,452 cm^2
1 $mille^2$ = 640 acres
1 hectare (ha) = 10^4 m^2 = 2,471 acres
1 acre (ac) = 43 560 pi^2

Volume

1 m^3 = 10^6 cm^3 = $6{,}102 \times 10^4$ po^3
1 pi^3 = 1728 po^3 = $2{,}832 \times 10^{-2}$ m^3
1 L = 10^3 cm^3 = 0,0353 pi^3
= 1,0576 pinte (É.-U.)
1 pi^3 = 28,32 L = 7,481 gallons É.-U. = $2{,}832 \times 10^{-2}$ m^3
1 gallon (gal) É.-U. = 3,786 L = 231 po^3
1 gallon (gal) impérial = 1,201 gallon É.-U. = 277,42 po^3

Masse

1 unité de masse atomique (u) = $1{,}6605 \times 10^{-27}$ kg
1 tonne (t) = 10^3 kg
1 slug = 14,59 kg
1 tonne É.-U. = 907,2 kg

Temps

1 jour = 24 h = $1{,}44 \times 10^3$ min = $8{,}64 \times 10^4$ s
1 a = 365,24 jours = $3{,}156 \times 10^7$ s

Force

1 N = 10^5 dynes = 0,2248 lb
1 lb = 4,448 N
Le poids de 1 kg correspond à 2,205 lb.

Énergie

1 J = 10^7 ergs = 0,7376 pi·lb
1 eV = $1{,}602 \times 10^{-19}$ J
1 cal = 4,186 J ; 1 Cal = 4186 J (1 Cal = 1 kcal)
1 kWh = $3{,}600 \times 10^6$ J = 3412 Btu
1 Btu = 252,0 cal = 1055 J
1 u est équivalent à 931,5 MeV

Puissance

1 hp = 550 pi·lb/s = 745,7 W
1 cheval-vapeur métrique (ch) = 736 W
1 W = 1 J/s = 0,7376 pi·lb/s
1 Btu/h = 0,2931 W

Pression

1 Pa = 1 N/m^2 = $1{,}450 \times 10^{-4}$ lb/po^2
1 atm = 760 mm Hg = $1{,}013 \times 10^5$ N/m^2 = 14,70 lb/po^2
1 bar = 10^5 Pa = 0,9870 atm
1 torr = 1 mm Hg = 133,3 Pa

L'alphabet grec

Alpha	A	α	Iota	I	ι	Rhô	P	ρ
Bêta	B	β	Kappa	K	κ	Sigma	Σ	σ
Gamma	Γ	γ	Lambda	Λ	λ	Tau	T	τ
Delta	Δ	δ	Mu	M	μ	Upsilon	Y	υ
Epsilon	E	ε	Nu	N	ν	Phi	Φ	ϕ ou φ
Zêta	Z	ζ	Xi	Ξ	ξ	Khi	X	χ
Êta	H	η	Omicron	O	o	Psi	Ψ	ψ
Thêta	Θ	θ	Pi	Π	π	Oméga	Ω	ω

Formules mathématiques*

Géométrie

Triangle de base b et de hauteur h	Aire $= \frac{1}{2}bh$	
Cercle de rayon r	Circonférence $= 2\pi r$	Aire $= \pi r^2$
Sphère de rayon r	Aire de la surface $= 4\pi r^2$	Volume $= \frac{4}{3}\pi r^3$
Cylindre de rayon r et de hauteur h	Aire de la surface courbe $= 2\pi rh$	Volume $= \pi r^2 h$

Algèbre

Si $ax^2 + bx + c = 0$, alors $\quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Si $x = a^y$, alors $y = \log_a x$; $\quad \log(AB) = \log A + \log B$

Produits vectoriels

Produit scalaire : $\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}} = AB\cos\theta$

$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

Produit vectoriel :

$$\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}} = (A_x\vec{\mathbf{i}} + A_y\vec{\mathbf{j}} + A_z\vec{\mathbf{k}}) \times (B_x\vec{\mathbf{i}} + B_y\vec{\mathbf{j}} + B_z\vec{\mathbf{k}})$$
$$= (A_yB_z - A_zB_y)\vec{\mathbf{i}} + (A_zB_x - A_xB_z)\vec{\mathbf{j}} + (A_xB_y - A_yB_x)\vec{\mathbf{k}}$$

Trigonométrie

$\sin(90° - \theta) = \cos\theta$; $\quad \cos(90° - \theta) = \sin\theta$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$; $\quad \cos(-\theta) = \cos\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$; $\quad \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

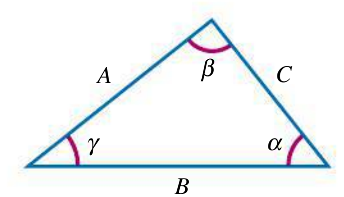
$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$

$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$

$\sin A \pm \sin B = 2\sin\left(\dfrac{A \pm B}{2}\right)\cos\left(\dfrac{A \mp B}{2}\right)$

Loi des cosinus $\quad C^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\gamma$

Loi des sinus $\quad \dfrac{\sin\alpha}{A} = \dfrac{\sin\beta}{B} = \dfrac{\sin\gamma}{C}$



Approximations du développement en série (pour $x \ll 1$)

$(1 + x)^n \approx 1 + nx \qquad \sin x \approx x - \dfrac{x^3}{3!}$

$e^x \approx 1 + x \qquad \cos x \approx 1 - \dfrac{x^2}{2!} \qquad$ (x en radians)

$\ln(1 \pm x) \approx \pm x \qquad \tan x \approx x - \dfrac{x^3}{3}$

Approximations des petits angles (θ en radians)

$\sin\theta \approx \tan\theta \approx \theta \qquad \cos\theta \approx 1$

---

* Une liste plus complète est donnée à l'annexe B.